Короткова Н.Н.

Целочисленное и нелинейное программирование

Волжский

2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.Н. Короткова

Целочисленное и нелинейное программирование

Электронное учебное пособие

2018

УДК 004.42(07)
ББК 32.81я73
К 687

Рецензенты:

заведующий кафедрой прикладной математики и информатики
Волжского филиала ФГАОУ ВПО ВолГУ,
канд. физ.-мат. наук, доцент
А.А. Полковников,
доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики
ИМиИТФГАОУ ВПО ВолГУ,
канд. физ.-мат. наук
А.Н. Кондрашов

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Короткова, Н.Н.

Целочисленное и нелинейное программирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Н. Короткова ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 598 КБ). – Волжский, 2018. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-2817-5

Пособие содержит теоретические сведения и примеры решения задач по темам «Целочисленное программирование» и «Нелинейное программирование».

Особое внимание уделено решению задач целочисленного и нелинейного программирования в MathCad.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия».

Ил. 17, библиограф.: 3 назв.

ISBN 978-5-9948-2817-5

Оглавление

1.1. Графический метод

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных задача может быть решена графическим методом.

В системе координат $x_1 0 x_2$ находят область допустимых решений, строят вектор С целевой функции и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению С для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты. В этой точке функция и примет наибольшее значение.

В случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к полученному экстремальному нецелочисленному решению Координаты такой точки и являются целочисленным решением. Аналогично решается задача на минимум.

Пример 1. Найти целочисленное решение задачи

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \text{ma}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$g1(x) := \frac{10 - 2x}{3} \qquad g2(x) := \frac{10 - 4x}{2}$$

$$f(x1, x2) := 4x1 + 5x2 \qquad f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 16.667 \qquad f(0,3) = 15 \qquad f(1,2) = 14$$

$$C := 10 \qquad C1 := \frac{50}{3}$$

$$f1(x) := \frac{C - 4x}{5} \qquad f2(x) := \frac{C1 - 4x}{5}$$

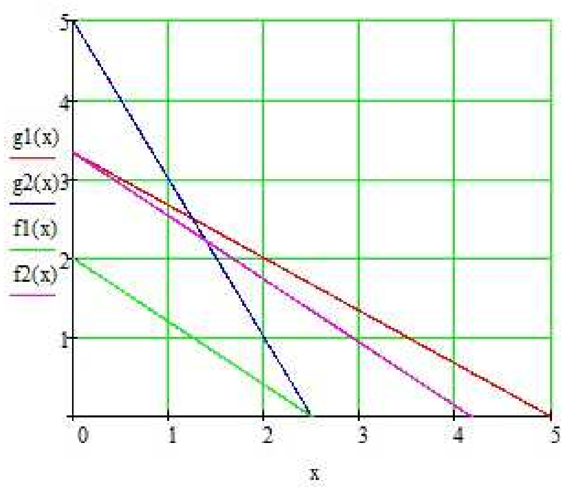

Рис.1

Решение. Построим в MathCad прямые $x_1 = 0, x_2 = 0,$ $x_2 = \dfrac{10 - 2x_1}{3}, x_2 = \dfrac{10 - 4x_1}{2}$ и получим область допустимых решений. Построив линии уровня заданной функции $f(x_1, x_2) = C$, найдем наиболее удаленную точку области, в которой функция принимает наибольшее значение. Это будет точка $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, значение функции в этой точке равно

$$f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{10}{3} = 16\frac{2}{3}.$$

Вычислив значения функции при целых значениях аргументов, принадлежащих области допустимых решений, выберем из них максимальное. Находим, что максимальное значение функции достигается в точке (0,3) и равно 15.

Ответ: $\max f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 16\frac{2}{3}$

1.2. Метод Гомори

Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана исходной задачи без учета целочисленности переменных. После того, как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонентов нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования. Если же в оптимальном плане задачи какая-либо переменная принимает дробное значение, то к системе уравнений добавляют неравенство $\sum_{j=1}^{m} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}$, где $\{\ \}$ обозначает дробную часть числа, и находят решение новой задачи. Если в найденном оптимальном плане переменные принимают нецелочисленные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяется. Проделав конечное число итераций, либо получают оптимальный план, либо устанавливают ее неразрешимость. Задача будет неразрешимой, если в строке, в которой стоит компонента решения с максимальной дробной частью стоят только целочисленные коэффициенты.

Пример 2. Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 4x_1 + 5x_2 + x_3$ при следующих ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13 \end{cases}$$

Решение. Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме).

В 1-м неравенстве вида (≤) вводим базисную переменную x_4. В 2-м неравенстве вида (≤) вводим базисную переменную x_5. В 3-м неравенстве вида (≤) вводим базисную переменную x_6.

$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 10$$

Базисные переменные – это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Экономический смысл дополнительных переменных: дополнительные переменные задачи линейного программирования обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных x_4, x_5, x_6.

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план $X_0 = \{0,0,0,10,11,13\}$ и запишем симплекс-таблицу. Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	10	3	2	0	1	0	0	5
x_5	11	1	4	0	0	1	0	11/4
x_6	13	3	3	1	0	0	1	13/3
$F(X_1)$	0	-4	-5	-1	0	0	0	

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности. Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю ($k = 2$).

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения d_i по строкам как частное: $d_i = b_i / a_{i2}$ и из них выберем наименьшее: min (10 : 2 , 11 : 4 , 13 : 3) = 11/4

Следовательно, 2-ая строка является ведущей ($r = 2$).

Разрешающий элемент равен (4) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_5 в план войдет переменная x_2.

Компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i' = \begin{cases} b_i - \left(\dfrac{b_r}{a_{rk}}\right) a_{ik} & при \quad i \neq r, \\ \dfrac{b_r}{a_{rk}} & при \quad i = r \end{cases}, \qquad a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - \left(\dfrac{a_{rj}}{a_{rk}}\right) a_{ik} & при \quad i \neq r, \\ \dfrac{a_{rj}}{a_{rk}} & при \quad i = r \end{cases}$$

Элементы последней строки этой таблицы могут быть вычислены по формулам

$$F' = F - \left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)\Delta_k, \qquad \Delta_j' = \Delta_j - \left(\frac{a_{rj}}{a_{rk}}\right)\Delta_k .$$

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
10-(11 • 2):4	3-(1 • 2):4	2-(4 • 2):4	0-(0 • 2):4	1-(0 • 2):4	0-(1 • 2):4	0-(0 • 2):4
11 : 4	1 : 4	4 : 4	0 : 4	0 : 4	1 : 4	0 : 4
13-(11 • 3):4	3-(1 • 3):4	3-(4 • 3):4	1-(0 • 3):4	0-(0 • 3):4	0-(1 • 3):4	1-(0 • 3):4
0-(11 • -5):4	-4-(1 • -5):4	-5-(4 • -5):4	-1-(0 • -5):4	0-(0 • -5):4	0-(1 • -5):4	0-(0 • -5):4

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_4	9/2	5/2	0	0	1	-1/2	0	9/5
x_2	11/4	1/4	1	0	0	1/4	0	11
x_6	19/4	9/4	0	1	0	-3/4	1	19/9
$F(X_2)$	55/4	-11/4	0	-1	0	5/4	0	

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения d_i по строкам как частное от деления: $d_i = b_i / a_{i1}$ из них выберем наименьшее: min (9/2 : 5/2 , 11/4 : 1/4 , 19/4 : 9/4) = 9/5

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (5/2) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_4 в план 2 войдет переменная x_1.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
41/2 : 5/2	5/2 : 5/2	0 : 5/2	0 : 5/2	1 : 5/2	-1/2 : 5/2	0 : 5/2
23/4-(41/2 • 1/4):5/2	1/4-(21/2 • 1/4):5/2	1-(0 • 1/4):5/2	0-(0 • 1/4):5/2	0-(1 • 1/4):5/2	1/4-(-1/2 • 1/4):5/2	0-(0 • 1/4):5/2
43/4-(41/2 • 21/4):5/2	21/4-(21/2 • 21/4):5/2	0-(0 • 21/4):5/2	1-(0 • 21/4):5/2	0-(1 • 21/4):5/2	-3/4-(-1/2 • 21/4):5/2	1-(0 • 21/4):5/2
133/4-(41/2 • -23/4):5/2	-23/4-(21/2 • -23/4):5/2	0-(0 • -23/4):5/2	-1-(0 • -23/4):5/2	0-(1 • -23/4):5/2	11/4-(-1/2 • -23/4):5/2	0-(0 • -23/4):5/2

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	min
x_1	9/5	1	0	0	2/5	-1/5	0	-
x_2	23/10	0	1	0	-1/10	3/10	0	-
x_6	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10	1	7/10
$F(X_3)$	187/10	0	0	-1	11/10	7/10	0	

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения d_i по строкам как частное от деления: $d_i = b_i / a_{i3}$ и из них выберем наименьшее: min (- , - , 7/10 : 1) = 7/10.

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план войдет переменная x_3.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	9/5	1	0	0	2/5	-1/5	0
x_2	23/10	0	1	0	-1/10	3/10	0
x_3	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10	1
$F(X_4)$	97/5	0	0	0	1/5	2/5	1

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи и получен окончательный вид симплекс-таблицы.

