Светличная В.Б., Матвеева Т.А.,

Мустафина Д.А., Ребро И.В.

Математика

Часть 2

Волжский

2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева
Д.А.Мустафина, И.В. Ребро

МАТЕМАТИКА

Часть 2

Электронное учебное пособие

2018

УДК 51(07)
ББК 22.1я73
М 34

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент, филиала ГОУВПО «Московский энергетический институт (технический университет)»
Капля Е.В.,
кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика» ВГИ (филиал) Волгоградского государственного университета.
Полковников А. А.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Светличная, В.Б.
Математика. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева, Д.А. Мустафина, И.В. Ребро ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 679 КБ). – Волжский, 2018 г. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9948-2810-6

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал и большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия по учебной дисциплине «Математика», включающей разделы аналитической геометрии и линейные векторные пространства. В пособие содержится много практического материала. Приведены таблицы, в которых систематизированы основные свойства и алгоритмы для практического применения.

Учебное пособие рассчитано на студентов технических высших учебных заведений, обучающихся по программе бакалавров различных форм обучения в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования.

Библиограф.: 6 назв.

ISBN 978-5-9948-2810-6

Оглавление

Глава 1. Линейное векторное пространство

1.1. Линейное векторное пространство

Пусть V – непустое множество (его элементы будем называть векторами и обозначать $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$), в котором установлены правила сложения и умножения на число:

1. $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \exists\ \bar{z} \in V$: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z}$;
2. $\forall\ \bar{x} \in V;\ \forall\ \alpha \in R \quad \exists\ \bar{y} \in V$: $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{y}$.

Действительное линейное векторное пространство $[V;\ \oplus;\ \times\lambda]$ – непустое множество векторов V, для элементов которого определены операции сложения, умножения на число и выполняются аксиомы:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (коммутативность);
2. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V \quad (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (ассоциативность);
3. $\exists\ \bar{0}: \quad \bar{x} + \bar{0} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V$ (существование нулевого вектора);
4. $\forall\ \bar{x} \in V\ \ \exists (-\bar{x}) \in V: \ \bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$ (существование противоположного вектора);
5. $\forall \bar{x} \in V \quad 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;
6. $\forall \bar{x} \in V \quad \alpha(\beta \bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}, \quad \forall \alpha, \beta \in R$;
7. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}, \quad \forall \alpha \in R$;
8. $\forall \bar{x} \in V \quad (\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}, \quad \forall \alpha, \beta \in R$.

Множество $V' \subset V$ называется ***подпространством*** линейного пространства V, если

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V' \quad \Rightarrow \quad \bar{x} + \bar{y} \in V'$;
2. $\forall \bar{x} \in V'; \forall \alpha \in R \ \Rightarrow \ \alpha \cdot \bar{x} \in V'$.

Действительное линейное пространство E называется ***евклидовым***, если в нем определена операция скалярного произведения векторов $\bar{x} \cdot \bar{y} \in R$ и выполняются аксиомы:

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$;
2. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E \quad (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$;
3. $\forall \bar{x} \in E \quad (\lambda \bar{x}) \cdot \bar{y} = \lambda (\bar{x} \cdot \bar{y}), \quad \forall \lambda \in R$;
4. $\forall \bar{x} \in E \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x}^2 \geq 0; \quad \bar{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

1.2. Линейные операторы линейного пространства

- *В линейном пространстве V задано* ***оператор (преобразование, отображение)*** $\tilde{A}$*, если по некоторому правилу произвольному вектору* $\vec{x}\in V$ *ставится в соответствие единственный вектор* $\vec{y}\in V$*:*

$$\tilde{A}(\vec{x})=\vec{y}.$$

- *Преобразование* $\tilde{A}: V\to V$ называется ***линейным*** (ЛП), *если*:

$$(\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2\in V):\ \tilde{A}(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=\alpha\cdot\tilde{A}(\vec{x}_1)+\beta\cdot\tilde{A}(\vec{x}_2).$$

Действия над ЛП

1. ***Сумма линейных операторов*** есть линейный оператор, определяемый соотношением:
$\tilde{A}(\vec{x})+\tilde{B}(\vec{x})=(\tilde{A}+\tilde{B})(\vec{x})$.
2. ***Произведение*** *(композиция)* ***операторов*** $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ есть линейный оператор, определяемый соотношением:
$\tilde{B}(\tilde{A}(\vec{x}))=(\tilde{B}\tilde{A})(\vec{x})$.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – базис *n*-мерного пространства *V*;

$\tilde{A}(\vec{e}_1), \tilde{A}(\vec{e}_2), \ldots, \tilde{A}(\vec{e}_n)$ – образы – также векторы этого пространства *V*, следовательно, их можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\begin{cases} \vec{e}_1'=\tilde{A}(\vec{e}_1)=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\ldots+a_{n1}\vec{e}_n,\\ \vec{e}_2'=\tilde{A}(\vec{e}_2)=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\ldots+a_{n2}\vec{e}_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{e}_n'=\tilde{A}(\vec{e}_n)=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\ldots+a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица линейного преобразования, столбцы которой являются координатами образов базисных векторов – $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$.

