Светличная В.Б., Матвеева Т.А.,

Мустафина Д.А., Ребро И.В.

Математика

Часть 1

Волгоград

2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева
Д.А.Мустафина, И.В. Ребро

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Электронное учебное пособие

Волгоград
2017

УДК 51(07)
ББК 22.1я73
М 34

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
доцент филиала ГОУВПО «Московский энергетический институт (технический университет)»
Капля Е.В.
кандидат физико-математических наук,
зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика»
ВГИ (филиал) Волгоградского государственного университета.
Полковников А. А.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Светличная, В.Б.

Математика. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева, Д.А. Мустафина, И.В. Ребро ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан.(1 файл: 610 КБ). – Волгоград, 2017. - Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-2768-0

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал и большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия по учебной дисциплине «Математика», включающей разделы линейной и векторной алгебры. В пособие содержится много практического материала. Приведены таблицы, в которых систематизированы основные свойства и алгоритмы для практического применения.

Учебное пособие рассчитано на студентов технических высших учебных заведений, обучающихся по программе бакалавров различных форм обучения в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

Библиограф.: 6 назв.

ISBN 978-5-9948-2768-0

Оглавление

ГЛАВА 1.	**Матричная алгебра** …………………………………	4
1.1.	Матрица. Основные понятия ………………….....	4
1.2.	Основные действия над матрицами………………....	5
1.3.	Обратная матрица……………………………………..	10
1.4.	Матрицы в экономике…………………………………	12
1.5.	Модель Леонтьева многоотраслевой экономики……	14
1.6.	Определители и способы их вычисления…………….	18
1.7.	Условие существования обратной матрицы…………	24
1.8.	Ранг матрицы…………………………………………	26
1.9.	Матричные уравнения…………………………………	29
1.10.	Матричный способ решения систем линейных уравнений……………………………………………	30
1.11.	Правило Крамера для решения систем ЛУ………….	33
1.12.	Решение СЛУ по методу Жордано-Гаусса…………..	35
ГЛАВА 2.	**Векторная алгебра**…………………………………..	43
2.1.	Геометрический вектор……………………………….	43
2.2.	Декартова система координат ……………………….	46
2.3.	Координатный вектор в ПДСК	47
2.4.	Координатный вектор в ПДСК 3-х мерного пространства………………………………………....	49
2.5.	Произведения векторов…………………………………	52
2.6.	Линейная модель обмена……………………………..	59
Библиографический список………………………………………………..		61

Глава 1. Матричная алгебра
1.1. Матрица. Основные понятия

- *Таблицу чисел, содержащую m строк и n столбцов, называют* ***матрицей размера m×n****:* $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)$,

  где $i=1,\dots,m$ и $j=1,\dots,n$.

- Числа *m* и *n* называются ***размерностями*** матрицы

Место каждого элемента a_{ij} однозначно определяется номером *i*-строки и *j*-столбца, на пересечении которых он находится.

- ***Матрицы*** $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ *называются* ***равными*** *между собой* $(A=B)$, *если равны все соответствующие элементы этих матриц:* $a_{ij}=b_{ij}$.

- ***Матрицы*** $A_{m\times n}$ *и* $B_{m\times n}$ *называются* ***эквивалентными*** $(A\sim B)$, *если одна из них получается из другой с помощью*

<u>элементарных преобразований:</u>

1. две строки матрицы можно поменять местами, при этом остальные строки остаются на своих местах;
2. все элементы некоторой строки матрицы можно умножить или разделить на некоторое действительное число, отличное от нуля;
3. к элементам какой-либо сроки матрицы можно прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое действительное число.

- *Матрица, содержащая один столбец (строку), называется* ***столбцовой (строчной) матрицей*** *или* ***вектором*** *(вектор-столбец или вектор-строка).*

- *Матрица, все элементы которой равны нулю, называется* ***нулевой*** $\left(O_{m\times n}\right)$.

- *Если число столбцов матрицы равно числу строк* $(m=n)$, *то матрица называется* ***квадратной*** $\left(A_{n\times n}\right)$.

- Элементы квадратной матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего *левого угла*, образуют ***главную диагональ***: $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$.

- Элементы квадратной матрицы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего *правого угла*, образуют ***побочную диагональ***: $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$.

- *Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется* ***диагональной****:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице называется* ***единичной матрицей***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_{n\times n}.$$

В матричном исчислении матрицы $O_{m\times n}$ и $E_{n\times n}$ играют роль чисел 0 и 1.

- *Квадратная матрица называется* ***треугольной****, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю.*

- *Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей* ***транспонированной*** *к данной.* Если матрица $A_{m\times n}$, то $\left(A^T\right)_{n\times m}$.

- *Матрица, у которой равны элементы, симметричные относительно главной диагонали, называется* ***симметрической.***

1.2. Основные действия над матрицами

Сумма (разность) двух ***матриц***		Свойства
$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n}$ Замечание. Действие определено только для матриц одинакового размера	Действие сводится к соответствующей операции над элементами матриц: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$	1. $A + B = B + A$ 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ 3. $A + O = A$ 4. $A - A = O$ 5. $(A + B)^T = A^T + B^T$

Пример 2.1. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 21 & -16 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 2 & 13 \\ 3 & -5 & -17 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 8+(-7) & 4+2 & 5+13 \\ 21+3 & -16+(-5) & 3+(-17) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 24 & -21 & -14 \end{pmatrix}.$$

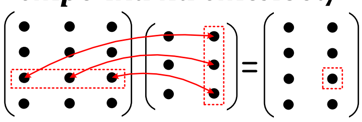
Умножение матрицы ***на число***		***Свойства***
$\alpha \cdot A_{m\times n} = B_{m\times n}$	Действие сводится к соответствующей операции над элементами матрицы: $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$	1. $A \cdot 1 = A$ 2. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ 3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ 4. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

Пример 2.2.

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 & 16 \\ -5 & 1 & 10 \\ 7 & 11 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 8 & 7\cdot(-3) & 7\cdot 16 \\ 7\cdot(-5) & 7\cdot 1 & 7\cdot 10 \\ 7\cdot 7 & 7\cdot 11 & 7\cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & -21 & 112 \\ -35 & 7 & 70 \\ 49 & 77 & 147 \end{pmatrix}.$$

- ***Противоположной матрицей*** $(-A)$ *для матрицы* A *называется матрица, у которой все элементы имеют противоположный знак по отношению к соответствующим элементам исходной матрицы:*

$$-A = (-1) \cdot A.$$

Произведение матриц		***Свойства***
$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$ Замечание. Действие определено только для матриц, когда число столбцов первой матрицы-сомножителя равно числу строк второй матрицы-сомножителя	***«строчка на столбец»***  Элемент i-строки и j-столбца матрицы C равен сумме произведений элементов i-строки матрицы A на соответствующие элементы j-столбца матрицы B: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$	1. $A \cdot B \neq B \cdot A$ 2. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ 3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ 4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$ 5. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где $A_{n\times n}$ 6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

	$i=1,...,m$; $j=1,...,n$	

Возведение матрицы ***в степень***		***Свойства***
$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{n\ раз}$ <u>Замечание</u>. Действие возможно только для квадратной матрицы	Действие сводится к произведению матриц	1. $A^0 = E$ 2. $A^n \cdot B^n = (A \cdot B)^n$ 3. $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$ 4. $\left(A^n\right)^m = A^{n \cdot m}$

Пример 2.3. Найти возможные произведения матриц

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

– произведение $(A_{2\times2} \cdot B_{3\times2})$ не существует, так как число столбцов (=2) матрицы A не равно числу строк (=3) матрицы B;
– произведение $(B_{3\times2} \cdot A_{2\times2})$ возможно, так как число столбцов (=2) матрицы B равно числу строк (=2) матрицы A.

Найдём произведение $B_{3\times2} \cdot A_{2\times2} = C_{3\times2} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$.

$$c_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_{1-\text{я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\substack{1-\text{й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 2\cdot1+1\cdot3=5;$$

$$c_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1−я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{2−й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 5;$$

$$c_{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{2−я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{1−й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 0\cdot 1 + 3\cdot 3 = 9;$$

$$c_{22} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{2−я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{2−й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 0\cdot 2 + 3\cdot 1 = 3;$$

$$c_{31} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{3−я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{1−й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 1\cdot 1 - 1\cdot 3 = -2;$$

$$c_{32} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{3−я строка матрицы B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{2−й столбец} \\ \text{матрицы A}}} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 1.$$

В итоге получим: $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для данных матриц возможны оба произведения:

$$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B_{3\times 2}A_{2\times 3} = C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 3 & 2\cdot 2 - 1\cdot 1 & 2\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы AB и BA не только не равны, но даже имеют разные размерности.

- *Если для матриц выполняется коммутативный закон умножения* $A\cdot B = B\cdot A$, *то* ***матрицы*** *называются* ***перестановочными.*** Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Легко проверить, что при умножении квадратной матрицы A на E, матрица A не изменится. Таким образом, *единичная матрица E перестановочна с любой квадратной матрицей той же размерности*.

Пример 2.5. Если $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 10\end{pmatrix}$,

то $A^2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 4+3\cdot 7 & 4\cdot 3+3\cdot 10\\ 7\cdot 4+10\cdot 7 & 7\cdot 3+10\cdot 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37 & 42\\ 98 & 121\end{pmatrix}$.

Произведение чисел может равняться 0 только в том случае, когда хотя бы одно из них равно 0, однако произведение матриц не наследует это свойство. Более того, возможно, что $A\cdot A=O$, хотя A не совпадает с O-матрицей.

Пример 2.6. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, то $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$.

Транспонирование матриц	***Свойства***
Матрица $(A^T)_{n\times m}$, полученная из данной $A_{m\times n}$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером	1. $E^T=E$ 2. $\left(A^T\right)^T=A$ 3. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

Пример 2.7. Если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ -2 & 1 & 11 & 2\\ 5 & -7 & -8 & 0\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -7\\ -3 & 11 & -8\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Если $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ – вектор-строка, то $A^T=\begin{pmatrix}7\\ -1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$ – вектор-столбец.

Если A – квадратная матрица, то A^T – квадратная матрица того же порядка.

Если квадратная матрица не изменилась после транспонирования, $\left(A^T=A\right)$, то она является симметрической матрицей.