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 1\frac{4}{5}$, $x_2 = 2\frac{3}{10}$, $x_3 = \frac{7}{10}$, $F(X_4) = 4*1\frac{4}{5} + 5*2\frac{3}{10} + 1*\frac{7}{10} = 19\frac{2}{5}$

Но это решение не является целочисленным.

Рассмотрим теперь нахождение целочисленного решения методом Гомори.

В полученном оптимальном плане присутствуют дробные числа.

По 1-му уравнению с переменной x_1, получившей нецелочисленное значение в оптимальном плане с наибольшей дробной частью $\frac{4}{5}$, составляем дополнительное ограничение: $\sum_{j=1}^{m}\{a_{1j}\}x_j \geq \{b_1\}$

$\{a_{11}\} = \{1\} = 0$, $\{a_{12}\} = \{0\} = 0$, $\{a_{13}\} = \{0\} = 0$, $\{a_{14}\} = \{\frac{2}{5}\} = \frac{2}{5} - 0 = \frac{2}{5}$,
$\{a_{15}\} = \{-\frac{1}{5}\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$, $\{a_{16}\} = \{0\} = 0$, $\{b_1\} = \{1\frac{4}{5}\} = \frac{4}{5}$

Дополнительное ограничение имеет вид:

$\frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \geq \frac{4}{5}$

Преобразуем полученное неравенство в уравнение:

$\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5 + x_7 \leq 0$, коэффициенты которого введем дополнительной строкой в оптимальную симплексную таблицу.

Поскольку двойственный симплекс-метод используется для поиска минимума целевой функции, делаем преобразование F(x) = -F(x).

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	9/5	1	0	0	2/5	-1/5	0	0
x_2	23/10	0	1	0	-1/10	3/10	0	0
x_3	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10	1	0
x_7	-4/5	0	0	0	-2/5	-4/5	0	1

$F(X_0)$	-97/5	0	0	0	-1/5	-2/5	-1	0

1. Проверка критерия оптимальности.

План 0 в симплексной таблице является псевдопланом, поэтому определяем ведущие строку и столбец.

2. Определение новой свободной переменной.

Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольший по модулю.

Ведущей будет 4-ая строка, а переменную x_7 следует вывести из базиса.

3. Определение новой базисной переменной.

Минимальное значение θ соответствует 5-му столбцу, т.е. переменную x_5 необходимо ввести в базис.

На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент, равный (-4/5).

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	9/5	1	0	0	2/5	-1/5	0	0
x_2	23/10	0	1	0	-1/10	3/10	0	0
x_3	7/10	0	0	1	-9/10	-3/10	1	0
x_7	-4/5	0	0	0	-2/5	-4/5	0	1
$F(X_0)$	-97/5	0	0	0	-1/5	-2/5	-1	0
θ		-	-	-	-1/5 : (-2/5) = 1/2	-2/5 : (-4/5) = 1/2	-	-

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	2	1	0	0	1/2	0	0	-1/4
x_2	2	0	1	0	-1/4	0	0	3/8
x_3	1	0	0	1	-3/4	0	1	-3/8
x_5	1	0	0	0	1/2	1	0	-5/4
$F(X_1)$	-19	0	0	0	0	0	-1	-1/2

Решение получилось целочисленным.

Ответ: Оптимальный целочисленный план можно записать так: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $F(X) = 4*2+5*2+1*1=19$

1.3. Метод ветвей и границ

Предполагает вначале нахождение решения задачи максимизации без учета условия целочисленности переменных. Если полученное оптимальное решение X_0 не удовлетворяет условию целочисленности, то значение целевой функции в этой точке определяет верхнюю или нижнюю оценку искомого решения на множестве X . Если некоторая переменная x_i^0 не получила целочисленного значения, то ее следует либо уменьшить до $[x_i^0]$-целая часть x_i^0, либо увеличить до $[x_i^0]+1$. Таким образом, исходное множество X^0 разбивается на два не пересекающихся подмножества, на которых снова решаем задачу без учета целочисленности. Процесс построения дерева решений продолжается до тех пор, пока не будет найдено целочисленное решение, при котором значение целевой функции наиболее близко к полученной оценке искомого решения.

На рисунках 2-7 приведено решение примера 2 методом ветвей и границ в MathCad

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

$f(x1,x2,x3) := 4\cdot x1 + 5\cdot x2 + 1\cdot x3$

Given

$3\cdot x1 + 2\cdot x2 \le 10$

$x1 + 4\cdot x2 \le 11$

$3\cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 \ge 0 \quad x2 \ge 0$

$x3 \ge 0$

$MM := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$$MM = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$f(MM_0, MM_1, MM_2) = 19.4$

Рис.2.

variant 1--

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

$f(x1,x2,x3) := 4\cdot x1 + 5\cdot x2 + 1\cdot x3$

Given

$3\cdot x1 + 2\cdot x2 \le 10$

$x1 + 4\cdot x2 \le 11$

$3\cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x2 \ge 0$

$x3 \ge 0 \quad x1 = 1$

$MM := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$$MM = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$f(MM_0, MM_1, MM_2) = 19$

Рис.3.

variant 12-

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

$f(x1,x2,x3) := 4\cdot x1 + 5\cdot x2 + 1\cdot x3$

Given

$3\cdot x1 + 2\cdot x2 \le 10$

$x1 + 4\cdot x2 \le 11$

$3\cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 = 1 \quad x2 = 2$

$x3 \ge 0$

$MM := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$$MM = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$f(MM_0, MM_1, MM_2) = 18$

Рис.4.

variant 13-

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$

$f(x1,x2,x3) := 4\cdot x1 + 5\cdot x2 + 1\cdot x3$

Given

$3\cdot x1 + 2\cdot x2 \le 10$

$x1 + 4\cdot x2 \le 11$

$3\cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 = 1 \quad x2 = 3$

$x3 \ge 0$

$MM := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$MM = \blacksquare$

$f(MM_0, MM_1, MM_2) = \blacksquare$

Рис.5.

variant 2--

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

$f(x1, x2, x3) := 4 \cdot x1 + 5 \cdot x2 + 1 \cdot x3$

Given

$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 10$

$x1 + 4 \cdot x2 \le 11$

$3 \cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 = 2 \qquad x2 \ge 0$

$x3 \ge 0$

$MM := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$$MM = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f\left(MM_0, MM_1, MM_2\right) = 19$

Рис.6.

variant 23-

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

$f(x1, x2, x3) := 4 \cdot x1 + 5 \cdot x2 + 1 \cdot x3$

Given

$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 10$

$x1 + 4 \cdot x2 \le 11$

$3 \cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 = 2 \qquad x2 = 3$

$x3 \ge 0$

$MM := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2, x3)$

$MM = \blacksquare$

$f\left(MM_0, MM_1, MM_2\right) = \blacksquare$

Рис.7.

Ответ: Максимальное значение 19 функция принимает в точке (2,2,1).

Схематически план решения можно представить в виде дерева, которое приведено на рисунке 8.

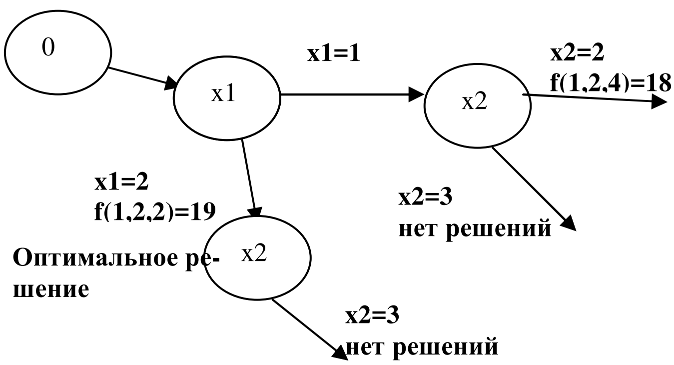

Рис.8.

Также можно получить целочисленное решение. указав, что число десятичных знаков в ответе должно быть равно 0 (Format-Result-Number Format-Number of decimal places), как показано на рисунке 9.

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

$f(x1, x2, x3) := 4 \cdot x1 + 5 \cdot x2 + 1 \cdot x3$

Given

$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 10$

$x1 + 4 \cdot x2 \le 11$

$3 \cdot x1 + 3x2 + x3 \le 13$

$x1 \ge 0 \qquad x2 \ge 0$

$x3 \ge 0$

$MM := Maximize(f, x1, x2, x3)$

$$MM = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f\left(MM_0, MM_1, MM_2\right) = 19$

Рис.9.

Глава 2. Нелинейное программирование

Во многих моделях исследования операций зависимости между постоянными и переменными факторами лишь в первом приближении можно считать линейными, более детальное рассмотрение позволяет обнаружить их нелинейность. Как правило, такие показатели, как прибыль, себестоимость, капитальные затраты на производство и др., в действительности зависят от объема производства, расхода ресурсов и т.п. нелинейно. В этом случае возникает задача нелинейного программирования.