$\vec{x}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}=$
$=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n$
– вектор пространства *V*

Образ вектора $\tilde{A}(\vec{x})=\vec{y}\in V$:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Координаты образа вектора однозначно определяются матрицей A линейного преобразования: $Y=A\cdot X$.

- *Действия над линейными преобразованиями сводятся к соответствующим действиям над их матрицами.*
- *ЛП называется* ***невырожденным****, если его матрица невырожденная* ($\Delta A \neq 0$).
- *Пусть задано невырожденное линейное преобразование, задаваемого матрицей* A*:* $Y = A \cdot X$, $\Delta A \neq 0$. *Тогда умножив обе части равенства на* A^{-1} *слева, получим* $X = A^{-1} Y$ *– формулу* ***обратного преобразования.***
- *ЛП называется* ***тождественным,*** *если оно преобразует элемент линейного пространства сам в себя:* $E \cdot X = X$, E *– единичная матрица.*

1.3. Собственный вектор и собственное значение ЛП

- *Всякий вектор* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *называется* ***собственным вектором*** *ЛП,*

если $\tilde{A}(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$ (или $A \cdot X = \lambda \cdot X$),

где λ *– некоторое число, называемое* ***собственным числом*** *ЛП.*

Собственный вектор характеризуется тем, что при линейном преобразовании переходит в коллинеарный ему вектор.

Свойства

1. Собственный вектор ЛП имеет единственное собственное число.
2. Если $\vec{x}$ – собственный вектор ЛП, то любой коллинеарный ему вектор $\vec{y}$ тоже будет собственным вектором ЛП с тем же собственным числом.
3. Если $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – собственные векторы ЛП с собственным числом λ, то $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$ – собственный вектор с собственным числом λ.
4. Если $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – собственные векторы ЛП с собственными числами λ_1, λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – ЛНЗ.

Собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *– корни* ***характеристического уравнения:***

$\det(A - \lambda E) = 0$, *где* A *– матрица ЛП,* E *– единичная матрица*

$$\text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

- *Определитель* $|A-\lambda\cdot E|$ *является многочленом относительно неизвестной* λ *и называется* ***характеристическим многочленом ЛП.***
- *Характеристический многочлен преобразования не зависит от выбора базиса.*

Для каждого собственного числа λ_0 соответствующие собственные векторы могут быть найдены из матричного уравнения $(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{E})\cdot\vec{x}=0$ или соответствующей ему системы уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n = 0, \\ a_{21}\,x_1 + (a_{22}-\lambda_0)x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda_0)\,x_n = 0. \end{cases}$$

Диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = A^*$ определяет ЛП в новом базисе из собственных векторов.

Пример 1.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора:

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

a) Составим и решим характеристическое уравнение $|\mathrm{A}-\lambda\cdot\mathrm{E}|=0$, разложив определитель по элементам 1-ой строки:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4-\lambda \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 71\lambda - 105 = 0.$$

Найдём корни уравнения по схеме Горнера.

Одним из делителей свободного числа 105 является число 5. Проверим его:

	1	-15	71	-105
5	1	$5\cdot 1 + (-15) = -10$	$5\cdot(-10) + 71 = 21$	$5\cdot 21 + (-105) = 0$

Так как в результате получили ноль, то уравнение представимо в виде:

$$(\lambda-5)\cdot(\lambda^2 - 10\lambda + 21) = 0$$

$$\lambda - 5 = 0 \text{ или } \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 7,\ \lambda_3 = 3 \ - \text{собственные числа.}$$

Соответствующие собственные векторы найдём, решая систему:

$$\begin{cases} (5-\lambda)\cdot x_1 - 1\cdot x_2 - 1\cdot x_3 = 0, \\ -2\cdot x_1 + (4-\lambda)\cdot x_2 - 1\cdot x_3 = 0, \\ -2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + (6-\lambda)\cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

1) При собственном числе $\lambda_1 = 5$ система примет вид:

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ -2\cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ 2\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2\cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :2 \\ :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Т. о., $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix}$ − искомый собственный вектор при любом c.

2) При собственном числе $\lambda_2 = 7$ система примет вид:

$$\begin{cases} -2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0, \\ -2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0, \\ -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ :2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0_1, \\ x_3 = -2x_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -2c. \end{cases}$$

Т. о., $\vec{e}_2 = (c;\, 0; -2c)$ − второй искомый собственный вектор при любом c.

3) При собственном числе $\lambda_3 = 3$ система примет вид:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0, \\ -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 0, \\ -2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & \bar{0} \\ 2 & -1 & 1 & \bar{0} \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = 2c, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Т. о., $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix}$ − третий искомый собственный вектор при любом c.