Специальные классы квадратных матриц

Симметрическая	$A = A^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall (i,j)$
Кососимметрическая	$A = -A^T \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall (i,j)$
Ортогональная	$A \cdot A^T = E \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot a_{ik} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k \end{cases}$

Размерности матриц A и A^T таковы, что возможны оба произведения $A^T \cdot A$ и $A \cdot A^T$.

Пример 2.8. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

то $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 27 \end{pmatrix}$, $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -4 & -1 \\ -5 & 10 & 12 & 3 \\ -4 & 12 & 16 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2.9. Вычислить $f(A) = 2A^2 - 7A + 5E$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Найдем: $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 42 \\ 98 & 121 \end{pmatrix}$.

Тогда: $f(A) = 2A^2 - 7A + 5E = = 2 \cdot \begin{pmatrix} 37 & 42 \\ 98 & 121 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 74 & 84 \\ 196 & 242 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 49 & 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 63 \\ 147 & 177 \end{pmatrix}.$$

1.3. Обратная матрица

- ***Матрица*** *В называется* ***обратной*** *к матрице А, если справедливо равенство*: $A \cdot B = B \cdot A = E$.

  Обозначение: A^{-1}.

– Только квадратная матрица может иметь обратную матрицу.

– Не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу.

<u>Свойства</u>: 1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

2. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$;

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, где матрицы $A, B -$ квадратные, одинаковой размерности.

Для нахождения обратной матрицы можно использовать метод ***<u>элементарных преобразований строк</u>*:**

1. Составляют расширенную матрицу, приписывая справа от исходной матрицы единичную матрицу соответствующей размерности:

$$\Gamma = \left(A \middle| E\right) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями строк матрицу Γ приводят к виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right), \quad \text{где} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} -$$

искомая обратная матрица A^{-1}.

Пример 2.10. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ найти $C = 4 \cdot A^{T} - A^{-1}$.

1) Найдём обратную матрицу A^{-1} методом элементарных преобразований строк, присоединив к матрице A единичную матрицу соответствующей размерности:

$$A\big|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +1\text{–}ая\ строка\ \times(-3) \sim \\ +1\text{–}ая\ строка\ \times 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -4 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) + 3 - ья\ строка \ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + 2 - ая\ строка \times (-2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sim \\ + 2 - ая\ строка \times (-5) \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 3 & -2 & -2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 7 & -5 & -4\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -2 & 3 & -2 & -2\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 1\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -7 & 5 & 4\end{array}\right)\begin{array}{l}+3-\text{ья строка}\ \times 2\\ +3-\text{ья строка}\ \times(-2)\sim\\ \ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -11 & 8 & 6\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 13 & -9 & -7\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -7 & 5 & 4\end{array}\right)\quad\Rightarrow\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-11 & 8 & 6\\ 13 & -9 & -7\\ -7 & 5 & 4\end{pmatrix}.$$

2) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}.$

3) В итоге $C=4\cdot A^T-A^{-1}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 3 & 4\cdot(-2)\\ 4\cdot 2 & 4\cdot 2 & 4\cdot 1\\ 4\cdot 2 & 4\cdot(-1) & 4\cdot 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-11 & 8 & 6\\ 13 & -9 & -7\\ -7 & 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 4 & -14\\ -5 & 17 & 11\\ 15 & -9 & 16\end{pmatrix}.$$

1.4. Матрицы в экономике

Экономический смысл матрицы − это упорядоченная информация, представленная в виде таблицы.

Например,

— для n отраслей элементы a_{ij} квадратной матрицы A_{nn} могут обозначать объёмы поставок из i-ой отрасли в j-ю;

— если предприятие производит n типов продукции, используя при этом m видов сырья, то элементы a_{ij} матрицы A_{mn} будут определять нормы расхода i-го вида сырья на производство единицы j-го типа продукции − технологическая матрица;

— при известной технологической матрице A_{mn} и заданной матрице объёмов производимой продукции X_{n1} можно найти матрицу полных затрат по видам сырья: $S=A_{mn}\cdot X_{n1}$ − матрица материальных затрат;

— если предприятие производит n типов продукции различного m-го разряда качества, то элементы a_{ij} прямоугольной матрицы A_{mn} будут определять единый план изготовления изделий – матрица готового продукта;

— при известной матрице готового продукта A_{mn} и заданной матрице расценок произведённой продукции X_{nk} в k областях можно найти матрицу выручки: $T_{m\,k} = A_{mn} \cdot X_{n\,k}$.

Пример 2.11. Даны матрица выпуска 4-х видов продукции $A = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ и матрица их цен в 3-х городах $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу прибыли от продаж и выбрать наиболее выгодный вариант.

Решение.

Найдём матрицу прибыли от продаж: $C = A_{1\times 4} \cdot B_{4\times 3} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}_{1\times 3}$.

$c_{11} = 12 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 36 + 5 + 4 + 9 = 54$;

$c_{12} = 12 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 9 \cdot 3 = 24 + 10 + 28 + 27 = 89$;

$c_{13} = 12 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 12 + 15 + 7 + 18 = 52$.

В итоге: $C = \begin{pmatrix} 54 & 89 & 52 \end{pmatrix}$. Наибольшую выгоду можно получить при продаже продукции во 2-ом городе.

Пример 2.12. Швейная мастерская организовала выпуск трёх видов продукции P_1, P_2, P_3, используя сырьё трёх типов S_1, S_2, S_3. Нормы расхода сырья определяются матрицей $A = \left(a_{ps}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; план выпуска продукции − матрицей $P = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$; стоимость единицы каждого типа сырья и доставки − соответственно матрицами $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 55 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Найти запасы сырья, необходимые для выпуска продукции; стоимость приобретения сырья; затраты на транспортировку сырья; общие затраты на сырьё.

Решение.

1) Матрица запасов сырья:

$$S = P \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}_{1\times3} = \begin{pmatrix} 730 & 980 & 1170 \end{pmatrix}$$

где $S_1 = 100 \cdot 2 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 = 730$;

$S_2 = 100 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 130 \cdot 4 = 980$;

$S_3 = 100 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 130 \cdot 5 = 1170$.

2) Стоимость приобретения сырья:

$$C = S \cdot B = \begin{pmatrix} 730 & 980 & 1170 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 55 \end{pmatrix}_{3\times1} = (\bullet)_{1\times1} =$$

$$= (730 \cdot 30 + 980 \cdot 40 + 1170 \cdot 55) = (125450).$$

3) Затраты на транспортировку сырья:

$$T = S \cdot D = \begin{pmatrix} 730 & 980 & 1170 \end{pmatrix}_{1\times3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}_{3\times1} = (\bullet)_{1\times1} =$$

$$= (730 \cdot 15 + 980 \cdot 10 + 1170 \cdot 5) = (26600).$$

4) Общие затраты на приобретения и транспортировку сырья:

$$O = C + T = (125450) + (26600) = (152050).$$

Ответ: Запасы сырья: $S = \begin{pmatrix} 730 & 980 & 1170 \end{pmatrix}$;

стоимость приобретения сырья: $C = 125450$;

затраты на транспортировку сырья: $T = 26600$;

общие затраты на приобретения и транспортировку сырья: $O = 152050$.

1.5. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Рассмотрим производство n отраслей за некоторый период (год):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

– *матрица валового выпуска* (матрица режима работы отраслей)

– *матрица конечного* (прибавочного) *продукта*

x_i – общий (валовой) объём продукции i-ой отрасли ($i = 1,..,n$);

x_{ij} – объём продукции i-ой отрасли, потребляемый j-ой отраслью ;

$y_i -$ объём конечной продукции i-ой отрасли для непроизводственного потребления ($i = 1,..,n$).

Введём ***коэффициенты прямых затрат:*** $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ *− затраты продукции i-ой отрасли, идущие на производство единицы продукции j-ой отрасли.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0$$

− матрица прямых материальных затрат.

Она дает информацию о сложившейся структуре межотраслевых связей, о существующей технологии общественного производства и используется в текущем и долгосрочном планировании.

Равенства $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ *называются* ***соотношениями баланса.***

Учитывая, что $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ получим:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i$$ или в матричной записи: $X = A\,X + Y$, где

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k \\ \dots. \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k \end{pmatrix}$$ − *матрица совокупных материальных затрат в сфере производства*

Основная задача межотраслевого баланса

состоит в отыскании такой матрицы валового выпуска X, которая при известной матрице материальных затрат A обеспечивает заданную матрицу конечного продукта Y:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y$$

Вводя: $S = (E - A)^{-1}$ − *матрицу полных затрат*, получим: $X = S \cdot Y$.

Коэффициенты матрицы полных затрат s_{ij} показывают, на сколько единиц увеличится валовый выпуск *i*-ой отрасли при увеличении конечного выпуска *j*-ой отрасли на одну единицу. Поэтому $s_{ii} > 1$, а $s_{ij} \in (0;\, 1)$.

Пример 2.13. Таблица содержит данные баланса трёх отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объём валовóго выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 55, 90 и 140 усл. ден. ед.

Отрасль	*Потребление*			*Конечный продукт*
	1	*2*	*3*	
Добыча и переработка углеводородов	10	25	15	50
Энергетика	30	20	15	75
Машиностроение	45	20	25	90

Решение.

Найдём исходный валовый выпуск:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i\,j} + y_i \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 + 25 + 15 + 50 = 100, \\ x_2 = 30 + 20 + 15 + 75 = 140, \\ x_3 = 45 + 20 + 25 + 90 = 180. \end{cases}$$

Матрица прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{25}{140} & \frac{15}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{140} & \frac{15}{180} \\ \frac{45}{100} & \frac{20}{140} & \frac{25}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{5}{28} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{7} & \frac{1}{12} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{7} & \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{5}{28} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{7} & \frac{1}{12} \\ \frac{9}{20} & \frac{1}{7} & \frac{5}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{5}{28} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{3}{10} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{20} & -\frac{1}{7} & \frac{31}{36} \end{pmatrix}.$$

Найдём матрицу полных затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{9}{10} & -\frac{5}{28} & -\frac{1}{12} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{12} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{9}{20} & -\frac{1}{7} & \frac{31}{36} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4880}{3797} & \frac{3340}{3\cdot 3797} & \frac{580}{3797} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1988}{3797} & \frac{4956}{3797} & \frac{672}{3797} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2880}{3797} & \frac{1404}{3797} & \frac{4824}{3797} \end{array}\right).$$

Получили: $S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4880}{3797} & \frac{3340}{3\cdot 3797} & \frac{580}{3797} \\ \frac{1988}{3797} & \frac{4956}{3797} & \frac{672}{3797} \\ \frac{2880}{3797} & \frac{1404}{3797} & \frac{4824}{3797} \end{pmatrix}$.