Общая задача нелинейного программирования. В общем виде ЗНП формулируется следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), \quad (1)$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_i, \ i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $x_j \ (j = \overline{1, n})$ - управляющие переменные или решения задачи нелинейного программирования; $b_i \ (i = \overline{1, m})$ - фиксированные параметры; f, $g_i, i = \overline{1, n}$ - заданные функции от nпеременных, причем целевая функция f или (и) хотя бы одна из функций $g_i, i = \overline{1, m}$ являются нелинейными.

Решить задачу нелинейного программирования – это значит найти такие значения управляющих переменных $x_j, j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют системе ограничений (2),(3) и доставляют максимум или минимум целевой функции f.

Для задачи нелинейного программирования, в отличие от линейных задач, нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции (1) и ограничений (2) разработано несколько специальных методов решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, ряд приближенных методов решения, графический метод.

Процесс составления математической модели задачи нелинейного программирования принципиально не отличается от составления модели задачи линейного программирования. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. На m предприятиях выпускается некоторое изделие. Себестоимость единицы этого изделия на каждом из указанных предприятий равна $c_i = a_i + d_i x_i \ (i = \overline{1,m})$, где x_i - план выпуска изделия на i-м предприятии.

Предприятия должны обеспечить n потребителей с потребностями $b_j \ (j = \overline{1,n})$, стоимость перевозки от i-го предприятия к j-му потребителю равна c_{ij}.

Требуется определить такой план распределения выпуска изделия предприятиями и план перевозок его потребителям, чтобы суммарная себестоимость выпуска и стоимость перевозки была минимальной.

Математическая модель задачи. Пусть x_{ij} - план перевозок от i-го предприятия к j-му потребителю.

Для удобства запишем данные и искомые величины задач в виде таблицы:

Табл. 1

Потребители / **Предприятия**	**1**	**2**		**n**	**План выпуска изделий**
1	x_{11}	x_{12}		x_{1n}	a_1
2	x_{21}	x_{22}		x_{2n}	a_2
...					
m	x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	a_m
Потребности заказчиков	b_1	b_2		b_n	

Система ограничений задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i \\ a_i \ge 0, i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (4)$$

Целевая функция f запишется так: $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

Подставив вместо c_i равенства из условия задачи, получим:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i + \sum_{i=1}^{m} b_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (5)$$

Надо найти минимальное значение функции (5) на множестве допустимых решений (4).

Пример 4. На производство некоторого изделия расходуется два вида ткани. Определите оптимальное распределение величин тканей, если цена ткани первого вида 30 рублей, второго – 40 рублей, а всего выделено на производство 120 рублей. Известно, что из количества x_1 первого вида ткани и x_2 второго вида ткани можно получить $2x_1^{0.5} \cdot x_2^{0.5}$ единиц изделий.

Функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, выражающая зависимость между количеством вырабатываемых изделий и величиной расходуемых на него тканей, называется производственной функцией. Простейшая производственная функция для изделия, получаемого из двух различных ресурсов, имеет вид:

$$y = cx_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha},$$

где c и α - постоянные величины, причем $0 < \alpha < 1$.

Функция y выведена в предположении, что существует только два ресурса: x_1 - труд, x_2 - капитал, α указывает на соответствующую долю использования каждого из этих ресурсов; c - некоторый постоянный коэффициент; y - это количество совокупного продукта, которое при определенных технологических условиях может быть получено из данных продуктов. Функция y - простейшая производственная функция, так как рассматривает зависимость между двумя ресурсами и одним продуктом.

Математическая модель задачи. Пусть x_1 - количество ткани первого вида, x_2 - количество ткани второго вида. Система ограничений:

$$\begin{cases} 30x_1 + 40x_2 \geq 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Целевая функция:

$$f = 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \qquad (7)$$

Требуется найти наибольшее значение функции (7) на множестве решений системы (6).

Некоторые особенности решения задач нелинейного программирования

Для решения задачи нелинейного программирования существенно знать: 1) выпукло или не выпукло множество допустимых решений задачи; 2) является ли целевая функция выпуклой или вогнутой или она не относится ни к тому, ни к другому классу.

Говорят, что множество *выпукло*, если оно вместе с любыми своими точками A и B содержит и все точки отрезка AB. Примерами выпуклых множеств в пространстве могут служить сфера, пирамида, призма и т.д. В невыпуклом множестве можно указать хотя бы две такие точки, что не все точки отрезка AB принадлежат рассматриваемому множеству. Примером невыпуклого множества в пространстве является тор.

Функцию $y = f(x)$ одной переменной будем называть *выпуклой*, если отрезок, соединяющий две любые точки ее графика, принадлежит графику или расположен выше его. Функция *вогнута*, если отрезок, соединяющий две любые точки графика, принадлежит ему или расположен ниже его.

Аналогично можно сформулировать определения понятий вогнутой и выпуклой функций нескольких переменных. Говорят, что гиперповерхность $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выпуклая, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или выше ее. Гиперповерхность $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вогнута, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или ниже ее.

Пусть дана функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная на замкнутом множестве Ф. Элементами множества Ф являются точки $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Поэтому функцию $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно записать так: $z = f(\vec{x})$.

Говорят, что функция $z = f(\vec{x})$, определенная на некотором множестве X, достигает в точке $\vec{x}_0 \in X$ *локального максимума (локального минимума)*, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $\vec{x}$, удовлетворяющих неравенству $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon$, выполняется неравенство $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ ($f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$).

Точка $\vec{x}_0$, в которой функция достигает локального максимума (минимума), называется точкой локального максимума (минимума).

Пусть функция $z = f(\vec{x})$ определена на замкнутом множестве X. Если $\vec{x}_0 \in X$ и $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ ($f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) для любой точки $\vec{x} \in X$, то говорят, что в точке $\vec{x}_0$ функция достигает глобального максимума (глобального минимума).

Точка $\vec{x}^*$, в которой все частные производные функции $z = f(\vec{x})$ равны 0, называется *стационарной точкой.*

Необходимое условие экстремума. Если в точке $\vec{x}^*$ функция $z = f(\vec{x})$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю:

$$f'_{x_j}(\vec{x}^*) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Как и в случае одной переменной, необходимое условие не является достаточным для того, чтобы стационарная точка была точкой экстремума. Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 f(\vec{x})$ и равен сумме произведений частных производных второго порядка на соответствующие приращения аргументов. Если от частной производной $f'_{x_j}(\vec{x}^*)$ найти частную производную по переменной x_i, то получим частную производную второго порядка по переменным x_j, x_i, которая обозначается $f''_{x_j x_i}(\vec{x})$. В этом случае

$$d^2 f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\vec{x}) \Delta x_i \Delta x_j$$

Достаточные условия экстремума:

а) в стационарной точке $\vec{x}_0$ функция $z = f(\vec{x})$ имеет максимум, если $d^2 f(\vec{x}_0) < 0$, и минимум, если $d^2 f(\vec{x}_0) > 0$, при любых Δx_i и Δx_j, не обращающихся в нуль одновременно;

б) если $d^2 f(\vec{x}_0)$ может принимать в зависимости от Δx_i и Δx_j и положительные, и отрицательные значения, то в точке $\vec{x}_0$ экстремума нет;

в) если $d^2 f(\vec{x}_0)$ может обращаться в нуль не только при нулевых приращениях Δx_i и Δx_j, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Для функции двух переменных $z = f(x_1, x_2)$ достаточные условия не очень сложны. Существуют четыре частные производные второго порядка:

$$f''_{x_1^2}(\vec{x}),\ f''_{x_1x_2}(\vec{x}),\ f''_{x_2x_1}(\vec{x}),\ f''_{x_2^2}(\vec{x})$$

Найдем значения частных производных второго порядка в стационарной точке $\vec{x}^0(x_1^0, x_2^0)$:

$$a_{11} = f''_{x_1^2}(\vec{x}^0),\ a_{12} = f''_{x_1x_2}(\vec{x}^0),\ a_{21} = f''_{x_2x_1}(\vec{x}^0),\ a_{22} = f''_{x_2^2}(\vec{x}^0)$$

Обозначим через Δ определитель, составленный из a_{ij} *для* $i, j = 1,2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (8)$$

Тогда достаточные условия экстремума функции двух переменных имеют вид:

а) если $\Delta > 0$ и $a_{11} < 0$ ($a_{22} < 0$), то в точке $\vec{x}^0$ функция имеет максимум; если $\Delta > 0$ и $a_{11} > 0$ ($a_{22} > 0$), то в точке $\vec{x}^0$ функция имеет минимум;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума нет;

в) если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Если область Ф замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция $z = f(\vec{x})$ *достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области.*

Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $z = f(\vec{x})$ в области Ф, нужно:

1) найти все стационарные точки внутри области Ф и вычислить значения функции в них:
2) исследовать функцию на экстремум на границе области Ф;
3) сравнить значения функции, полученные в п.1 и п.2: наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области.

Граница области Ф аналитически может быть задана системой уравнений (условий) относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Поэтому, исследуя экстремальные свойства функции на границе, необходимо решить задачу определения условного экстремума.