В итоге: $\vec{e}_{\lambda=3} = (c;\ 2c;\ 0)$; $\vec{e}_{\lambda=5} = (0; -c;\ c)$; $\vec{e}_{\lambda=7} = (c;\ 0; -2c)$.

b) Составим и решим характеристическое уравнение $|\,\mathrm{A} - \lambda \cdot \mathrm{E}\,| = 0$, разложив определитель по элементам 1-ой строки:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель 1-го и 3-го слагаемых по элементам 2-й строки; 2-го и 4-го слагаемых по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda^2 - 2\lambda\right);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot(1-\lambda) = \lambda;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1\cdot\left((1-\lambda)^2 - 1\cdot 1\right) = 2\lambda - \lambda;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot(1-\lambda)) = -(1-\lambda)\cdot\lambda.$$

Уравнение примет вид:

$$(1-\lambda)^2\cdot\left(\lambda^2 - 2\lambda\right) - 1\cdot\lambda + 1\cdot\left(2\lambda - \lambda^2\right) + (-1)\cdot(1-\lambda)\cdot\lambda = 0.$$

Раскрывая скобки и решая, например, по схеме Горнера получил:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ − собственные числа.

Соответствующие собственные векторы найдём, решая систему:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 - 1\cdot x_4 = 0, \\ 0\cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 0, \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + (1-\lambda)\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0, \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + (1-\lambda)\cdot x_4 = 0. \end{cases}$$

1) При $\lambda_1 = 0$ система примет вид: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) : 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) : 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -c, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = c, \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ − собственный вектор.}$$

2) При $\lambda_2 = 1$ система примет вид: $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&-1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&-1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&-1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&-1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=-x_3,\\x_4=0,\\x_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-c,\\x_3=c,\\x_4=0.\end{cases}\Rightarrow\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\-c\\c\\0\end{pmatrix}.$$

3) При $\lambda_3=2$ система примет вид: $\begin{cases}-x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\-x_2+x_4=0,\\x_1-x_3=0,\\x_1+x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&-1&0\\0&-1&0&1&0\\1&0&-1&0&0\\1&1&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&-1&0\\-1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&0\\2&0&0&0&0\end{array}\right):2\sim\left(\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&-1&0\\-1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&-1&0\\-1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&-1&0\\-1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=x_4,\\x_3=0\\x_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=c,\\x_3=0\\x_4=c.\end{cases}\Rightarrow\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\c\\0\\c\end{pmatrix}$$ – третий собственный вектор.

В итоге: $\vec{e}_{\lambda=0}=(-c;\ 0;\ c;\ 0)$; $\vec{e}_{\lambda=1}=(0;-c;\ c;\ 0)$; $\vec{e}_{\lambda=2}=(0;\ c;\ 0;\ c)$.

1.4. Квадратичные формы (КФ)

- ***Квадратичной формой*** *(КФ) от нескольких переменных называется однородный многочлен второй степени от этих переменных:*

на плоскости	$L(x_1, x_2) = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2$
в пространстве	$L(x_1, x_2,\, x_3) = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + {}$ $+ 2a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13} x_1\, x_3 + 2\, a_{23} x_2\, x_3$

КФ определяет матрицу, которая является симметрической $(a_{ij} = a_{ji})$:	на плоскости	$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$
	в пространстве	$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

В матричном виде КФ примет вид: $L = X^T P\, X$.

- ***КФ*** *называется* ***положительно определённой****, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, значение КФ положительно.*

Критерии знакоопределённости КФ	***Критерий 1*** Для того чтобы КФ была положительно (отрицательно) определённой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы КФ были положительны (отрицательны)
	Критерий 2 (по Сильвестру) −Для того чтобы КФ была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы КФ были положительны. −Для того чтобы КФ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров матрицы КФ чередовались, начиная со знака «−»

Закон инерции. *Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами канонической КФ не зависит от способа приведения КФ к каноническому виду.*

- ***КФ*** *называется* ***канонической****, если все* $a_{ij}=0, \quad i\neq j$ *:*

на плоскости	$L(x,y)=a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2$	$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$
в пространстве	$L(x,y,\,z)=a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}\,z^2$	$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$

Алгоритм приведения КФ к каноническому виду

Алгоритм 1

Постепенно выделять полный квадрат при переменных, тем самым, определяя соответствующий ЛО.