Новая матрица конечного продукта с учётом условия задачи: $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \\ 140 \end{pmatrix}$.

Тогда искомая матрица:

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} \frac{4880}{3797} & \frac{3340}{3\cdot 3797} & \frac{580}{3797} \\ \frac{1988}{3797} & \frac{4956}{3797} & \frac{672}{3797} \\ \frac{2880}{3797} & \frac{1404}{3797} & \frac{4824}{3797} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \\ 140 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 112 \\ 168 \\ 249 \end{pmatrix}$$

− новый валовый выпуск.

Ответ:

«Добыча и переработка углеводородов» должна выпускать 112 ед.,
«Энергетика» −168 ед.,
«Машиностроение» − 249 ед. своей продукции.

1.6. Определители и способы их вычисления

Для квадратной матрицы вводится понятие определителя (детерминанта) матрицы. Определитель квадратной матрицы – это число, которое ей сопоставляется и может быть вычислено по ее элементам в соответствии с определенными правилами. Определитель матрицы A обозначается Δ ($\det A$, $|A|$) или, если нужно выписать элементы матрицы, – прямыми чертами по бокам этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

- ***Определителем*** *матрицы* ***1-го порядка*** (т. е. матрицы, состоящей из одного элемента, одного числа) называется само *число*, составляющее заданную матрицу: $\Delta=|a_{11}|=a_{11}$.

- ***Определителем*** *матрицы* ***2-го порядка*** называется *число, вычисляемое по правилу*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

т. е. из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитается произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

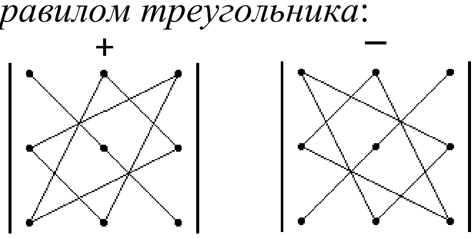
Пример 2.14. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-3) \cdot 4 = 14 + 12 = 26.$

- ***Определителем 3-го порядка,*** соответствующим матрице A, называется *число*, *вычисляемое следующим образом*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства следует брать со знаком “плюс”, а какие со знаком “минус”, полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника*:



Пример 2.15. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= 4\cdot(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 3\cdot 5 + 7\cdot 2\cdot 0 - 7\cdot(-2)\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot(-1) = 78.$$

Легко проверяются следующие ***<u>свойства определителей</u>*****.**
Величина определителя:

- не изменится, если матрицу A транспонировать, т. е. $\det A = \det A^T$;
- не изменится, если к элементам какой-либо его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число;
- меняет знак на противоположный, если поменять местами любые две его строки (или два столбца);
- увеличится в k раз, если элементы какой-либо его строки (или столбца) умножить на k, т. е. общий множитель, имеющийся в строке (или столбце), можно выносить за знак определителя;
- равна нулю, если элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю;
- равна нулю, если элементы каких-либо двух строк (или столбцов) соответственно равны.

- ***Минором*** *какого-либо* ***элемента определителя*** *называется определитель, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Минор элемента* a_{ij} *обозначается через* M_{ij}.

Например, минором элемента a_{12} определителя 3-го порядка является определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Пример 2.16. Найдем минор элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$:

$$\mathrm{M}_{21} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{5} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$$

- ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} *называется его минор, взятый со знаком* $(-1)^{i+j}$.

  Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

  Следовательно, $\mathrm{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot \mathrm{M}_{ij}$.

Например, алгебраическим дополнением элемента a_{12} определителя 3-го порядка является $\mathrm{A}_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\mathrm{M}_{23}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$.

Пример 2.17. Найдем алгебраическое дополнение элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}$ с учетом примера 1.15: $\mathrm{A}_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\mathrm{M}_{21}=-11.$

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Это <u>**свойство**</u> определителя называется ***разложением определителя по элементам*** строки (или столбца).

Для определителя 3-го порядка имеют место следующие разложения:

$$\Delta = a_{11}\mathrm{A}_{11}+a_{12}\mathrm{A}_{12}+a_{13}\mathrm{A}_{13};\quad \Delta = a_{11}\mathrm{A}_{11}+a_{21}\mathrm{A}_{21}+a_{31}\mathrm{A}_{31};$$

$$\Delta = a_{21}\mathrm{A}_{21}+a_{22}\mathrm{A}_{22}+a_{23}\mathrm{A}_{23};\quad \Delta = a_{12}\mathrm{A}_{12}+a_{22}\mathrm{A}_{22}+a_{32}\mathrm{A}_{32};$$

$$\Delta = a_{31}\mathrm{A}_{31}+a_{32}\mathrm{A}_{32}+a_{33}\mathrm{A}_{33};\quad \Delta = a_{31}\mathrm{A}_{31}+a_{23}\mathrm{A}_{23}+a_{33}\mathrm{A}_{33}.$$

Свойство разложения определителя по элементам строки (или столбца) допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка.

- ***Определителем n-го порядка***, *соответствующим квадратной матрице n-го порядка называется число, равное сумме парных произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*

- Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.
  Например, $a_{11}\mathrm{A}_{21}+a_{12}\mathrm{A}_{22}+a_{13}\mathrm{A}_{23} = 0$.

- Если *A и B* – квадратные матрицы одного и того же порядка с определителями $\det A$ *и* $\det B$, то определитель матрицы $C=AB$ равен произведению определителей перемножаемых матриц, т. е. $\det C = \det A\cdot\det B$.

Пример 2.18. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ при помощи разложения его по элементам первой строки.

Решение.

$$\Delta = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 39 = -54.$$

Если в определителе все элементы какой-либо строки (или столбца), кроме одного, равны нулю, то при вычислении определителя выгодно разложить его по элементам именно этой строки (столбца). Если же такой строки (столбца) нет, то, используя свойство 2 определителя, его можно преобразовать так, чтобы он имел такую строку (столбец).

Пример 2.19. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

разложим по элементам 3-го столбца $= -1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

разложим по элементам 2-го столбца =

$$= \begin{vmatrix} -5 & 0 & -7 \\ -4 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (20 + 7) = -54.$$

- Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.
- Определитель единичной матрицы равен 1 ($\det E = 1$).

Для вычисления определителей n-го порядка иногда оказывается полезной формула, позволяющая свести определитель n-го порядка к определителям (n–1)-го порядка, элементы которого выражены как миноры второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{2n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{31} & a_{3n-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n-1} \\ a_{n1} & a_{nn-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Предполагается, что $a_{11} \neq 0$. Если же $a_{11}=0$, то перестановкой строк и столбцов всегда можно из данного определителя получить такой, в котором $a_{11} \neq 0$.

Пример 2.20. $$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}_4 = \frac{1}{3^{4-2}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3^2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -7 & 12 \\ 12 & -6 & 9 \\ 6 & -10 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot (-50 - 112) = -54.$$

Вышеизложенное правило можно определить для «удобного» элемента $a_{ij} = 1$ с учетом множителя $(-1)^{i+j}$.

В итоге получим ***правило прямоугольника:***

- с направляющим элементом $a_{i\,j} = 1$, который определяет i-строку и j-столбец;
- элементы $a^*_{m\,n}$ нового определителя пересчитаем по формуле:

$$a_{m\,n} - a_{m\,j}a_{i\,n} = a^*_{m\,n}.$$

Пример 2.21. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение.

Найдём направляющий элемент $a_{ij} = 1$, который определяет выделяемые i-строку и j-столбец. Например, $a_{11} = 1$. Понизим порядок определителя, убирая 1-ю строку и 1-й столбец исходной таблицы чисел. Остальные элементы пересчитаем по правилу прямоугольника. При этом 4-ую строку исходной таблицы чисел, где элемент выделенного 1-го столбца $a_{41} = 0$, можно переписать.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1}_{11} & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6-3\cdot 3 & 7-3\cdot 3 & 2-3\cdot 1 & 3-3\cdot 1 \\ 3-7\cdot 3 & 6-7\cdot 3 & 2-7\cdot 1 & (-2)-7\cdot 1 \\ -4 & 7 & 2 & -5 \\ 7-(-2)\cdot 3 & 5-(-2)\cdot 3 & 1-(-2)\cdot 1 & 7-(-2)\cdot 1 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \\ -18 & -15 & -5 & -9 \\ -4 & 7 & 2 & -5 \\ 13 & 11 & 3 & 9 \end{vmatrix}=$$

Общий множитель 1-й строки (-1) вынесем за знак определителя и определим новый направляющий элемент $a_{13}=1$:

$$=-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & \mathbf{1}_{13} & 0 \\ -18 & -15 & -5 & -9 \\ -4 & 7 & 2 & -5 \\ 13 & 11 & 3 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} (-18)-(-5)\cdot 3 & (-15)-(-5)\cdot 2 & -9 \\ (-4)-2\cdot 3 & 7-2\cdot 2 & -5 \\ 13-3\cdot 3 & 11-3\cdot 2 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -5 & -9 \\ -10 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}=$$

Чтобы получить новый элемент $a_{ij}=1$, прибавим к элементам 1-й строки соответствующие элементы 3-й строки.

$$=-1\cdot\begin{vmatrix} -3+4 & -5+5 & -9+9 \\ -10 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{1}_{11} & 0 & 0 \\ -10 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}=-1\cdot(3\cdot 9-5\cdot(-5))=-1\cdot(27+25)=-52.$$

1.7. Условие существования обратной матрицы

- *Квадратная матрица называется* ***невырожденной****, если её определитель не равен нулю. В противном случае матрица называется* ***вырожденной****.*

  Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

- *Матрицей,* ***союзной*** *к матрице A, называется транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов a_{ij} данной матрицы:*

$$\text{A}^{*}=\left(\text{A}_{ij}\right)^{T}=\begin{pmatrix} \text{A}_{11} & \text{A}_{21} & \cdots & \text{A}_{n1} \\ \text{A}_{12} & \text{A}_{22} & \cdots & \text{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{A}_{1n} & \text{A}_{2n} & \cdots & \text{A}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Способы нахождения обратной матрицы	с помощью союзной матрицы $A^{-1}=\dfrac{\text{A}^{*}}{\Delta A}=\dfrac{1}{\Delta A}\cdot\begin{pmatrix} \text{A}_{11} & \text{A}_{21} & \cdots & \text{A}_{n1} \\ \text{A}_{12} & \text{A}_{22} & \cdots & \text{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{A}_{1n} & \text{A}_{2n} & \cdots & \text{A}_{nn} \end{pmatrix}$
	с помощью элементарных преобразований строк $(A\,\|\,E)=\left(\begin{array}{cccc\|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(E\,\|\,A^{-1}\right)$

Для невырожденной матрицы $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ справедливо:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\text{A}^{*}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} \text{A}_{11} & \text{A}_{21} \\ \text{A}_{12} & \text{A}_{22} \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix}.$$

Пример 2.22. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta=-2+10+18+15-3-8=30\neq 0$, обратная матрица существует.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$\text{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5;\quad \text{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;\quad \text{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=11;$$

$$\text{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5;\quad \text{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-13;\quad \text{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7;$$

$$\text{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5;\quad \text{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5;\quad \text{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5.$$

Составим союзную матрицу: $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -13 & 7 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

И, наконец, поделив каждый элемент союзной матрицы A^* на величину определителя, получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -13 & 7 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{6} & -\frac{13}{30} & \frac{7}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться в правильности вычислений, найдем произведение AA^{-1}, должна получиться единичная матрица:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{11}{30} \\ \frac{1}{6} & -\frac{13}{30} & \frac{7}{30} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -13 & 7 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

1.8. Ранг матрицы

Пусть в матрице А размерности $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($1 \leq$ k $\leq \max\{m,n\}$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы А.

- ***Минором k-го порядка матрицы*** $A_{m \times n}$ *называется определитель, составленный из элементов исходной матрицы, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов* $(0 \leq k \leq \min\{m, n\})$.

Минор элемента a_{ij}	*Минор матрицы*
Только для квадратной матрицы	*Для матрицы произвольной размерности*

Номер элемента ij определяет номер i -строки и номер j-столбца для вычеркивания	k-порядок минора определяет, сколько строк и столбцов содержит составленный определитель
M_{ij} – определен однозначно (единственным образом).	M_k – определен неоднозначно.
	Каждый элемент матрицы является ее минором 1-го порядка.

- *Если в матрице все миноры k-го порядка равны нулю, то все миноры большего порядка также равны нулю.*
- *Максимальный порядок r, отличных от нуля миноров матрицы A называется* ***рангом матрицы****.*

  Обозначение: $rg(A)$, $rang(A)$.

  Очевидно: $0 \le rg(A) \le \min(m,n)$.

- *Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется* ***базисным минором.***

  У матрицы может быть несколько базисных миноров.

  Столбцы и строки базисного минора матрицы называются **базисными.**

Задача нахождения ранга матрицы, непосредственно пользуясь определением, требует, как правило, вычисления большого количества определителей. Для удобства нахождения ранга матрицы используют метод элементарных преобразований, основанный на том, что ранг матрицы при этом не меняется.

Будем считать, что строки матрицы A линейно зависимы, если хотя бы одна из них линейно выражается через другие. Если строки матрицы линейно зависимы, то в результате элементарных преобразований в матрице появляются строки, состоящие из одних нулей – так называемые нулевые строки. Можно показать, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк, т. е. максимальному числу ненулевых строк.

- ***Ступенчатой матрицей*** *называется матрица вида* :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{ii}\neq 0 \quad i=1,2,\dots,r$$

Каждую прямоугольную матрицу с помощью элементарных преобразований над строками можно привести к ступенчатому виду.

Последовательность элементарных преобразований, приводящих матрицу A к ступенчатому виду, и сам ступенчатый вид B определены, вообще говоря, неоднозначно. Однако число ненулевых строк не зависит от способа приведения исходной матрицы к ступенчатому виду.

Свойства ранга матрицы	
	1. При транспонировании матрицы её ранг не меняется: $rg(A)=rg\left(A^T\right)$
	2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку (столбец), то ранг матрицы не изменится
	3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях: $A\sim B \;\Rightarrow\; rg(A)=rg(B)$
	4. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк

Правило вычисления ранга матрицы	1. С помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду; 2. $rg(A)$ равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы.

Пример 2.23. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

По определению $0\le k\le \min(m,n) \;\Rightarrow\; 0\le k\le \min(3,4) \;\Rightarrow\; 0\le k\le 3$.

Рассмотрим минор, получаемый в результате отбрасывания первого столбца данной матрицы (k = 3).

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10+15=5\neq 0.$$

Так как выбранный минор 3-го порядка (максимально возможного) отличен от нуля, то $rang\left(A\right)=3$.

Вычислим ранг матрицы *A,* используя метод элементарных преобразований. Поменяем местами первую и третью строки, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +1\,строка\times 2 \\ +1\,строка\times 4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 14 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\,2\,строка\times(-2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

Получили матрицу *B*, приведенную к ступенчатому виду. Число ненулевых строк матрицы *B* определяет ранг исходной матрицы:

$$rg\left(\mathrm{A}\right)=rg\left(\mathrm{B}\right)=3.$$

Пример 2.24.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь ранг матрицы равен 2 по числу получившихся ненулевых строк.

1.9. Матричные уравнения

- ***Уравнения,*** *в которых переменные есть матрицы, называются* ***матричными.***

Порядок работы с матричными уравнениями, содержащими сумму (разность) матриц и умножение матрицы на число, аналогичен порядку работы с числовыми уравнениями.

Например: $3\cdot A-B+2\cdot X=C \quad \Rightarrow \quad X=\dfrac{1}{2}\cdot\left(C-3\cdot A+B\right)$.

При нахождении неизвестного множителя произведения матриц необходимо учитывать антикоммутативный закон умножения матриц:

$A\cdot X=B$	$X\cdot A=B$

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B \qquad\qquad (X\cdot A)\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$$

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)\cdot X=A^{-1}\cdot B \qquad\qquad X\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)=B\cdot A^{-1}$$

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B \qquad\qquad X\cdot E=B\cdot A^{-1}$$

$$X=A^{-1}\cdot B \qquad\qquad X=B\cdot A^{-1}$$

Пример 2.25. Решить уравнение:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}+X+2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. Обозначим: $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Тогда исходное уравнение примет вид: $A+X+2B=C$.

Неизвестную матрицу найдем по формуле: $X=C-A-2B$.

$$X=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -10 & 3\end{pmatrix}.$$

Пример 2.26. Решить уравнение: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. Обозначим: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Тогда исходное уравнение примет вид: $X\cdot A=B$.

Неизвестную матрицу найдем по формуле: $X=B\cdot A^{-1}$.

Вычислим $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Тогда $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -4 & 5 & -2\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1.10. Матричный способ решения

систем линейных уравнений

- ***Уравнение***, *содержащее переменные* x_1, x_2, ..., x_n *только в первой степени и не имеющее произведения переменных, называют* ***линейным***.

- ***Системой линейных алгебраических уравнений (СЛУ)*** *называется совокупность, содержащая m линейных уравнений с n неизвестными*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты системы;

b_i – свободные члены;

x_j – переменные (неизвестные).

- ***Решением системы ЛУ*** *называется набор чисел* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, *которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.*

- ***Система***, *имеющая хотя бы одно решение, называется* ***совместной***. *Система, не имеющая решений, называется* ***несовместной***.

- *Если все* $b_i = 0 \quad (i = 1,..., m)$, *то* ***система*** *называется* ***однородной***.

- *Однородная система всегда имеет нулевое (**тривиальное**) решение:*

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

- *Если хотя бы одно* $b_k \neq 0$, *то* ***система*** *называется* ***неоднородной***.

Обозначим:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

– матрица коэффициентов системы (***основная матрица СЛУ***);

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

– ***расширенная матрица СЛУ***;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – ***матрица***-столбец ***неизвестных*** x_j;

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – ***матрица***-столбец ***свободных членов*** b_i.

Согласно правилу умножения матриц:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Используя определение равенства матриц, СЛУ можно записать в виде матричного уравнения: $A\cdot X=B \quad\Rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$ − решение СЛУ.

Замечание. Матричный способ применим только для случая квадратной матрицы A $(m=n)$, так как для решения необходима обратная матрица A^{-1}.

Пример 2.27. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_2-x_3=8, \\ x_1-x_2=-7, \\ 5x_1+2x_2+x_3=-13. \end{cases}$$

Решение.

В матричной форме система запишется в виде $A\cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдём основной определитель исходной системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ \mathbf{1}_{21} & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3-0\cdot(-1) & (-1)-0\cdot 0 \\ 2-5\cdot(-1) & 1-5\cdot 0 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=-10,$$

$\Delta A=-10\neq 0 \quad\Rightarrow$ существует обратная матрица A^{-1}.

Для элементов матрицы A найдём алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=7; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=5; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=15;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-10}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -5 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ 7 & 15 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}1\\ -0{,}7 & -1{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

Матрица решений:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1\\ 0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}1\\ -0{,}7 & -1{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -7\\ -13\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & -5 & 1\\ -7 & -15 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ -7\\ -13\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}1\cdot 8+5\cdot(-7)+1\cdot(-13)\\ 1\cdot 8+(-5)\cdot(-7)+1\cdot(-13)\\ -7\cdot 8+(-15)\cdot(-7)+3\cdot(-13)\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-40\\ 30\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-4$; $x_2=3$; $x_3=1$.

1.11. Правило Крамера для решения систем ЛУ

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными удобно записывать и вычислять также с помощью определителей.

Из равенства $X=A^{-1}\cdot B$ согласно правилу умножения матриц имеем:

$$X=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\ldots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\ldots+A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\ldots+A_{nn}b_n \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что

$$A_{11}b_1+A_{21}b_2+\ldots+A_{n1}b_n=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначим этот определитель Δ_1.