Условный экстремум. Пусть необходимо найти экстремум функции $z = f(\vec{x})$ при условии, что переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \; i = \overline{1,m}, \; m < n \qquad (9)$$

Предполагается, что функции f и φ_i имеют непрерывные частные производные по всем переменным. Уравнения (9) называются *уравнениями связи.*

Говорят, что в точке $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, удовлетворяющей уравнениям связи (9), функция $z = f(\vec{x})$ имеет условный максимум (минимум), если неравенство $f(\vec{x}^0) \geq f(\vec{x})$ $(f(\vec{x}^0) \leq f(\vec{x}))$ имеет место для всех точек $\vec{x}$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

Для задач линейного программирования характерно следующее:

- Множество допустимых решений выпукло. Это выпуклое множество имеет конечное число вершин, называемых обычно крайними (угловыми) точками.
- Множество всех точек $[\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n]$ n-мерного пространства, в которых целевая функция принимает заданное значение, есть гиперплоскость (ли-

ния) уровня. Кроме того, гиперплоскости, соответствующие разным значениям целевой функции, параллельны.

- Локальный max или min является также глобальным max или min целевой функции на множестве допустимых решений, т.е. не существует локального оптимума целевой функции, отличного от глобального оптимума.
- Если оптимальное значение целевой функции ограничено, то, по крайней мере, одна крайняя точка множества допустимых решений является оптимальным решением. Кроме того, начав с произвольной вершины множества допустимых решений, можно достичь оптимума за конечное число шагов, причем на каждом шаге совершается переход только в соседнюю вершину. Окончательно данная вершина является оптимальной тогда и только тогда, когда значение целевой функции в ней, по крайней мере, не меньше, чем значения целевой функции во всех примыкающих вершинах.

У произвольной задачи нелинейного программирования некоторые или все приведенные выше свойства задачи линейного программирования отсутствуют. Поэтому задача нелинейного программирования гораздо сложнее задач линейного программирования и для них не существует общего универсального метода решения (аналогично симплексному методу).

2.1. Графический метод решения задачи нелинейного программирования

В задаче нелинейного программирования разыскивается наибольшее или наименьшее значение целевой функции – ее глобальный максимум или глобальный минимум. Однако целевая функция может иметь локальные экстремумы, что затрудняет решение задачи нелинейного программирования, так как большинство существующих методов нелинейного программирования не позволяет установить, является ли найденный экстремум локальным или глобальным.

Задача нелинейного программирования с двумя переменными может быть решена графически.

Графическое решение задачи может быть разбито на следующие части:

1. В прямоугольной системе координат x_1Ox_2 определяется область решений системы (2).

2. Определяется тип линий уровня целевой функции $f(x_1,x_2)=c$.

3. Находится линия уровня целевой функции с наибольшим (или наименьшим) значением уровня или устанавливается неразрешимость задачи из-за неограниченности функции на множестве решений системы (6).

4. Определяются координаты точки области решений системы (6), через которую проходит линия уровня, найденная в пункте 3.

Пример 5. Фирма реализует товар через розничную торговлю и оптом. При реализации x_1 единиц товара в розницу расходы на реализацию составляют $x_1^2+20x_1$ условных единиц, а при продаже x_2 единиц товара оптом – $x_2^2-20x_2$ таких же единиц. Найти оптимальный способ реализации 100 имеющихся единиц товара, минимизирующий суммарные расходы.

Решение. Математическая модель задачи заключается в следующем:

Найти неотрицательное решение уравнения

$$x_1+x_2=100 \qquad (x_1\geq 0, x_2\geq 0) \tag{10}$$

при котором функция

$$f=x_1^2+20x_1+x_2^2-20x_2 \tag{11}$$

принимает минимальное значение.

Так как целевая функция не является линейной, то эта задача является задачей нелинейного программирования. Найдем ее решение, используя геометрическую интерпретацию.

Так как $f=x_1^2+20x_1+x_2^2-20x_2=(x_1+10)^2+(x_2-10)^2-200$, то линиями уровня функции f являются окружности разных радиусов с центром в точке C(-10, 10), а областью допустимых решений задачи – отрезок AB прямой $x_1+x_2=100$ (рис. 10).

Если проводить эти окружности из точки C, то нетрудно догадаться, что минимальное значение функция f принимает в точке D касания окружности уровня с отрезком AB. Радиус этой окружности будет перпендикулярен прямой AB, поэтому угловой коэффициент k прямой CD равен единице: $k=1$. Следовательно, уравнение прямой CD имеет вид:

$x_2-10=x_1+10$, или $x_1-x_2=-20$.

$$x := -100, -99.99 .. 100$$

$$y(x) := 100 - x \qquad y1(x) := x + 20$$

$$C := 100$$

$$f1(x) := 10 + \sqrt{200 + C - (x+10)^2} \qquad f2(x) := 10 - \sqrt{200 + C - (x+10)^2}$$

$$C1 := 1000$$

$$f3(x) := 10 + \sqrt{200 + C1 - (x+10)^2} \qquad f4(x) := 10 - \sqrt{200 + C1 - (x+10)^2}$$

$$C2 := 4800$$

$$f5(x) := 10 + \sqrt{200 + C2 - (x+10)^2} \qquad f6(x) := 10 - \sqrt{200 + C2 - (x+10)^2}$$

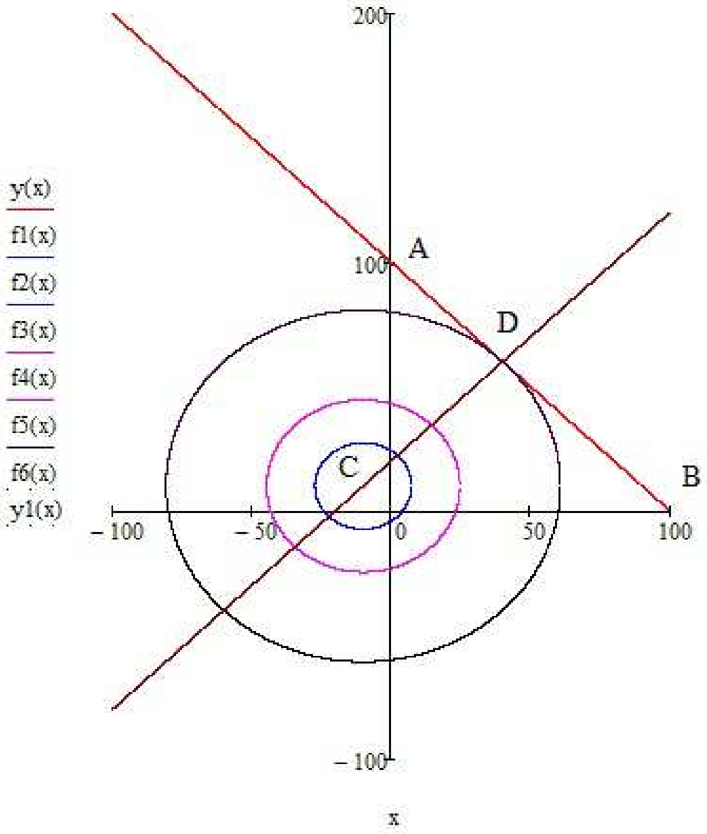

Рис.10

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -20 \\ x_1 + x_2 = 100 \end{cases},$$

находим координаты точки D: $x_1 = 40, x_2 = 60$. Значит, фирма должна продать в розницу 40 единиц товара, а оптом - 60 единиц товара, при этом суммарные расходы составят $f(40,60) = 600 + 800 + 3600 - 1200 = 4800$ условных единиц.

Ответ: $\min f(40,60) = 4800$ у.е.

Пример 6. Для пошива двух видов продукции швейная фабрика использует ткань двух типов. На изготовление единицы продукции первого вида расходуется 2 м^2 ткани первого типа и 1,5 м^2 ткани второго типа. Для изготовления единицы продукции второго вида требуется 1,5 м^2 ткани первого типа и 1 м^2 ткани второго типа. В распоряжении фабрики ежедневно имеется 300 м^2 ткани первого типа и 180 м^2 ткани второго типа. Ежедневный спрос продукцию второго вида 60 штук. Какое количество продукции каждого вида надо сшить, чтобы прибыль фабрики, определяемая функцией $f = x_2 + 80x_1 - x_1^2$, была максимальной?

Решение. Построим математическую модель. Обозначим через x_1 и x_2 запланированное количество продукции первого и второго вида. Переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1{,}5x_2 \le 300 \\ 1{,}5x_1 + x_2 \le 180 \\ x_2 \le 60 \end{cases} \qquad (12)$$

Кроме того, по смыслу задачи они должны быть неотрицательными:

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2 \ . \qquad (13)$$

Прибыль фабрики по условию определяется формулой:

$$f(x_1, x_2) = x_2 + 80x_1 - x_1^2 \qquad (14)$$

Итак, математическая модель задачи такова: найти числа x_1 и x_2, являющиеся решениями системы (12) и удовлетворяющие условию (13), при которых функция (14) имеет максимальное значение.

Так как целевая функция снова не является линейной, то эта задача, как и предыдущая, является задачей нелинейного программирования. Найдем ее решение, используя снова геометрическую интерпретацию.