Алгоритм 2

1. Выписать матрицу квадратичной формы	$\mathrm{P}=(a_{ij})$
2. Найти собственные числа матрицы P	$\det(\mathrm{P}-\lambda\,\mathrm{E})=0$
3. Найти соответствующие собственные векторы, учитывая их кратность	$(\mathrm{P}-\lambda_k\,\mathrm{E})\cdot\bar{e}_k=0$
4. Из собственных векторов образовать ортонормированный базис новой системы координат OXY	$\{\bar{e}_k\}_k$

5. В новом базисе матрица квадратичной формы примет диагональный вид, где на главной диагонали стоят собственные числа с учетом их кратности:

на плоскости:	в пространстве:
$\mathrm{P}^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$;	$\mathrm{P}^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$;
$L(y_1,y_2)=\lambda_1\,y_1^2+\lambda_2\,y_2^2$	$L(y_1,y_2,\,y_3)=\lambda_1\,y_1^2+\lambda_2\,y_2^2+\lambda_3\,y_3^2$

6. Координаты векторов преобразуются по формулам $X=BY$:

$\begin{cases} x_1 = b_{11}\cdot y_1 + b_{12}\cdot y_2, \\ x_2 = \underbrace{b_{21}}_{\bar e_1}\cdot y_1 + \underbrace{b_{22}}_{\bar e_2}\cdot y_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = b_{11}\cdot y_1 + b_{12}\cdot y_2 + b_{13}\cdot y_3, \\ x_2 = b_{21}\cdot y_1 + b_{22}\cdot y_2 + b_{23}\cdot y_3, \\ x_3 = \underbrace{b_{31}}_{\bar e_1}\cdot y_1 + \underbrace{b_{32}}_{\bar e_2}\cdot y_2 + \underbrace{b_{33}}_{\bar e_3}\cdot y_3. \end{cases}$
Столбцы матрицы B – есть координаты базисных векторов $\{\bar e_k\}_k$ новой ДСК.	

Пример 1.2. Найти линейный оператор (ЛО), приводящий квадратичную форму (КФ), заданную матрицей, к каноническому виду. Определить знак квадратичной формы.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1{,}5 & 2 \\ -1{,}5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

Решение (*Алгоритм* 1) .

а) Составим КФ и выделим полные квадраты при переменных:

$$L(x_1;x_2;x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 =$$

$$= -\left(x_1^2 - x_1\cdot(4x_2 + 2x_3)\right) + x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= -\left(x_1 - \frac{4x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 5\left(x_2^2 + \frac{8}{5}x_2x_3\right) =$$

$$= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 5\cdot\left(x_2 + \frac{8}{5\cdot 2}\cdot x_3\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot x_3\right)^2 =$$

$$= -(x_1 - 2x_2 - x_3)^2 + 5\cdot\left(x_2 + \frac{4}{5}\cdot x_3\right)^2 - \frac{16}{5}\cdot x_3^2 =$$

$$= -y_1^2 + 5\cdot y_2^2 - \frac{16}{5}\cdot y_3^2 = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -16/5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} -$$

– канонический вид КФ, следовательно, ЛП: $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{4}{5} \cdot x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$

КФ не является знакопостоянной, так как в каноническом виде числовые коэффициенты при переменных имеют разные знаки (диагональные элементы в матрице). Убедимся в полученном выводе, применяя критерии.

Критерий 1.

Найдём собственные числа и собственные векторы матрицы КФ $\left| A - \lambda \cdot E \right| = 0$, разложив определитель по элементам 1-ой строки:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 10\lambda - 16 = 0.$$

Найдём корни уравнения по схеме Горнера. Одним из делителей свободного числа 16 является число (-2). Проверим его:

	1	1	−10	−16
-2	1	$-2 \cdot 1 + 1 = -1$	$-2 \cdot (-1) + (-10) = -8$	$-2 \cdot (-8) + (-16) = 0$

Так как в результате получили ноль, то уравнение представимо в виде:

$$(\lambda + 2) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 8) = 0, \quad \lambda_1 = -2, \; \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

– полученные собственные числа имеют различные знаки, следовательно, КФ не является знакопостоянной.

Критерий 2 (Сильвестра).

Найдём знаки главных миноров матрицы КФ

$$\Delta_1 = \left| -1 \right| = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -5;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1_{22} & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-5) - (-3) \cdot (-3) = 16.$$

Т. к. чередование знаков главных миноров матрицы КФ не удовлетворяют условиям критерия Сильвестра, то КФ не является знакопостоянной (это уже было понятно с учётом знаков Δ_1 и Δ_2).

b) Составим КФ и преобразуем, постепенно выделяя полные квадраты при переменных:

$$L(x_1;x_2;x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1{,}5 & 2\\ -1{,}5 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=$$

$$=x_1^2+3x_2^2+18x_3^2-3x_1x_2+4x_1x_3=$$

$$=x_1^2+x_1\cdot(-3x_2+4x_3)+3x_2^2+18x_3^2=$$

$$=\left(x_1+\frac{-3x_2+4x_3}{2}\right)^2-\left(\frac{-3x_2+4x_3}{2}\right)^2+3x_2^2+18x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2-\frac{9}{4}x_2^2-4x_3^2+6x_2x_3+3x_2^2+18x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2+\left(\frac{3}{4}x_2^2+6x_2x_3\right)+14x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(x_2^2+\frac{6\cdot 4}{3}\cdot x_3\right)+14x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2+\frac{3}{4}\cdot\left(x_2^2+8x_3\right)+14x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2+\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{8}{2}\cdot x_3\right)^2-\frac{3}{4}(4x_3)^2+14x_3^2=$$

$$=(x_1-1{,}5x_2+2x_3)^2+\frac{3}{4}(x_2+4x_3)^2+2x_3^2=$$

$$=y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+2y_3^2=(y_1\quad y_2\quad y_3)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}-$$

– канонический вид КФ относительно переменных y_1, y_2, y_3, которые определяются ЛО: $\begin{cases}y_1=x_1-1{,}5x_2+2x_3,\\ y_2=x_2+4x_3,\\ y_3=x_3.\end{cases}$

КФ является положительно определённой, так как в каноническом виде числовые коэффициенты при переменных неотрицательны (диагональные в матрице). Убедимся в полученном выводе, применяя критерий 2.