Аналогично определим:

$$\Delta_2=A_{12}b_1+A_{22}b_2+\ldots+A_{n2}b_n=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\Delta_n=A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\ldots+A_{nn}b_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Каждый определитель Δ_i получается из определителя системы Δ заменой его i-го столбца столбцом свободных членов.

Таким образом, матрица-столбец неизвестных принимает вид

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad \text{то есть: } x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Полученные формулы называются *формулами Крамера*, а правило для нахождения решения систем линейных уравнений с помощью формул Крамера называется соответственно *правилом Крамера*.

Пример 2.28. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-\ x_2+x_3=6, \\ \ x_1+5x_2\qquad=-3. \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Тогда: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{2}{-2} = -1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Правило Крамера для решения систем ЛУ	$\Delta \neq 0$, единственное решение	$\Delta = \Delta_j = 0$	$\begin{cases} \Delta = 0, \\ \Delta_j \neq 0 \end{cases}$
Неоднородная СЛУ	$x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$	Бесконечно много решений	Нет решений
Однородная СЛУ	(нулевое) $x_j = 0,\ \forall j = 1,...,n$	Бесконечно много решений	—

1.12. Решение СЛУ по методу Жордано-Гаусса

Дана произвольная система ЛУ: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ – расширенная матрица системы.

<u>Теорема Кронекера-Капелли:</u> *для совместности системы ЛУ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы этой системы*, то есть $rg(A) = rg(\overline{A})$.

Замечание. Если $rg(\mathrm{A}) \neq rg(\overline{\mathrm{A}})$, то система несовместна, то есть не имеет решений.

Пример 2.29. Исследовать совместность системы:

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 \qquad\quad - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$.

Приведем расширенную матрицу $\overline{A}$ к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -16 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен 3. Матрица A (до вертикальной черты) так же приведена к ступенчатому виду, но ее ранг равен 2.

Выпишем соответствующую систему: $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ 5x_4 = 0, \\ \qquad 5x_2 - \ \ x_3 - 16x_4 = 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1. \end{cases}$

Очевидно, что не существует таких чисел x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы последнее уравнение выполнялось. Значит, система несовместна.

Алгоритм метода Жорданно - Гаусса для решения систем ЛУ:

1) С помощью элементарных преобразований строк расширенную матрицу $\overline{A}$ системы приводят к ступенчатому виду:

$$\overline{A} \sim \ \dots \ \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{array}\right).$$

2) Если среди чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_m$ есть отличные от нуля, то $\Downarrow$	все числа $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$, то $\Downarrow$

$rg(A) < rg(\overline{A})$	$rg(A) = rg(\overline{A}) = r$	
$\Downarrow$ Система ЛУ несовместна	$r = n$ $\Downarrow$	$r < n$ $\Downarrow$
	Система ЛУ имеет единственное решение $\Downarrow$	Система ЛУ имеет бесчисленное множество решений $\Downarrow$
	$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \dots. \\ x_n = d_n, \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1\,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - c_{1n}\, x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2\,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - c_{2n}\, x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_n - c_{n\,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - c_{nn}\, x_n, \end{cases}$ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – – базисные переменные; $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – – свободные переменные

Пример 2.30. Найти решение системы: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 120, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -60, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Решение.

Составим расширенную матрицу исходной системы уравнений и выполним элементарные преобразования строк по правилу прямоугольника, опираясь на направляющий элемент основной матрицы $a_{22} = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 120 \\ 2 & 1 & -3 & -60 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 60 \\ 2 & 1 & -3 & -60 \\ -3 & 0 & 7 & 120 \end{array}\right)_{+1\,строка\,\times 2} \sim$$

Чтобы получить следующий направляющий элемент $a_{ij} = 1$, к элементам 3-й строки прибавим элементы 1-й строки, умноженные на 2. Выполним элементарные преобразования строк по правилу прямоугольника, опираясь на направляющий элемент основной матрицы $a_{33} = 1$.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 60 \\ 2 & 1 & -3 & -60 \\ 7 & 0 & 1 & 240 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 26 & 0 & 0 & 780 \\ 23 & 1 & 0 & 660 \\ 7 & 0 & 1 & 240 \end{array}\right)\begin{array}{l} :26 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

1-ю строку матрицы разделили на их общий множитель 26, тем самым получив следующий направляющий элемент $a_{11} = 1$.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 23 & 1 & 0 & 660 \\ 7 & 0 & 1 & 240 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right).$$

Так как ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы (количество не нулевых строк одинаково), то исходная система ЛУ имеет решение (теорема Кронекера-Капелли). Для полученной матрицы запишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 30, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -30, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 30. \end{cases}$$

Так как число переменных равно числу уравнений (=3), то система имеет единственное решение: $x_1 = 30$, $x_2 = -30$, $x_3 = 30$.

Пример 2.31. Найти решение системы: $\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ 2x - y - 5z = -15, \\ 5x + y + 4z = 19. \end{cases}$

Решение.

Выполним элементарные преобразования строк расширенной матрицы, опираясь на направляющий элемент $a_{11} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -5 & -15 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & -23 \\ 0 & -14 & 9 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-1) \\ +2-\textit{строка}\times(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 15 & 45 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :15 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&7\\0&7&0&14\\0&0&1&3\end{array}\right):7\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&7\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1,\\x_2=2,\\x_3=3.\end{cases}$$

Пример 2.32. Найти решение системы: $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4=1,\\x_1+4x_2+x_3+4x_4=14,\\4x_1-5x_2+4x_3-5x_4=-7.\end{cases}$

Решение.

Выполним элементарные преобразования строк расширенной матрицы, опираясь на направляющий элемент $a_{21}=1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&-1&1\\1&4&1&4&14\\4&-5&4&-5&-7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&-9&0&-9&-27\\1&4&1&4&14\\0&-21&0&-21&-63\end{array}\right)\begin{array}{l}:(-9)\\ \qquad\sim\\:(-21)\end{array}$$

Получим две одинаковых строки. Оставим только одну из них.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&3\\1&4&1&4&14\\0&1&0&1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&3\\1&4&1&4&14\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&1&3\\1&0&1&0&2\end{array}\right).$$

Исходная система ЛУ имеет решение, так как ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы (количество не 0-строк одинаково).

Для полученной матрицы запишем соответствующую систему ЛУ:

$$\begin{cases}0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+1\cdot x_4=3,\\1\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=2.\end{cases}$$

Так как число переменных (=4) больше числа уравнений (=2), то система имеет бесконечно много решений. В ходе преобразований расширенной матрицы направляющими были элементы a_{21} и a_{12}, номера их столбцов определили базисные переменные x_1, x_2, которые выразим через оставшиеся (свободные) переменные:

$$\begin{cases}x_2=3-x_4,\\x_1=2-x_3.\end{cases}$$

Задавая константные значения свободным переменным, получим общий вид матрицы решений: $X=\begin{pmatrix}2-c_1\\3-c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$.

Частное решение можно получить, задавая значения (любые) константам c_1, c_2. Например, $X_ч(c_1=1,\ c_2=2)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Пример 2.33. Найти фундаментальные решения системы ЛУ:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\2x_1-3x_2+4x_3+2x_4=5,\\3x_1-2x_2+5x_3+3x_4=6,\\x_1-4x_2+3x_3+x_4=4\end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\2&-3&4&2&5\\3&-2&5&3&6\\1&-4&3&1&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&-5&2&0&3\\0&-5&2&0&3\\0&-5&2&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&5&-2&0&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&-5/2&1&0&3/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&7/2&0&1&-1/2\\0&-5/2&1&0&3/2\end{array}\right).$$

$rang(\mathrm{A})=2\ \Rightarrow$ две базисные переменные.

x_1,x_3 – базисные неизвестные, x_2,x_4 – свободные неизвестные.

Получаем: $\begin{cases}x_1=-0{,}5-3{,}5c_1-c_2,\\x_2=c_1,\\x_3=1{,}5+2{,}5c_1,\\x_4=c_2.\end{cases}$ или $X=\begin{pmatrix}-0{,}5-3{,}5c_1-c_2\\c_1\\1{,}5+2{,}5c_1\\c_2\end{pmatrix}$.

Если $\begin{cases}c_1=1,\\c_2=0,\end{cases}$ то $\begin{cases}x_1=-4,\\x_3=4\end{cases}$	Если $\begin{cases}c_1=0,\\c_2=1,\end{cases}$ то $\begin{cases}x_1=-1{,}5,\\x_3=1{,}5\end{cases}$	Если $\begin{cases}c_1=0,\\c_2=0,\end{cases}$ то $\begin{cases}x_1=-0{,}5,\\x_3=1{,}5\end{cases}$

Фундаментальная система решений		Частное решение
$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X_2 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$X_{чн} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Общее решение неоднородной системы можно записать в виде:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + X_{чн} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda_1,\ \lambda_2 \in R.$$

Пример 2.34. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырьё трёх типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице. Требуется определить объём выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Вид сырья	*Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.*			*Запас сырья, вес. ед.*
	I	II	III	
1	3	8	4	250
2	5	7	9	325
3	6	5	4	220

Решение. Составим и решим систему ЛУ: $\begin{cases} 3x_1 + 8_2 + 4x_3 = 250, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 325, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 220. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 4 & 250 \\ 5 & 7 & 9 & 325 \\ 6 & 5 & 4 & 220 \end{array}\right) + 2\,строка \times (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & -75 \\ 5 & 7 & 9 & 325 \\ 6 & 5 & 4 & 220 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & -75 \\ 19 & 0 & 44 & 850 \\ 16 & 0 & 29 & 595 \end{array}\right) + 3\,строка \times (-1) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & -75 \\ 3 & 0 & 15 & 255 \\ 16 & 0 & 29 & 595 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\,2\,строка\times(-2) \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & -75 \\ 3 & 0 & 15 & 255 \\ 10 & 0 & -1 & 85 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :(-1) \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & -75 \\ 3 & 0 & 15 & 255 \\ -10 & 0 & 1 & -85 \end{array}\right)\sim$$

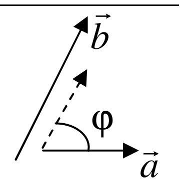
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -52 & 1 & 0 & -500 \\ 153 & 0 & 0 & 1530 \\ -10 & 0 & 1 & -85 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :153 \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -52 & 1 & 0 & -500 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & 1 & -85 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 20, \\ x_3 = 15. \end{cases}$$