Так как $f = x_2 + 80x_1 - x_1^2 = x_2 - (x_1 - 40)^2 + 1600$, то линиями уровня $f = k$ функции f являются параболы $x_2 = (x_1 - 40)^2 - 1600 + k$ с вершинами в точках с координатами $(40, x_2)$, где $x_2 = -1600 + k$.

Условия (12) и (13) определяют четырехугольник OABC (рис 11), координаты точек которого являются неотрицательными решениями системы (12).

$x := 0, 0.01 .. 150$

$y(x) := 180 - 1.5 \cdot x \qquad y1(x) := 200 - \frac{4x}{3} \qquad y2(x) := 60$

$C1 := 1620 \qquad C2 := 1640 \qquad C3 := 1660$

$par1(x) := (x - 40)^2 - 1600 + C1$

$par2(x) := (x - 40)^2 - 1600 + C2$

$par3(x) := (x - 40)^2 - 1600 + C3$

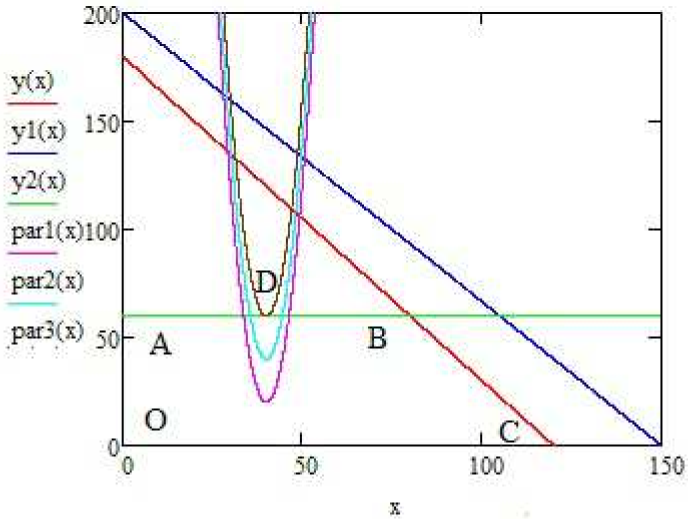

Рис.11

Поэтому функция f принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с верхней границей четырехугольника OABC. Точка D(40, 60) является точкой касания искомой параболы с прямой AB.

$\max f(40,60) = 1660$.

Ответ: $\max f(40,60) = 1660$

Так как в рассмотренных примерах точки, в которых целевая функция принимала оптимальное значение, не являлись вершинами многоугольника допустимых решений, область допустимых решений не всегда является многоугольником. Поэтому метод перебора вершин многоугольника допустимых решений задачи линейного программирования и связанный с ним симплекс-метод неприменимы для решения задач нелинейного программирования.

Пример 7. Найти неотрицательное решение системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \le 6, \end{cases} \qquad (15)$$

при котором функция $f = x_1^2 + x_2^2$ имеет наибольшее значение.

Решение. Область неотрицательных решений системы (15) состоит из двух частей – криволинейных четырехугольников ABCD и EFGH (рис. 12), ограниченных осями координат, прямыми $x_1 = 7$, $x_2 = 6$ и $x_1 + x_2 = 5$ и гиперболой $x_1 \cdot x_2 = 4$

Линиями уровня функции $f = x_1^2 + x_2^2$ = с являются окружности с центром в начале координат O(0, 0). Окружность наибольшего радиуса, имеющая общие точки с областью решений системы (8), пройдет либо через точку D, либо через точку F, так как эти точки наиболее удалены от начала координат. Найдем координаты точек D и F, решая системы

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4, \\ x_2 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 4, \\ x_1 = 7, \end{cases}$$

и получим, что $D = (2/3, 6)$ $F = (7, 4/7)$.

$$f(D) = 36\frac{4}{9}, \quad f(F) = 49\frac{16}{49},$$

следовательно, $\max f = f(F) = 49\frac{16}{49}$, $x_1^* = 7$, $x_2^* = \frac{4}{7}$.

$x := 0, 0.1 .. 7$

$y1(x) := 6$

$y2(x) := 5 - x$

$y3(x) := \frac{4}{x}$

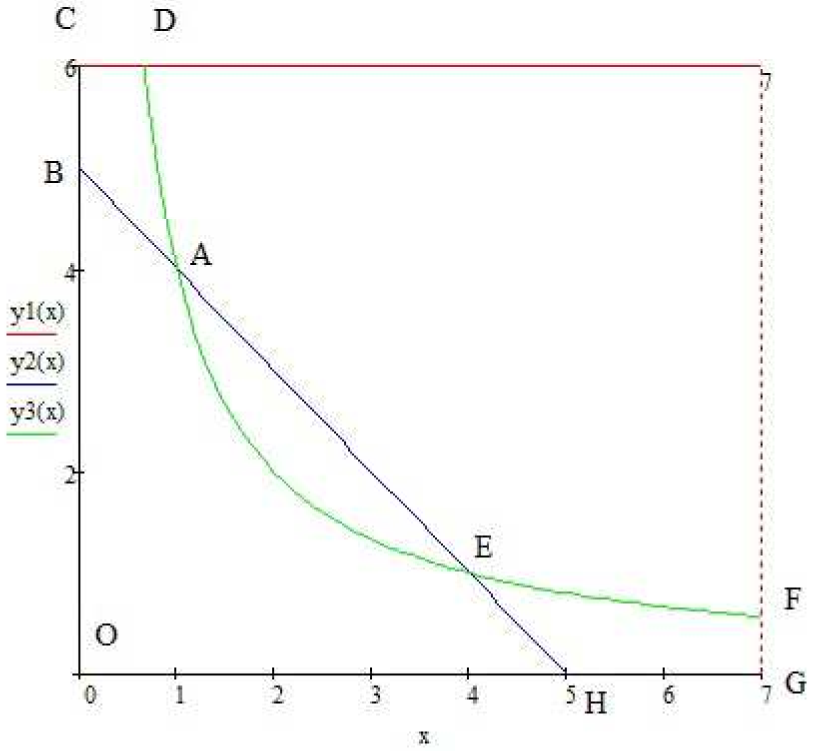

Рис.12

Ответ: $\max f\left(7, \frac{4}{7}\right) = 49\frac{16}{49}$.

2.2. Метод множителей Лагранжа

Среди задач нелинейного программирования особое место занимают задачи типа

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \max(\min) \qquad (16)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \; i = \overline{1, m}, \qquad (17)$$

для решения которых можно воспользоваться классическим методом оптимизации Лагранжа, или методом разрешающих множителей. При этом предполагают, что функции f и ϕ_i $(i = \overline{1, m})$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Можно указать следующий порядок решения задачи (16)-(17) методом множителей Лагранжа:

1) составить функцию Лагранжа:

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m)=f(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-\varphi_i(x_1,...,x_n)) \qquad (18)$$

здесь $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ - множители Лагранжа;

2)Найти частные производные функции Лагранжа по всем переменным $x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m$ и приравнять их нулю. Тем самым получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial x_j}-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}=0,\ (j=\overline{1,n})\\ \dfrac{\partial L}{\partial\lambda_i}=b_i-\varphi_i=0,\ (i=\overline{1,m})\end{cases} \qquad (19)$$

Эта система состоит из m+n уравнений. Решить эту систему (если это окажется возможным) и найти таким образом все стационарные точки функции Лагранжа;

3) из стационарных точек, взятых без координат $\lambda_1,...,\lambda_m$, выбрать точки, в которых функция f($\vec{x}$) имеет условные локальные экстремумы при наличии ограничений (17). Этот выбор осуществляется, например, с применением достаточных условий локального экстремума. Часто исследование упрощается, если использовать конкретные условия задачи.

В основе метода Лагранжа решения классической задачи оптимизации (16)-(17) лежит утверждение, что если $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $\vec{x}^{\,0}=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ имеет экстремум, то существует такой вектор $(\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_n^0)$, что точка $(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\ \lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_n^0)$ является решением системы (19). Следовательно, решая систему (19), получаем множество стационарных точек, в которых функция Z может иметь экстремальные значения. При этом, как правило, неизвестен способ определения точек глобального максимума или минимума. Однако, если решения системы найдены, то для определения глобального экстремума достаточно найти значения функции в соответствующих точках области определения.

Множителям Лагранжа можно придать следующий экономический смысл. Если $f(x_1,x_2,...,x_n)$ - доход, соответствующий плану $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, а функция $\phi_i(x_1,x_2,...,x_n)$ - издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то λ_i - цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса.