<u>*Критерий 2 (Сильвестра).*</u>

Найдём знаки главных миноров матрицы КФ.

$$\Delta_1 = \left|\,1\,\right| = 1;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2{,}25 = 0{,}75;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}75 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 17 \end{vmatrix} = 12{,}75 - 2{,}25 = 10{,}5.$$

Т. к. все главные миноры матрицы КФ положительные, то КФ знакопостоянна – положительно определённая.

Глава 2. Аналитическая геометрия

2.1. Координаты точки на плоскости

Прямоугольная декартовая система координат (ПДСК), $A(x;\ y)$	*Полярная система координат,* $A(\rho;\ \varphi)$
	$\rho = \lvert OA \rvert,\qquad \rho \in [0;\ +\infty)$ $\varphi = \angle \overline{OA},\ \overline{OX},\quad \varphi \in (-\pi;\ \pi]$
Формулы связи	
$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

Пример 2.1. Найти полярные координаты M, если в прямоугольной декартовой системе координат точка имеет координаты $M_1\left(-1;\ \sqrt{3}\right)$; $M_2\left(-\sqrt{3}; -1\right)$.

Решение.

Используем формулы связи. Для определения угла учтем принадлежность точки четверти координатной плоскости.

1) Для $M_1\left(-1;\ \sqrt{3}\right) \in$ II четверти:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \\ \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \ \Rightarrow\ \varphi = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \in (-\pi;\ \pi]. \end{cases}$$

В итоге: $M_1\left(2;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Для $M_2\left(-\sqrt{3};-1\right)\in$ III четверти:

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2,\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\dfrac{\pi}{3}-\pi=-\dfrac{2\pi}{3}\in(-\pi;\ \pi].\end{cases}$$

В итоге: $M_2\left(2;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Пример 2.2. Найти декартовы координаты точки A, симметричной точке $B=\left(5;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$ относительно полярной оси.

Решение.

Найдем декартовы координаты $B=\left(5;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$, используя формулы связи:

$$\begin{cases}x=5\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6}=5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{2},\\ y=5\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}=5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad B=\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)\in \text{II четверти}.$$

Тогда для точки, симметричной относительно полярной оси, которая совпадает с осью абсцисс ПДСК, получим:

$$A=\left(-\frac{5}{2};-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\in \text{III четверти}.$$

2.2. Координаты точки в пространстве

ПДСК, $A(x;\ y;\ z)$	*Цилиндрические координаты,* $A(\rho;\ \varphi;\ z)$
	$\rho=\lvert OA\rvert$, $\rho\in[0;\ +\infty)$ $\varphi=\angle\overline{OA},\ \overline{OX}$, $\varphi\in(-\pi;\ \pi]$
Формулы связи	
$\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\varphi,\\ y=\rho\cdot\sin\varphi,\\ z=z\end{cases}$	$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x},\\ z=z.\end{cases}$

ПДСК, $A(x;\ y;\ z)$	*Сферические координаты,* $A(\rho;\ \varphi;\ \theta)$

	$\rho = \lvert OA \rvert, \qquad \rho \in [0; +\infty)$ $\varphi = \angle \overline{OA}, \overline{OX}, \quad \varphi \in (-\pi; \pi]$ $\theta = \angle \overline{OA}, \overline{OZ}, \quad \theta \in [0; \pi]$
Формулы связи	
$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = \rho \cdot \cos\theta. \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \end{cases}$

2.3. Линия на плоскости

Любая точка на плоскости определяется двумя координатами в какой-либо системе координат. Системы координат могут быть различными в зависимости от выбора базиса и начала координат.

- ***Линией*** *(кривой) на плоскости* OXY *называется геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, координаты которых в ПДСК удовлетворяют уравнению связи двух переменных* $F(x, y) = 0$.
- *Переменные* x *и* y *называются* ***текущими координатами*** *точек линии.*

<u>*В параметрическом виде*</u>

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

<u>*В полярной системе координат*</u>

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

Порядок линии определяется наибольшей степенью слагаемых в уравнении связи переменных.