Глава 2. Векторная алгебра

2.1. Геометрический вектор

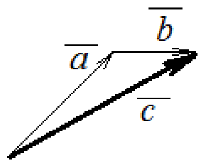
- ***Величины,*** *которые описываются только числовыми значениями, называются* ***скалярными****.*
- ***Величины,*** *которые описываются числовым значением и направлением, называются* ***векторными****.*

• ***Вектор*** *– направленный отрезок, то есть отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление*		$\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$
• ***Длиной вектора*** $\overline{AB}$ *называется длина отрезка* $\left\|AB\right\|$		$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
• ***Нулевой вектор*** *– вектор, длина которого равна нулю*		$\vec{0}$
• ***Единичный вектор*** *– вектор, длина которого равна единице*		$\vec{e}$
• ***Ортом вектора*** $\vec{a}$ *называется единичный вектор, имеющий направление вектора* $\vec{a}$ $\left(\vec{e}_{\vec{a}} \uparrow\uparrow \vec{a},\ \left\|\vec{e}_{\vec{a}}\right\| = 1\right)$		$\vec{e}_{\vec{a}}$
• ***Коллинеарными векторами*** *называются два вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых*		$\vec{a} \parallel \vec{b}$
	Сонаправленные векторы	$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
	Противоположно направленные векторы	$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
• ***Векторы****, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются* ***противоположными***		$\vec{a}\,;\ -\vec{a}$
• *Два* ***вектора*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называются* ***равными****, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину*		$\vec{a} = \vec{b}$
• ***Три вектора*** *в пространстве называются* ***компланарными****, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях*		
• ***Углом между векторами,*** *называется наименьший угол, на который необходимо повернуть один из векторов до совмещения с другим вектором по направлению.* $0 \le \varphi \le 180^\circ$		
• ***Ортогональные векторы*** *– перпендикулярные,* $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 90^\circ$		$\vec{a} \perp \vec{b}$

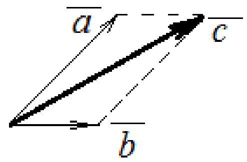
- *Ортогональные векторы единичной длины называются* ***ортонормированными.***
- ***Линейными операциями*** *над* ***векторами*** *называется сумма векторов* $\oplus$ *и умножение на число* $(\times\lambda)$.

Сумма векторов:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



правило треугольника



правило параллелограмма

Умножение вектора ***на число***: $\vec{b} = \lambda\,\vec{a}$

$|\vec{b}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $\lambda > 0$

$|\vec{b}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $\lambda < 0$

Свойства линейных операций

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность сложения
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность сложения
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
   - Вектор $(-\vec{a})$ называется ***противоположным вектору*** $\vec{a}$: $\vec{a} \uparrow\downarrow (-\vec{a})$ и $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.
7. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$
8. $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{a}$
9. $\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

- ***Действительным линейным векторным*** *пространством* $[V;\ \oplus;\ \times\lambda]$ *называется непустое множество векторов* V *с введёнными для них линейными операциями сложения и умножения на число, действующими* ***по законам****:*

1. $(\forall \vec{a}, \vec{b})\,(\exists! \vec{c})$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$;
2. $(\forall \vec{a}, \vec{b})\,(\exists! \vec{x})$: $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, вектор $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$, разность векторов;
3. $(\forall \vec{a})\,(\exists! \vec{x})$: $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$, вектор $\vec{x} = -\vec{a}$, противоположный для $\vec{a}$;
4. $(\forall \vec{a})(\forall \lambda)(\exists! \vec{c})$: $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{c}$

- *Вектор* $\vec{b}$ *называется* ***линейной комбинацией векторов*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, *если существуют числа* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *такие, что справедливо равенство*: $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_k \vec{a}_k$.

• *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *называются* ***линейно независимыми,*** *если из равенства* $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ *следует, что все* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.	ЛНЗ
• *Векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *называются* ***линейно зависимыми,*** *если для справедливости равенства* $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ *существует хотя бы одно* $\lambda_k \neq 0$	ЛЗ

Свойства

1. Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k, \vec{0}\}$, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.
2. Если система векторов содержит ЛЗ-подсистему векторов, то и исходная система векторов также ЛЗ.
3. (***критерий ЛЗ-ти***) Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ –ЛЗ тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других.
4. Два ненулевых вектор ЛЗ тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
5. Три ненулевых вектор ЛЗ тогда и только тогда, когда они компланарны.

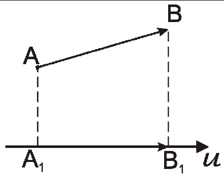
- *Если в ЛВ пространстве имеется n-ЛНЗ векторов, а любые (n+1) векторы –ЛЗ, то* ***пространство*** *называется* ***конечномерным.***

• ***Размерностью пространства*** R^n *называется максимальное число ЛНЗ векторов.*	$\dim(R^n) = n$
• ***Базисом пространства*** R^n *называется упорядоченная совокупность n ЛНЗ векторов.*	$\{\vec{e}_k\}_{k=1}^n$

пр-во R^n	$n=1$	$n=2$	$n=3$
	прямая	плоскость	тело
базис	один ненулевой вектор	два упорядоченных неколлинеарных вектора	три упорядоченных некомпланарных вектора

ЛЗ векторы	любые два и более	коллинеарные; любые три и более	компланарные; любые четыре и более

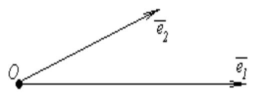
Любой вектор пространства можно разложить по базису данного пространства, притом единственным образом.

• ***Осью*** *называется прямая, имеющая направление*	$\vec{u}$
• ***Проекцией точки*** *A на ось называется основание перпендикуляра (т. A'), опущенного из неё на эту ось*	$пр_{\vec{u}}\ A$
• ***Векторной проекцией вектора*** $\overline{AB}$ *на ось называется вектор* $\overline{A'B'}$, *началом и концом которого являются проекции начала и конца исходного вектора*	
• ***Скалярной проекцией вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на ось*** $\vec{u}$ *называется число, численно равное* $\pm\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|$, *причем: «+», если* $\overrightarrow{A'B'}\uparrow\uparrow\vec{u}$; «−», *если* $\overrightarrow{A'B'}\uparrow\downarrow\vec{u}$ 	$пр_{\vec{u}}\ \overrightarrow{AB}$

Свойства	1.	$пр_u\ \vec{a} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между вектором и осью.
	2.	$пр_{\vec{u}}\ \vec{a} > 0$, если φ – острый угол; $пр_{\vec{u}}\ \vec{a} < 0$, если φ – тупой угол; $пр_{\vec{u}}\ \vec{a} = 0$, если φ – прямой угол
	3.	$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow пр_{\vec{u}}\ \vec{a} = пр_{\vec{u}}\ \vec{b}$.
	4.	$пр_{\vec{u}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{c}\right) = пр_{\vec{u}}\ \vec{a} + пр_{\vec{u}}\ \vec{b} + \ldots + пр_{\vec{u}}\ \vec{c}$.
	5.	$пр_{\vec{u}}\left(\lambda\cdot\vec{a}\right) = \lambda\cdot пр_{\vec{u}}\ \vec{a}$.

Проекция вектора $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$	$пр_{\vec{b}}\vec{a} = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\cos\varphi$, φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2.2. Декартова система координат

• ***Декартовой системой координат*** *в пространстве называется совокупность фиксированной точки и связанного с ней базиса данного пространства* 	ДСК

Фиксированная точка ДСК − ***начало системы координат.***

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, − ***оси координат.***

- *Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется* ***прямоугольной декартовой системой координат*** — ПДСК

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортонормированные векторы (орты) координатных осей OX, OY, OZ декартовой системы координат (ДСК) $O\,X\,Y\,Z$.

ось OX – ось абсцисс; ось OY – ось ординат; ось OZ – ось аппликат.

- *Косинусы углов* α, β, γ, *образованных вектором* $\vec{a}$ *с осями координат* OX, OY, OZ, *называются его* ***направляющими косинусами*** — $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

2.3. Координатный вектор в ПДСК

Любой вектор пространства можно разложить по базису данного пространства, притом единственным образом.

Координатами вектора называется упорядоченный набор чисел, взятых из разложения вектора по базису $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{n}$ своего пространства R^n: $$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{e}_n$$	$\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$
Положение произвольной точки M однозначно определяется радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, где O – начало системы координат. ***Координаты точки*** M есть координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.	$\overline{OM} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ $\Downarrow$ $M = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$	***Равенство векторов***	$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \ldots \\ a_k = b_k \end{cases}$
	Сумма (разность) векторов	$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \mp b_1;\ a_2 \mp b_2; \ldots; a_n \mp b_n\}$
	Умножение вектора ***на число***	$\lambda \cdot \vec{a} = \{\lambda \cdot a_1; \lambda \cdot a_2; \ldots; \lambda \cdot a_n\}$

$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$	***Коллинеарность двух векторов***	$\vec{a} \,\|\, \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ (координаты пропорциональны)
Вектор $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – есть ***линейная комбинация векторов*** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots \vec{a}_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$		$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_k\vec{a}_k$ $\Downarrow$ $\begin{cases} b_1=\lambda_1\cdot a_{11}+\lambda_2\cdot a_{12}+\dots+\lambda_k\cdot a_{1k}, \\ b_2=\lambda_1\cdot a_{21}+\lambda_2\cdot a_{22}+\dots+\lambda_k\cdot a_{2k} \\ \dots \\ b_n=\lambda_1\cdot a_{n1}+\lambda_2\cdot a_{n2}+\dots+\lambda_k\cdot a_{nk} \end{cases}$
Линейная зависимость векторов $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots \vec{a}_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$		$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} 0=\lambda_1\cdot a_{11}+\lambda_2\cdot a_{12}+\dots+\lambda_k\cdot a_{1k}, \\ 0=\lambda_1\cdot a_{21}+\lambda_2\cdot a_{22}+\dots+\lambda_k\cdot a_{2k}, \\ \dots \\ 0=\lambda_1\cdot a_{n1}+\lambda_2\cdot a_{n2}+\dots+\lambda_k\cdot a_{nk}. \end{cases}$ $\Downarrow$ Система имеет бесконечно много решений, то есть существует ненулевое решение $\lambda_k\neq 0$. $\Downarrow$ $rg(A)=rg(\overline{A})<k$ или $\Delta_A=0$