Пример 8. По плану производства продукции предприятию необходимо ежедневно производить 200 единиц продукции. Эта продукция может быть изготовлена двумя технологическими способами. Производственные затраты на изготовление n единиц продукции первым способом равны $4n+n^2$,а для второго способа - $8n+n^2$. Сколько единиц продукции надо изготовить каждым способом, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение. Обозначим число единиц продукции, изготовленных первым способом через x_1, вторым способом - x_2. Тогда суммарные затраты на изготовление продукции по плану составят:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$$

При этом общее число изделий должно быть равно 200, т.е.

$$x_1 + x_2 = 200$$

Получим математическую модель задачи:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 = 200$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Для ее расчета применим метод множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(200 - x_1 - x_2)$$

Найдем частные производные функции L по x_1, x_2, λ и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8 + 2x - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0$$

имеем систему:

$$\begin{cases} 4+2x_1-\lambda=0 \\ 8+2x_2-\lambda=0 \\ 200-x_1-x_2=0 \end{cases}$$

Исключим из этой системы λ, например, выразим λ из первого уравнения $\lambda = 4+2x_2$ и подставим найденное значение во второе уравнение системы, получим:

$$\begin{cases} 4-2x_1+2x_2=0 \\ 200-x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=101, x_2=99$$

Таким образом, по необходимому условию экстремума дифференцируемой функции, получим стационарную точку M(101,99) возможного условного экстремума функции $f(x_1,x_2)$.

Дальнейшее исследование этой точки будем проводить, как и в случае безусловного экстремума.

Найдем частные производные второго порядка:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2, a_{12}=a_{21}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=0, a_{22}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2$$

Для рассматриваемого примера производные постоянны и не зависят от значений x_1 и x_2, так как $a_{11}=2$, $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{22}=2$. Вычислим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

Так как определитель больше нуля и $a_{11}=2>0$, следовательно, в точке M(101,99) функция $f(x_1,x_2)$ имеет минимум:

$$\min f(x_1,x_2)=f(101{,}99)=4\cdot 101+101^2+8\cdot 99+99^2=21198 \text{ (ед.)}$$

Ответ: При изготовлении 101 единиц продукции первым способом и 99 единиц продукции вторым способом затраты на производство будут минимальными и равными 21198 денежным единицам.

Ранее было показано, что множители Лагранжа можно использовать при построении критериев оптимальности для задач оптимизации с ограничениями в виде равенств. Кун и Таккер обобщили этот подход на случай общей задачи нелинейного программирования с ограничениями как в виде равенств, так и виде неравенств. Рассмотрим следующую общую задачу нелинейного программирования:

Минимизировать $f(x)$ (20)

при ограничениях

$$g_j(x) \geq 0, j = 1,2,..., J \tag{21}$$

$$h_k(x) = 0, k = 1,2,..., K \tag{22}$$.

Определение. Ограничение в виде неравенства $g_j(x) \geq 0$ называется активным, или связывающим, в точке $\vec{x}$, если $g_j(\vec{x}) = 0$ и неактивным, или несвязывающим, если $g_j(\vec{x}) > 0$.

Если существует возможность обнаружить ограничения, которые неактивны в точке оптимума, до непосредственного решения задачи, то эти ограничения можно исключить из модели и тем самым уменьшить ее размеры. Основная трудность заключается при этом в идентификации неактивных ограничений, предшествующей решению задачи.

Кун и Таккер построили необходимые и достаточные условия оптимальности для задач нелинейного программирования, исходя из предположения о дифференцируемости функций f, g_j, h_k. Эти условия оптимальности, широко известны как ***Условия Куна - Таккера***, можно сформулировать в виде задачи нахождения решения некоторой системы нелинейных уравнений и неравенств, или, как иногда говорят, ***задачи Куна – Таккера***

Условия Куна-Таккера и задача Куна-Таккера:

Найти векторы x, U, V, удовлетворяющие следующим условиям:

$$grad f(x) - \sum_{j=1}^{J} U_j grad g_j(x) - \sum_{k=1}^{K} V_k grad h_k(x) = 0, \tag{23}$$

$$\begin{cases} g_j(x) \geq 0, j = 1,2,..., J \\ h_k(x) = 0, k = 1,2,..., K \\ U_j g_j(x) = 0, j = 1,2,..., J \\ U_j \geq 0, j = 1,2,..., J \end{cases} \tag{24}$$

Рассмотрим строгие формулировки необходимых и достаточных условий оптимальности решения задачи нелинейного программирования.

Теорема 1. Необходимое условие Куна – Таккера.

Рассмотрим задачу нелинейного программирования (20) – (22). Пусть f, g, h– дифференцируемые функции, а x^* - допустимое решение данной задачи. Положим $I = \{j | g_j(x^*) = 0\}$. Далее пусть $grad g_j(x^*)$ при $j \in I$ и $grad h_k(x^*)$ при $k = 1,...,K$ линейно независимы. *Если* x^* *- оптимальное решение задачи нелинейного программирования, то существует такая пара векторов* (U^*, V^*), *что* (x^*, U^*, V^*) *является решением задачи Куна – Таккера (20) – (22).*

Условие линейной независимости всегда выполняется для задач нелинейного программирования, обладающих следующими свойствами:

- все ограничения в виде равенств и неравенств содержат линейные функции;
- все ограничения в виде неравенств содержат вогнутые функции, все• ограничения-равенства – линейные функции, а также существует, по крайней мере, одна допустимая точка x, которая расположена во внутренней части области, определяемой ограничениями-неравенствами. Другими словами, существует такая точка $\vec{x}$, что $g_j(\vec{x}) > 0$ при $j = 1,2,..., J$ и $h_k(\vec{x}) = 0$ при $k = 1,2,..., K$.

Если условие линейной независимости в точке оптимума не выполняется, то задача Куна – Таккера может не иметь решения.

Пример 9. Минимизировать $f(x) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$

При ограничениях
$$\begin{aligned} g_1(x) &= (1 - x_1)^3 - x_2 \ge 0 \\ g_2(x) &= x_1 \ge 0 \\ g_3(x) &= x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$x := -1, -0.99 .. 5$ $\qquad$ $C := 4$

$y(x) := (1 - x)^3$ $\qquad$ $g1(x) := \sqrt{C - (x-3)^2}$

$g2(x) := -\sqrt{C - (x-3)^2}$

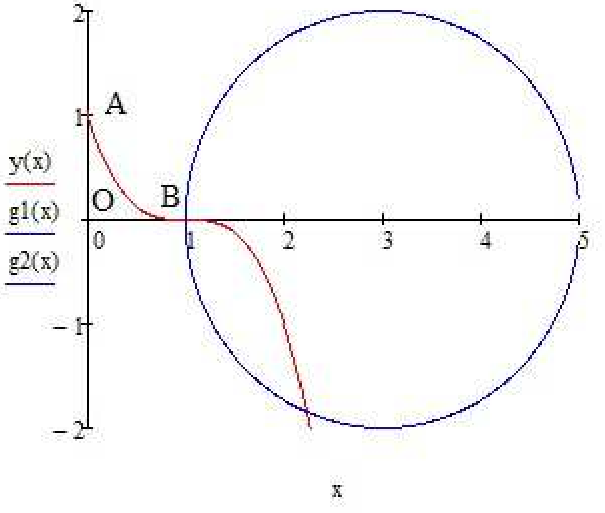

Рис.13

На рис. 13 изображена область OAB допустимых решений сформулированной задачи. Ясно, что оптимальное решение этой задачи есть $x_1 = 1, x_2 = 0, f(1{,}0) = 4, x^* = (1{,}0)$. Покажем, что условие линейной независимости не выполняется в точке оптимума.

Так как $g_1(x^*) = 0, g_2(x^*) > 0, g_3(x^*) = 0$, то $I = \{1{,}3\}$. Далее

$$grad g_1(x^*) = \{-3(1-x_1)^2;0\}_{x=x^*} = \{0;-1\},$$

$$grad g_3(x^*) = \{0;1\}$$

Эти векторы линейно зависимы, т. е. условие линейной независимости в точке $x^* = (1{,}0)$ не выполняется.

Запишем условия Куна – Таккера и проверим, выполняются ли они в точке *(1, 0)*. Условия (23) - (24) принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&2(x_1-3)-U_1\left[-3(1-x_1)^2\right]-U_2=0,\\
&2x_2-U_1(-1)-U_3=0,\\
&U_1\left[(1-x_1)^3-x_2\right]=0,\\
&U_2x_1=0,\\
&U_3x_2=0,\\
&U_1,U_2,U\geq 0
\end{aligned}
$$

При $x^*=(1{,}0)$ из первого уравнения следует, что $U_2=-4$, тогда как четвертое уравнение дает $U_2=0$. Следовательно, точка оптимума не является точкой Куна – Таккера.

Замечание. *Нарушение условия линейной независимости необязательно означает, что точка Куна – Таккера не существует.*

Теорему Куна – Таккера можно использовать для доказательства того, что заданная допустимая точка, удовлетворяющая условию линейной независимости, не является оптимальной, если она не удовлетворяет условиям Куна – Таккера. С другой стороны, если в этой точке условия Куна – Таккера выполняются, то нет гарантии, что найдено оптимальное решение нелинейной задачи. В качестве примера рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования.