Пример 2.3. Записать уравнение линии в декартовых координатах, если заданы её параметрические уравнения $\begin{cases} x = 2 \cdot t^2, \\ y = 4t - t^3. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x = 2 \cdot t^2, \\ y = 4t - t^3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \dfrac{x}{2}, \\ y^2 = (4t - t^3)^2 = t^2 (4 - t^2)^2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = t^2\left(4 - t^2\right)^2 = \frac{x}{2}\cdot\left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x}{8}\cdot(8 - x)^2 \quad \Rightarrow \quad 8y^2 = x\cdot(8 - x)^2.$$

Пример 2.4. Записать уравнение линии в декартовых координатах, если заданы её параметрические уравнения $\begin{cases} x = 2\cdot\sin t, \\ y = 2\cdot\cos t. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x = 2\cdot\sin t, \\ y = 2\cdot\cos t. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 4\cdot\sin^2 t, \\ y^2 = 4\cdot\cos^2 t. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4\cdot\sin^2 t + 4\cdot\cos^2 t = 4\cdot\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) = 4\cdot 1 = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Пример 2.5. Записать уравнение линии в декартовых координатах, если задано её уравнение в полярных координатах $\rho = 3\cdot\cos\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулами связи: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

Применим формулы тригонометрии:

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \cos^2\varphi.$$

Тогда для заданного уравнения линии получим:

$$\rho = 3\cdot\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 9\cdot\cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9\cdot\frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^2 + y^2\right)^2 = 9\cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3\cdot x \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}.$$

Пример 2.6. Записать уравнение линии в декартовых координатах, если задано её уравнение в полярных координатах $\rho = \dfrac{3}{\cos\varphi}$.

Решение. Воспользуемся формулами связи:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Получим: $\rho = \dfrac{3}{\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 3 : \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 = 3 \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Пример 2.7. Записать уравнение линии в декартовых координатах, если задано её уравнение в полярных координатах $\rho = 2 \cdot (1+\cos\varphi)$.

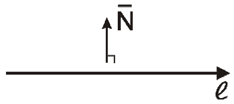
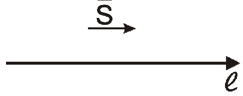
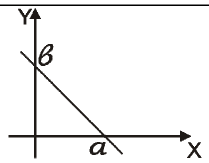
Решение. Воспользуемся формулами связи: $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$

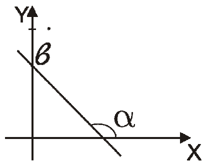
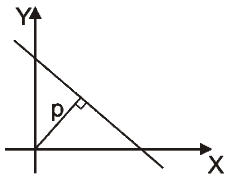
Получим: $\rho = 2 \cdot (1+\cos\varphi) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right) \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 2 \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right).$$

2.4. Кривая 1-го порядка на плоскости – прямая (ℓ)

<table>
<tr><td>Общее уравнение
$A\,x + B\,y + D = 0$
или $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$</td><td></td><td>точка $M_0(x_0;y_0) \in L$,
нормаль $\vec{N}\{A,B\} \perp L$</td></tr>
<tr><td>Каноническое уравнение
$\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n}$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">точка $M_0(x_0;y_0) \in L$,
направляющий вектор
$\vec{S}\{m,n\} \,||\, L$</td></tr>
<tr><td>Параметрическое уравнение
$\begin{cases} x = x_0 + m\,t, \\ y = y_0 + n\,t \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Уравнение в отрезках
$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$</td><td></td><td>a, b – отрезки, которые отсекает прямая на осях OX, OY</td></tr>
</table>

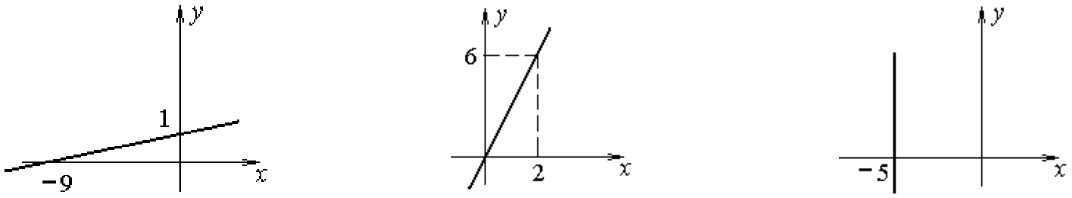
Уравнение с угловым коэффициентом $y = k \cdot x + b$		$k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой; b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY
Нормальное уравнение $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$		$\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ – орт $\vec{N}$; p – расстояние от $O(0,0)$ до прямой L
Уравнение прямой, проходящей через…	***две точки*** $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2}$
	точку $M_0(x_0; y_0)$ ***и угловой коэффициент*** k	$y - y_0 = k\,(x - x_0)$

Пример 2.8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;-3)$ и начало координат.

Решение. Уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Тогда: $\dfrac{x-0}{-2-0}=\dfrac{y-0}{-3-0} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{-3} \quad\Rightarrow\quad 3x-2y=0$.

Пример 2.9. Составить общие уравнения прямых к графикам функций.



а) б) в)

Решение.