Линейная независимость векторов $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \dots\ \vec{a}_k=\begin{pmatrix}a_{1k}\\a_{2k}\\\dots\\a_{nk}\end{pmatrix}.$	$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0}$ $\Downarrow$ $\begin{cases}0=\lambda_1\cdot a_{11}+\lambda_2\cdot a_{12}+\dots+\lambda_k\cdot a_{1k},\\0=\lambda_1\cdot a_{21}+\lambda_2\cdot a_{22}+\dots+\lambda_k\cdot a_{2k},\\\dots\\0=\lambda_1\cdot a_{n1}+\lambda_2\cdot a_{n2}+\dots+\lambda_k\cdot a_{nk}.\end{cases}$ $\Downarrow$ Система имеет единственное нулевое решение, то есть все $\lambda_k=0$. $\Downarrow$ $rg(A)=rg(\overline{A})=k$ или $\Delta_A\neq 0$

2.4. Координатный вектор в ПДСК 3-х мерного пространства

Координаты вектора $\vec{a}=x_a\cdot\vec{i}+y_a\cdot\vec{j}+z_a\cdot\vec{k}$	$\vec{a}=\{x_a,y_a,z_a\}$
Координаты вектора $\vec{a}$ есть его скалярные проекции на соответствующие координатные оси	$x_a=np_{OX}\,\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\cos\alpha,$ $y_a=np_{OY}\,\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\cos\beta,$ $z_a=np_{OZ}\,\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\cos\gamma$
Направляющие косинусы $\vec{a}$ $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$	$\cos\alpha=\frac{x_a}{\lvert\vec{a}\rvert},\ \cos\beta=\frac{y_a}{\lvert\vec{a}\rvert},\ \cos\gamma=\frac{z_a}{\lvert\vec{a}\rvert};$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
Орт $\vec{a}=\vec{e}_{\vec{a}}$	$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$
$A(x_A,y_A,z_A),\ B(x_B,y_B,z_B)$	$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A\}$
Длина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(x_a)^2+(y_a)^2+(z_a)^2}$

Пример 2.1. Коллинеарны ли векторы

$\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$, если $\vec{a}\{-1;\ 2;-1\}$ и $\vec{b}\{2;-7;\ 1\}$?

Решение.

$$\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b} = 6\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\26\\-8\end{pmatrix};$$

$$\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-13\\4\end{pmatrix}.$$

Отношения координат равны:

$$\frac{-10}{-5} = \frac{26}{-13} = \frac{-8}{4}.$$

Следовательно, векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$ коллинеарны.

Пример 2.2. Для вектора $\vec{p}(8;32;24)$ найти линейную комбинацию векторов $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(2;3;4)$, $\vec{c}(3;4;1)$, $\vec{d}(4;1;2)$.

Решение.

Запишем искомую линейную комбинацию $\vec{p} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} + \lambda_4\vec{d}$

в координатном виде: $\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 8,\\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4 = 32,\\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 24.\end{cases}$

Полученную систему решим методом Жордано-Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 1 & 32\\ 3 & 4 & 1 & 2 & 24\end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -11 & 48\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -32\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 - 11\cdot\lambda_4 = 48,\\ 0\cdot\lambda_1 + 1\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 + 9\cdot\lambda_4 = -32,\\ 0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 - 1\cdot\lambda_4 = 8.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 48 + 11\cdot\lambda_4,\\ \lambda_2 = -32 - 9\cdot\lambda_4,\\ \lambda_3 = 8 + \lambda_4.\end{cases}$$

Общий вид матрицы решений: $\lambda = \begin{pmatrix}48 + 11c\\ -32 - 9c\\ 8 + c\\ c\end{pmatrix}.$

В частности $\lambda_ч(c=-4)=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\-4\end{pmatrix}$; *тогда* $\vec{p}=4\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}-4\vec{d}$.

Пример 2.3. В некотором базисе даны векторы $\vec{a}(1;1;4)$, $\vec{b}(-3;0;2)$, $\vec{c}(1;2;-1)$ и $\vec{d}(-13;2;18)$. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение.

1) Составим нулевую линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0} \quad \text{или} \quad \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$$

$$\text{или} \quad \begin{cases}\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=0,\\ \lambda_1+2\lambda_3=0,\\ 4\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0.\end{cases}$$

Вычислим основной определитель полученной системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1_{11} & -3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 14 & -5\end{vmatrix}=3\cdot(-5)-1\cdot 14=-29\neq 0.$$

Следовательно, составленная однородная система ЛУ имеет единственное 0-решение, то есть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы. При этом, так как их количество (=3) совпадает с размерностью пространства (3 координаты), то их упорядоченная совокупность определяет базис своего пространства.

2) Найдем координаты $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{d}$.

$$\begin{cases}\lambda_1-3\lambda_2+\lambda_3=-13,\\ \lambda_1+2\lambda_3=0,\\ 4\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=18.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -13\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 4 & 2 & -1 & 18\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 5\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=2,\\ \lambda_2=5,\\ \lambda_3=0.\end{cases}$$

Получили: $\vec{d}=2\cdot\vec{a}+5\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\{2;5;0\}$.

2.5. Произведения векторов

Скалярное произведение двух векторов, V_n

Определение	*Свойства, приложения*
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\mid\vec{a}\mid\cdot\left\mid\vec{b}\right\mid\cdot\cos\varphi=const$ где φ – угол между $\vec{a},\vec{b}$	1. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$; 2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$; 3. $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\mid\vec{a}\mid\cdot\left\mid\vec{b}\right\mid}$;
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mid\vec{a}\mid\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$	4. $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\mid\vec{b}\right\mid}$;
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b$	5. $\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$; 6. $\vec{a}^2=\mid\vec{a}\mid^2$, в частности: $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$
• *Действительное линейное* ***пространство*** $[V;\ \oplus;\ \times\lambda]$ *называется* ***евклидовым****, если в нем определена операция скалярного произведения векторов и для любых векторов выполняются* ***аксиомы****:*	1. $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ 2. $(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{z}=\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}$ 3. $(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y}=\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}),\quad\forall\lambda\in R$ 4. $\vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{x}^2\geq 0$; 5. $\vec{x}^2=0\ \Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$

Пример 2.4. Найти скалярное произведение $\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$, если

$$|\vec{a}|=2,\quad\left|\vec{b}\right|=3,\quad\vec{a}\perp\vec{b}.$$

Решение

$$\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=10\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=10\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=$$

$$=10\cdot|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\underbrace{\cos 90^\circ}_{=0}-3\cdot\left|\vec{b}\right|^2=10\cdot 2^2-3\cdot 3^2=13.$$

Пример 2.5. Найти скалярное произведение $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)$, если

$$|\vec{a}|=4,\quad\left|\vec{b}\right|=6,\quad\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\pi/3.$$

Решение

$$\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)=15\vec{a}^2-28\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}^2=$$

$$=15\cdot|\vec{a}|^2-28\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\pi/3+12\cdot|\vec{b}|^2=15\cdot4^2-28\cdot4\cdot6\cdot0{,}5+12\cdot6^2=336.$$

Пример 2.6. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$,

если $A(-1;2;-3)$, $B(3;\ 4;-6)$, $C(\ 1;\ 1;-1)$.

Решение.

Найдём координаты векторов и их длины:

$\overline{AB}=\{4;2;-3\}$, $\quad|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$;

$\overline{AC}=\{2;-1;2\}$, $\quad|\overline{AC}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(2)^2}=3.$

Тогда $\cos(\angle\overline{AB},\overline{AC})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{4\cdot2-2\cdot1-3\cdot2}{3\cdot\sqrt{29}}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \varphi=\arccos\ 0=90^\circ.$

Пример 2.7. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

Решение.

$\vec{a}(1;2;3)$, $|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};$ $\qquad\vec{b}(6;4;-2)$, $|\vec{b}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$.

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot6+2\cdot4+3\cdot(-2)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}\quad\Rightarrow\quad\varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Пример 2.8. При каком значении параметра m векторы

$\vec{a}=m\cdot\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярны.

Решение.

$\vec{a}(m;1;0)$ и $\vec{b}(3;-3;-4)$.

$\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

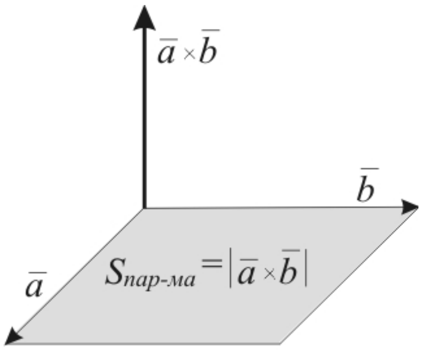
Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=3m-3=0\quad\Rightarrow m=1$.

<table>
<tr><th colspan="2">Векторное произведение двух векторов, V_3</th></tr>
<tr><th>Определение</th><th>Свойства, приложения</th></tr>
<tr><td>

$$\vec a\times\vec b=\left[\vec a,\vec b\right]=\vec c,$$

$\vec c$ удовлетворяет условиям:

1. $\vec c\perp\vec a,\ \vec c\perp\vec b$;
2. $\left|\vec c\right|=S_{\vec a,\vec b}=\left|\vec a\right|\cdot\left|\vec b\right|\cdot\sin\varphi$,
где φ – угол между $\vec a,\vec b$;
3. $\vec a,\vec b,\vec c$ образуют правую тройку



</td><td rowspan="2">

1. $\vec i\times\vec j=\vec k,\ \vec j\times\vec k=\vec i,\ \vec k\times\vec i=\vec j$;
2. $\vec a\times\vec b=-\left(\vec b\times\vec a\right)$;
3. $\left(\vec a+\vec b\right)\times\vec c=\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c$;
4. $\vec a\,||\,\vec b\iff\vec a\times\vec b=0$;
5. $S_{\text{параллелограмма}}=\left|\vec a\times\vec b\right|$;
$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\vec a\times\vec b\right|$;
6. $h_{\text{пар–ма}}=\dfrac{S_{\text{пар-ма}}}{\text{длина основания}}=\dfrac{\left|\vec a\times\vec b\right|}{\left|\vec a\right|}$

</td></tr>
<tr><td>

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\x_a&y_a&z_a\\x_b&y_b&z_b\end{vmatrix}=$$

$$=\vec i\cdot\begin{vmatrix}y_a&z_a\\y_b&z_b\end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix}x_a&z_a\\x_b&z_b\end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix}y_a&x_a\\y_b&x_b\end{vmatrix}$$

</td></tr>
</table>

Пример 2.9. Найти векторное произведение векторов

$\vec a=2\vec i+5\vec j+\vec k$ и $\vec b=\vec i+2\vec j-3\vec k$.