Пример 10. Минимизировать $f(x)=1-x^2$

При ограничении $-1\leq x\leq 3$

Здесь $g_1(x)=x+1\geq 1, g_2(x)=3-x\geq 0$

Запишем условия Куна – Таккера:

$$
\begin{aligned}
&-2x-U_1+U_2=0,\\
&-1\leq x\leq 3,\\
&U_1(x+1)=0,\\
&U_2(3-x)=0,\\
&U_1,U_2\geq 0
\end{aligned}
$$

Так как ограничения содержат линейные функции, условие линейной независимости выполняется во всех допустимых точках. Видно, что $x=3$ – точка оптимума. Рассмотрим допустимое решение $x=2$. Для того чтобы доказать его неоптимальность, проверим выполнение полученных условий Куна – Таккера. Из четвертого и пятого уравнений следует, что $U_1=U_2=0$;

однако значения $x = 2, U_1 = U_2 = 0$ не удовлетворяют исходному уравнению. Следовательно, по *Теореме 1*, точка $x = 2$ не может быть оптимальной.

С другой стороны, решение $x = U_1 = U_2 = 0$ удовлетворяет системе всех полученных первоначально неравенств и уравнений и, следовательно, определяет точку Куна – Таккера, однако оптимальным не является. Согласно *Теореме 1*, условия Куна – Таккера должны выполняться в точке оптимума $x = 3$. Нетрудно проверить, что решение $x = 3, U_1 = 0, U_2 = 6$ удовлетворяет условиям Куна – Таккера.

Следующая теорема устанавливает условия, при выполнении которых точка Куна – Таккера автоматически соответствует оптимальному решению задачи нелинейного программирования.

Теорема 2. Достаточное условие Куна – Таккера

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

Минимизировать $f(x)$

При ограничениях

$g_j(x) \geq 0, j = 1,2,...,J$,

$h_k(x) = 0, k = 1,2,...,K$

Пусть целевая функция $f(x)$ *выпуклая, все ограничения в виде неравенств содержат вогнутые функции* $g_j(x), j = 1,2,...,J$, *а ограничения в виде равенств содержат линейные функции* $h_k(x)$, *удовлетворяющие условиям Куна – Таккера*

$$gradf(x) - \sum_{j=1}^{J} U_j gradg_j(x) - \sum_{k=1}^{K} V_k gradh_k(x) = 0,$$

$$\begin{cases} g_j(x) \geq 0, j = 1,2,...,J \\ h_k(x) = 0, k = 1,2,...,K \\ U_j g_j(x) = 0, j = 1,2,...,J \\ U_j \geq 0, j = 1,2,...,J \end{cases}$$

То x^* *- оптимальное решение задачи нелинейного программирования.*

Замечание. *Если условия теоремы 2 выполняются, то нахождение точки Куна – Таккера обеспечивает получение оптимального решения задачи нелинейного программирования. Теорему можно использовать для доказательства оптимальности данного решения.*

Пример 11. Минимизировать $f(x) = x_1^2 - x_2$

При ограничениях

$h_1(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0, g_1(x) = x_1 - 1 \geq 0, g_2(x) = 26 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$

С помощью теоремы 2 докажем, что решение $x_1^* = 1, x_2^* = 5$ является оптимальным. Имеем

$grad f(x) = \{2x_1; -1\}$,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как матрица Гессе вторых производных функции $H_f(x)$ положительно полуопределена по критерию Сильвестра при всех x, функция $f(x)$ оказывается выпуклой.

Первое ограничение в виде неравенства содержит линейную функцию $g_1(x)$, которая одновременно является как выпуклой, так и вогнутой. Для того чтобы показать, что функция $g_2(x)$ является вогнутой, вычислим

$grad g_2(x) = \{-2x_1; -2x_2\}$,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} = -2, a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, a_{22} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} = -2$$

$$H_{g2}(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Поскольку матрица Гессе $H_{g2}(x)$ отрицательно определена, функция $g_2(x)$ является вогнутой. Функция $h_1(x)$ входит в линейное ограничение в виде равенства. Следовательно, все условия *Теоремы 2* выполнены; если мы покажем, что (1,5) – точка Куна – Таккера, то действительно установим оптимальность полученного решения.

Условия Куна – Таккера для данного примера имеют вид

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - U_1 + 2x_1 U_2 - V_1 = 0,\\
&-1 + 2x_2 U_2 - V_1 = 0,\\
&x_1 - 1 \ge 0,\\
&26 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0,\\
&x_1 + x_2 - 6 = 0,\\
&U_1(x_1 - 1) = 0\\
&U_2(26 - x_1^2 - x_2^2) = 0,\\
&U_1, U_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Точка (1,5) удовлетворяет полученным ограничениям и, следовательно, является допустимой. Полученные уравнения принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&2 - U_1 + 2U_2 - V_1 = 0,\\
&-1 + 10U_2 - V_1 = 0
\end{aligned}
$$

Положив $V_1 = 0$, получим $U_2 = 0{,}1$ и $U_1 = 2{,}2$. Таким образом, решение $x^* = (1{,}5)$, $U^* = (2{,}2;0{,}1)$ и $V_1 = 0$ удовлетворяет условиям Куна – Таккера. Поскольку условия *Теоремы 2* выполнены, то $x^* = (1{,}5)$ – оптимальное решение задачи. Заметим, что существуют также и другие значения U_1, U_2, V_1, которые удовлетворяют условиям Куна – Таккера, построенным для задачи.

Замечание.

1) Для встречающихся на практике задач условие линейной независимости, как правило, выполняется. Если в задаче все функции дифференцируемы, то точку Куна – Таккера следует рассматривать как возможную точку оптимума. Таким образом, многие из методов нелинейного программирования сходятся к точке Куна – Таккера.

2) Если условия теоремы 2 выполнены, точка Куна – Таккера в то же время оказывается точкой глобального минимума. К сожалению, проверка достаточных условий весьма затруднительна, и, кроме того, прикладные задачи часто не обладают требуемыми свойствами. Следует отметить, что наличие хотя бы одного нелинейного ограничения в виде равенства приводит к нарушению предположений теоремы 2.

3) Достаточные условия, установленные теоремой 2, можно обобщить на случай задач с невыпуклыми функциями, входящими в ограничения в виде неравенств, невыпуклыми целевыми функциями и нелинейными ограничениями-равенствами.

Пример 12. Решить задачу поиска минимума и максимума функции при заданных ограничениях графически и методом множителей Лагранжа

$$f(x) = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \ge 12 \end{cases}$$

Решение. Приведем систему к виду

$$f(x) = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 + 2 \le 0 \\ x_1 + x_2 - 8 \le 0 \\ -3x_1 - x_2 + 12 \le 0 \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$F = (x_1 - 8)^2 + (x_2 - 4)^2 + U_1(x_2 - x_1 + 2 + x_3^2) + U_2(x_1 + x_2 - 8 + x_4^2) + U_3(-3x_1 - x_2 + 12 + x_5^2)$$

Вычислим частные производные от этой функции и приравняем их к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} U_2 - U_1 - 3U_3 + 2x_1 - 16 = 0 \\ U_1 + U_2 - U_3 + 2x_1 - 8 = 0 \\ 2U_1 x_3 = 0 \\ 2U_2 x_4 = 0 \\ 2U_3 x_5 = 0 \\ x_2 - x_1 + 2 + x_3^2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8 + x_4^2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + 12 + x_5^2 = 0 \end{cases}$$

Решив которую, находим точку минимума (6;2).

В этой точке значение функции $\min f(6,2) = (6-8)^2 + (2-4)^2 = 4 + 4 = 8$.

Для поиска максимума составим функцию Лагранжа

$$F=(x_1-8)^2+(x_2-4)^2+U_1(x_2-x_1+2+x_3^2)+U_2(x_1+x_2-8+x_4^2)+U_3(-3x_1-x_2+12+x_5^2)+$$
$$+U_4(-x_2+x_6^2)+U_5(-x_1+x_7^2)$$

Вычислим частные производные от этой функции и приравняем их к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} U_2-U_1-3U_3+2x_1-16=0 \\ U_1+U_2-U_3+2x_1-8=0 \\ 2U_1x_3=0 \\ 2U_2x_4=0 \\ 2U_3x_5=0 \\ 2U_4x_6=0 \\ 2U_5x_7=0 \\ x_2-x_1+2+x_3^2=0 \\ x_1+x_2-8+x_4^2=0 \\ -3x_1-x_2+12+x_5^2=0 \\ -x_2+x_6^2=0 \\ -x_1+x_7^2=0 \end{cases}$$

Решив которую, находим точку максимума (4;0).

В этой точке значение функции $\max f(4{,}0)=(4-8)^2+(0-4)^2=16+16=32$.

На рисунках 14-15 приведено решение этой задачи в MathCad.