а) Так как прямая пересекает обе оси, то воспользуемся уравнением прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{-9}+\dfrac{y}{1}=1 \quad\Rightarrow\quad -x+9y-9=0$.

б) Так как прямая проходит через начало координат, то $y=kx \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{6}{2}x \quad\Rightarrow\quad 3x-y=0.$$

в) Так как прямая параллельна оси OY, то $x=const=-5 \quad\Rightarrow\quad x+5=0$.

Пример 2.10. Сделать чертеж и найти координаты угловых точек области решений системы:
$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 4, \\ x_1-4x_2\ge -4, \\ 4x_1-3x_2\le 24, \\ x_j\ge 0. \end{cases}$$

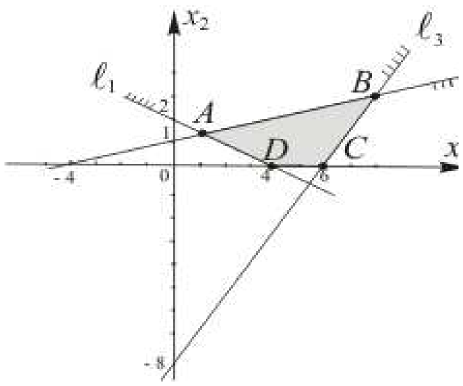
Решение. Составим уравнения прямых, соответствующих неравенствам системы, в виде «уравнение в отрезках»:

$$\ell_1:\ \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{2}=1; \qquad \ell_2:\ -\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{1}=1; \qquad \ell_3:\ \frac{x_1}{6}-\frac{x_2}{8}=1.$$

Выполним чертёж в первой четверти ПДСК.

Для определения полуплоскостей, соответствующих неравенствам, будем подставлять координаты точки $O(0;0)$ в исходную систему неравенств. При этом:

– 1-ое неравенство не выполняется. Штрихуем полуплоскость, не содержащую т. O;
– 2-ое неравенство выполняется. Штрихуем полуплоскость, содержащую т. O;
– 3-е неравенство выполняется. Штрихуем полуплоскость, содержащую т. O.



Найдём координаты угловых точек области решений $ABCD$.

$$A = \ell_1 \cap \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}, \\ x_2 = \dfrac{4}{3}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

$$B = \ell_2 \cap \ell_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 = 24. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{108}{13}, \\ x_2 = \dfrac{40}{13}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{108}{13}; \frac{40}{13}\right).$$

С учетом построения: $C(6;\ 0)$; $D(4;\ 0)$.

В итоге: $A\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$; $B\left(\frac{108}{13}; \frac{40}{13}\right)$; $C(6;\ 0)$; $D(4;\ 0)$.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

	$\ell_1:\ y = k_1x + b_1$, $\ell_2:\ y = k_2x + b_2$	$\ell_1:\ A_1x + B_1y + D_1 = 0$, $\ell_2: A_2x + B_2y + D_2 = 0$	$\ell_1:\ \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$, $\ell_2:\ \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$
$\ell_1 \equiv \ell_2$	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$	$\begin{cases} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}, \\ M_1 \in l_2. \end{cases}$
$\ell_1 \parallel \ell_2$	$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2. \end{cases}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$	$\begin{cases} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}, \\ M_1 \notin l_2. \end{cases}$

$\ell_1 \cap \ell_2$	$k_1 \neq k_2$	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$	$\dfrac{m_1}{m_2} \neq \dfrac{n_1}{n_2}$

Пример 2.11. Найти уравнение прямой, проходящей через току $M(1;-2)$ параллельно прямой $4x+7y-3=0$.

Решение. Так как искомая прямая параллельна прямой $4x+7y-3=0$, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$, и её уравнение ищем в виде $4x+7y+D=0$.

Так как искомая прямая проходит через точку $M(1;-2)$, то координаты последней должны удовлетворять уравнению прямой:

$$4\cdot 1+7(-2)+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=10.$$

В результате получим уравнение искомой прямой: $4x+7y+10=0$.

- ***Углом α между прямыми*** *называется наименьший из смежных углов, образованных при пересечении прямых*

$\ell_1 \cap \ell_2$	$\mathrm{tg}\alpha=\left\|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right\|$	$\cos\alpha=\dfrac{\left\|\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}\right\|}{\left\|\overline{N_1}\right\|\cdot\left\|\overline{N_2}\right\|}$	$\cos\alpha=\dfrac{\left\|\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}\right\|}{\left\|\overline{s_1}\right\|\cdot\left\|\overline{s_2}\right\|}$
$\ell_1 \perp \ell_2$	$k_1\cdot k_2=-1$	$\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}=0$ $(A_1A_2+B_1B_2=0)$	$\overline{s_1}\cdot\overline{s_2}=0$ $(m_1m_2+n_1n_2=0)$

Пример 2.12. Определить угол между $\ell_1: y=-3x+7$ и $\ell_2: y=2x+1$.

Решение.