Решение.

По условию задачи: $\vec a(2;5;1)$ и $\vec b(1;2;-3)$.

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\2&5&1\\1&2&-3\end{vmatrix}=\vec i\cdot\begin{vmatrix}5&1\\2&-3\end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}=-17\cdot\vec i+7\cdot\vec j-\vec k.$$

В итоге: $\vec a\times\vec b=\vec c=\{-17;\ 7;-1\}$.

Пример 2.10. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}$, $|\vec{p}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{q}| = 4$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 5\pi/6$.

Решение.

Площадь параллелограмма вычисляется по формуле: $S_{\text{пар-ма}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (6\vec{p} - \vec{q}) \times (5\vec{q} + \vec{p}) = 30\vec{p} \times \vec{q} + 6\underbrace{\vec{p} \times \vec{p}}_{=0} - 5\underbrace{\vec{q} \times \vec{q}}_{=0} - \vec{q} \times \vec{p} =$$

$$= 30\vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{q} = 31\vec{p} \times \vec{q}.$$

Тогда $S_{\text{пар-ма}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 31 \cdot \left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = 31 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\angle(\vec{p}, \vec{q}) =$

$$= 31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin 5\pi/6 = 31 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 31 \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 2.11. Вычислить площадь треугольника с вершинами

$A(2;2;2)$, $B(4;0;3)$, $C(0;1;0)$.

Решение.

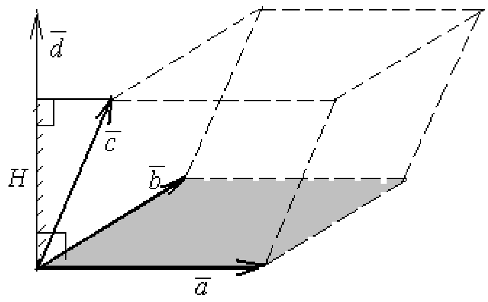
$$\overline{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{(-2;-1;-2)}\ ; \quad \overline{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{(2;-2;\ 1)}\ .$$

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}.$ *Тогда* $S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Смешанное произведение трех векторов, V_3	
Определение	*Свойства, приложения*
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = const$	1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ не меняется при циклической перестановке;

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

2. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$ меняется знак при перемене мест любых двух векторов;

3. $V_{\text{параллелепипеда}}=\left|\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$;

$V_{\text{4-й пирамиды}}=\dfrac{1}{3}\left|\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$

$V_{\text{3-й пирамиды}}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|$;

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=$$

$$=x_a\begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix}-y_a\begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix}+z_a\begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}$$

</td>
<td>

3. $H_{\text{пар-да}}=\dfrac{V_{\text{пар-да}}}{S_{\text{пар-ма}}}=\dfrac{\left|\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$;

4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$

</td>
</tr>
</table>

Пример 2.12. Компланарны ли векторы

$\vec{a}\{7;\,3;\,4\}$, $\vec{b}\{-1;\,-2;-1\}$, $\vec{c}\{4;\,2;\,4\}$?

Решение.

Три вектора компланарны (или линейно зависимы) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно 0.

Вычислим смешанное произведение, разложив определитель по элементам 1-ой строки:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=7\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-18\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны.

Пример 2.13. Доказать, что точки $A(5;7;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB} = \overline{(-2;-6;1)}, \quad \overline{AC} = \overline{(4;-3;-2)}, \quad \overline{AD} = \overline{(-4;-2;2)}.$$

Вычислим смешанное произведение полученных векторов:

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

То есть, векторы компланарны. Следовательно, *точки A, B, C* и *D лежат в одной плоскости.*

Пример 2.14. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$

Решение.

Найдем координаты векторов:

$$\overline{BA} = \overline{(-2;-3;-4)}, \quad \overline{BD} = \overline{(1;4;-3)}, \quad \overline{BC} = \overline{(4;-1;-2)}.$$

1) Вычислим объем параллелепипеда, построенного на векторах:

$$\left(\overline{BA}, \overline{BD}, \overline{BC}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 120 \quad \Rightarrow \quad V_{пар-да} = \left|\left(\overline{BA}, \overline{BD}, \overline{BC}\right)\right| = 120.$$

Тогда объем 3-угольной пирамиды:

$$V_{\text{3-й пирамиды}} = \frac{1}{6} V_{пар-да} = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

2) Для нахождения длины высоты пирамиды, опущенной из точки A на плоскость BCD, найдем сначала площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{BD}, \overline{BC}$.

$$\overline{BD} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-8-3) - \vec{j} \cdot (-2+12) + \vec{k} \cdot (-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$S_{параллелограмма} = \left|\overline{BD} \times \overline{BC}\right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}.$$

Тогда: $$H_{\text{пирамиды}} = H_{\text{пар-да}} = \frac{V_{\text{пар-да}}}{S_{\text{пар-ма}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{120 \cdot \sqrt{510}}{510} = \frac{4 \cdot \sqrt{510}}{17}.$$

Пример 2.15. По координатам вершин $A_1(-1;\ 1;3)$, $A_2(-2;\ 1;\ 1)$, $A_3(-3;\ 2;-3)$, $A_4(1;\ 3;-1)$ пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найти:

1) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3;
2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
3) объём пирамиды.

Решение.

1) Найдём координаты векторов и их длины:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\{-1;\ 0;-2\},\quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5};$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=\{-2;1;-6\},\quad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{41}.$$

Скалярное произведение:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-6\end{pmatrix}=(-1)\cdot(-2)+0\cdot1+(-2)\cdot(-6)=14.$$

Тогда: $\cos(\angle A_1A_2;A_1A_3)=\left|\cos\left(\angle\overline{A_1A}_2;\overline{A_1A}_3\right)\right|=$

$$=\frac{\left|\overline{A_1A}_2\cdot\overline{A_1A}_3\right|}{\left|A_1A_2\right|\cdot\left|A_1A_3\right|}=\frac{14}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{41}}=\frac{14}{\sqrt{205}}.$$

2) Найдём векторное произведение векторов, разложив определитель по элементам 1-ой строки:

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&-2\\-2&1&-6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0&-2\\1&-6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1&-2\\-2&-6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\-2&1\end{vmatrix}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}.$$

Тогда площадь грани $A_1A_2A_3$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{9}}{2}=1{,}5.$$

3) Найдём координаты вектора $\overline{A_1A_4}=\{2;2;-4\}$.

Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)=\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)\cdot\overline{A_1A_4}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}=4.$$

Тогда объём пирамиды: $V_{A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|=\dfrac{1}{6}\cdot4=\dfrac{2}{3}.$

2.6. Линейная модель обмена

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – национальные доходы стран $S_1, S_2, \dots, S_n$.

a_{ij} – доля национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$.

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – ***структурная матрица торговли.***

Выручка S_i страны от торговли (внутренней или внешней):

$$P_i = a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n, \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Необходимо найти такой вектор национального дохода $\vec{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, чтобы выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода: $P_i \ge x_i$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge x_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \ge x_n. \end{cases}$

Сложим соответствующие части всех неравенств:

$$\Big(\underbrace{a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}}_{=1}\Big) \cdot x_1 + \dots + \Big(\underbrace{a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}}_{=1}\Big) \cdot x_n \ge x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Или: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \ge x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Полученное неравенство определяет знак равенства, т. е. *для сбалансированной торговли необходимо, чтобы выручка от торговли каждой страны была равна её национальному доходу:* $P_i = x_i, \qquad \forall i = 1, \dots, n$.

С экономической точки зрения это утверждение означает, что *все страны одновременно не могут получить прибыль.*

Тогда исходная система неравенств вырождается в СЛУ, которая в матричной записи имеет вид: $A \cdot X = X$.

Таким образом, задача сводится к отысканию собственного вектора X (вектора национального дохода) матрицы A линейного оператора, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Пример 2.16. Найти соотношение национальных доходов трёх стран для сбалансированной торговли, если структурная матрица торговли стран имеет вид: $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A \cdot X = X \quad \Rightarrow \quad (A - E) \cdot X = \mathrm{O} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - 1\right) x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0, \\ \frac{1}{3} x_1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0, \\ \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + (0 - 1) x_3 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0, \\ \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 0, \\ \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{4} x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -8x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения воспользуемся методом Жордано-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -12 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3/2\, x_3 = 3c, \\ x_2 = 2x_3 = 4c, \\ x_3 = 2c. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{В итоге: } x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 4 : 2.$$

Библиографический список

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс. - Санкт-Петербург: Лань, 2006. - 960 с.: ил.

2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: Учебное пособие – Санкт-Петербург: Лань, 2007. - 688 с.

3. Агишева Д. К. Матрицы и их приложение к решению систем линейных уравнений: Учебное пособие/ Д. К. Агишева, С. А. Зотова, В. Б. Светличная. - Волгоград, РПК «Политехник», 2001. – 63с.

4. Александрова Л.А, Александрова В.А, Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А., Короткова Н. Н.. Математика. I часть: Учебное пособие (для студентов заочной формы обучения) / – Волгоград, РПК «Политехник», 2003. – 84с.

5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2000. – 288 с., с илл.

6. Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Рольф, 2001. – 576 с., с илл.

Электронное учебное издание

Виктория Борисовна **Светличная**
Татьяна Александровна **Матвеева**
Джамиля Алиевна **Мустафина**
Ирина Викторовна **Ребро**

Математика. Часть 1

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Н.И. Матвеева

Темплан 2017 г. Поз. № 44.
Подписано к использованию 26.12.2017 г. Формат 60×84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 3,88.

Волгоградский государственный технический университет
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул Энгельса, 42а.