Функция Лагранжа

$$F(x1,x2,x3,x4,x5,L1,L2,L3) := (x1-8)^2 + (x2-4)^2 + L1\cdot\left(x2 - x1 + 2 + x3^2\right) + L2\cdot\left(x1 + x2 + x4^2 - 8\right) + L3\cdot\left(-3x1 - x2 + x5^2 + 12\right)$$

$$\nabla_{x1,x2,x3,x4,x5,L1,L2,L3} F(x1,x2,x3,x4,x5,L1,L2,L3) \rightarrow \begin{pmatrix} L2 - L1 - 3\cdot L3 + 2\cdot x1 - 16 \\ L1 + L2 - L3 + 2\cdot x2 - 8 \\ 2\cdot L1\cdot x3 \\ 2\cdot L2\cdot x4 \\ 2\cdot L3\cdot x5 \\ x3^2 - x1 + x2 + 2 \\ x4^2 + x1 + x2 - 8 \\ x5^2 - 3\cdot x1 - x2 + 12 \end{pmatrix}$$

Начальные приближения

$x2 := 0 \quad x3 := 1$

$x1 := 0 \quad x4 := 1 \quad L3 := 1$

$x5 := 1 \quad L2 := 1$

$L1 := 1$

Ограничения

Given

$L2 - L1 - 3\cdot L3 + 2\cdot x1 - 16 = 0$

$L1 + L2 - L3 + 2\cdot x2 - 8 = 0$

$2\cdot L1\cdot x3 = 0$

$x3^2 - x1 + x2 + 2 = 0$

$2\cdot L2\cdot x4 = 0$

$x4^2 + x1 + x2 - 8 = 0$

$2\cdot L3\cdot x5 = 0$

$x5^2 - 3\cdot x1 - x2 + 12 = 0$

$x := \text{Minerr}(x1,x2,x3,x4,x5,L1,L2,L3)$

Ответ

$x_0 = 6 \qquad x_1 = 2$

Рис.14

$$F(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,L1,L2,L3,L4,L5) := -\left[(x1-8)^2+(x2-4)^2\right] + L1\cdot\left(x2-x1+2+x3^2\right) + L2\cdot\left(x1+x2+x4^2-8\right) + L3\cdot\left(-3\cdot x1-x2+x5^2+12\right) + L4\cdot\left(-x2+x6^2\right)$$

$$\nabla_{x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,L1,L2,L3,L4,L5} F(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,L1,L2,L3,L4,L5) \rightarrow \begin{pmatrix} L2-L1-3\cdot L3-L5-2\cdot x1+16 \\ L1+L2-L3-L4-2\cdot x2+8 \\ 2\cdot L1\cdot x3 \\ 2\cdot L2\cdot x4 \\ 2\cdot L3\cdot x5 \\ 2\cdot L4\cdot x6 \\ 2\cdot L5\cdot x7 \\ x3^2-x1+x2+2 \\ x4^2+x1+x2-8 \\ x5^2-3\cdot x1-x2+12 \\ x6^2-x2 \\ x7^2-x1 \end{pmatrix}$$

$x2 := 0$ $x3 := 1$ $L4 := 1$ $L2 := 1$ $L5 := 1$

$x1 := 6$ $x4 := 1$ $x5 := 1$ $x6 := 1$ $L3 := 1$ $L6 := 1$

$L1 := 1$ $x7 := 1$

Given

$L2-L1-3\cdot L3-L5-2\cdot x1+16 = 0$

$L1+L2-L3-L4-2\cdot x2+8 = 0$

$x3^2-x1+x2+2 = 0$ $2\cdot L1\cdot x3 = 0$

$x4^2+x1+x2-8 = 0$ $2\cdot L2\cdot x4 = 0$

$x5^2-3\cdot x1-x2+12 = 0$ $2\cdot L3\cdot x5 = 0$ $2\cdot L4\cdot x6 = 0$ $2\cdot L5\cdot x7 = 0$

$x6^2-x2 = 0$ $x7^2-x1 = 0$

$x := \mathrm{Minerr}(x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,L1,L2,L3,L4,L5)$

Ответ

$x_0 = 4$ $x_1 = 0$

Рис.15

Решим эту задачу графически. Областью допустимых решений является четырехугольник ABCD.

Найдем минимум

$$x := 0, 0.001 .. 15$$

$$y1(x) := x - 2 \qquad y2(x) := 8 - x \qquad y3(x) := 12 - 3x$$

$$g1(x) := 4 + \sqrt{8 - (x - 8)^2} \qquad g2(x) := 4 - \sqrt{8 - (x - 8)^2}$$

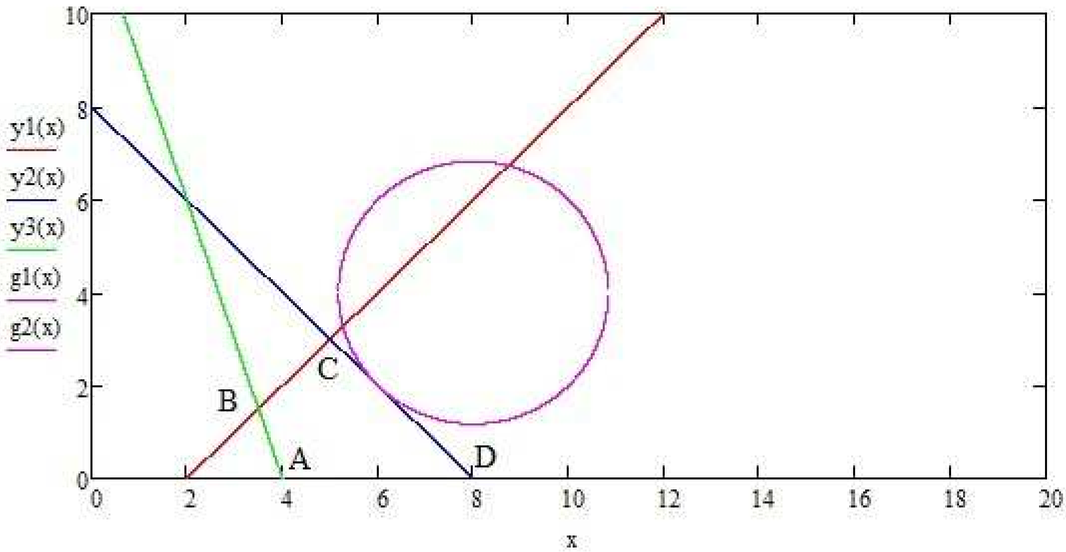

Рис.16

Находим $\min f(6,2) = (6-8)^2 + (2-4)^2 = 4 + 4 = 8$

Найдем максимум

$x := 0, 0.001 .. 15$

$y1(x) := x - 2 \quad y2(x) := 8 - x \quad y3(x) := 12 - 3x$

$C := 32$

$g1(x) := 4 + \sqrt{C - (x-8)^2} \qquad g2(x) := 4 - \sqrt{C - (x-8)^2}$

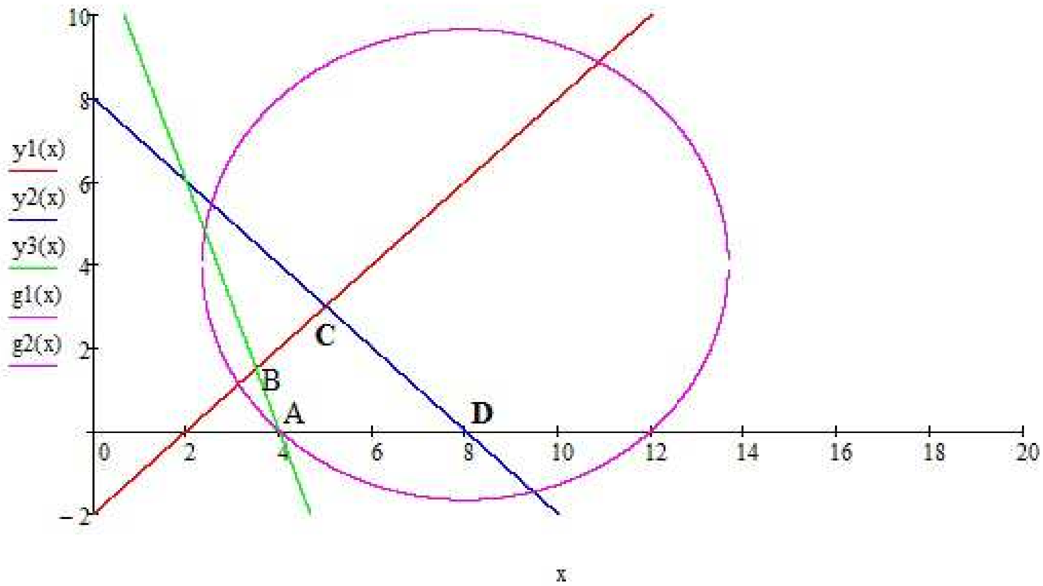

Рис.17

Находим $\max f(4{,}0) = (4-8)^2 + (0-4)^2 = 16 + 16 = 32$

Ответ: $\min f(6{,}2) = 8$, $\max f(4{,}0) = 32$

Литература:

1. Короткова, Н. Н. Целочисленное программирование методические указания к лабораторной работе. / Н. Н. Короткова. - Волгоград: ВолгГТУ, 2017. – 15 с.

2. Методы оптимальных решений в экономике и финансах. : учебник / коллектив авторов ; под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. — 2-е изд., стер. –М. : КноРус, 2016. — 400 с. – (Бакалавриат).

3. Писарук, Н. Н. Исследование операций / Н. Н. Писарук. - Минск : БГУ, 2015. - 304 с.

Электронное учебное издание

Неля Николаевна **Короткова**

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2018 г. Поз. № 12.
Подписано к использованию 28.03.2018. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 3,0.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.