Так как $k_1=-3$ и $k_2=2$, то $\mathrm{tg}\alpha=\left|\dfrac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right|=1 \quad \Rightarrow \quad \varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Пример 2.13. Показать, что прямые $\ell_1: 3x-5y+7=0$ и $\ell_2: 10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

Решение. Находим: $A_1=3$, $B_1=-5$ и $A_2=10$, $B_2=6$.

Вычислим $A_1A_2+B_1B_2=3\cdot 10+(-5)\cdot 6=0$. Следовательно, $\ell_1 \perp \ell_2$.

Пример 2.14. Найти уравнение прямой, проходящей через току $M(1;-2)$ перпендикулярно прямой $4x+7y-3=0$.

Решение. Так как искомая прямая перпендикулярна прямой $4x+7y-3=0$, то $A_1A_2+B_1B_2=0$, и её уравнение ищем в виде $7x-4y+D=0$.

Определим D из условия – прямая проходит через точку $M(1;-2)$:

$$7 \cdot 1 - 4(-2) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -15.$$

В результате получим уравнение искомой прямой: $7x - 4y - 15 = 0$.

Пример 2.15. Даны вершины треугольника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Решение. Находим уравнение AB: $\dfrac{x-0}{6-0} = \dfrac{y-1}{5-1} \quad \Rightarrow \quad 4x - 6y + 6 = 0$.

Так как высота, проведенная из вершины C, перпендикулярна AB, то $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, и её уравнение ищем в виде $6x + 4y + D = 0$.

Определим D из условия – высота проходит через точку $C(12;-1)$:

$$6 \cdot 12 + 4 \cdot (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -68.$$

В результате получим уравнение высоты:

$$6x + 4y - 68 = 0 \quad \text{или} \quad 3x + 2y - 34 = 0.$$

Вычисление расстояний	
$\ell: Ax + By + D = 0$ или $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0$	***от точки*** $K(x_K; y_K)$ ***до прямой*** ℓ: $D(K,\ell) = \dfrac{\lvert Ax_K + By_K + D \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \lvert x_K \cdot \cos\alpha + y_K \cdot \sin\alpha - p \rvert$
$\ell_1: \ Ax + By + D_1 = 0$; $\ell_2: \ Ax + By + D_2 = 0$.	***между*** параллельными ***прямыми*** $D(\ell_1 \Vert \ell_2) = \dfrac{\lvert D_2 - D_1 \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Пример 2.16. Стороны треугольника лежат на прямых

$$x - 6y + 5 = 0; \quad 5x - 2y - 3 = 0; \quad x + y - 9 = 0.$$

Найти: а) длины сторон треугольника,
б) внутренние углы треугольника,
в) площадь треугольника,
г) высоту треугольника, опущенную на наибольшую сторону.

Решение.

а) Найдем вершины треугольника – точки пересечения прямых, на которых лежат стороны треугольника. Для этого решим системы:

$$\begin{cases} x - 6y + 5 = 0, \\ 5x - 2y - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6y + 5 = 0, \\ x + 2y - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 6y + 5 = 0, \\ 5x - 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Получим: $A(1;1)$, $B(7;2)$, $C(3;6)$.

Вычисляем длины сторон:

$$AB=\sqrt{(7-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{37};\quad BC=\sqrt{(3-7)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32};$$
$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29}.$$

б) Находя углы треугольника, рассматриваем прямые, на которых лежат его стороны, и, получаем тангенс внутреннего или внешнего углов при данной вершине.

Чтобы различать эти углы, будем руководствоваться следующими соображениями: при вычислении тангенсов внутренних углов должно быть не более одного отрицательного числа, так как треугольник не может сдержать более одного тупого внутреннего угла. Если тангенс одного из углов оказался отрицательным, нужно проверить, является ли треугольник тупоугольным (с помощью неравенства $c^2>a^2+b^2$).

Определяем тангенсы углов: $tg\,\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$;

$$tg\,\varphi_1=\frac{1\cdot(-2)-5\cdot(-6)}{1\cdot5+(-6)\cdot(-2)}=\frac{28}{17};\quad tg\,\varphi_2=\frac{1\cdot1-1\cdot(-6)}{1\cdot1+1\cdot(-6)}=-\frac{7}{5};$$

$$tg\,\varphi_3=\frac{5\cdot1-1\cdot(-2)}{1\cdot5+1\cdot(-2)}=\frac{7}{3}.$$

По вычислениям $tg\,\varphi_2<0$. Проверим, является ли найденный угол внешним или внутренним для ΔABC: $AB^2<BC^2+AC^2$ (AB – наибольшая сторона). Следовательно, ΔABC– остроугольный. То есть φ_2 – внешний угол, внутренний $(\pi-\varphi_2)$ и $tg\,(\pi-\varphi_2)=-\,tg\,\varphi_2=\dfrac{7}{5}$.

Таким образом: $tg\,\varphi_1=\dfrac{28}{17}$; $tg\,\varphi_2=\dfrac{7}{5}$; $tg\,\varphi_3=\dfrac{7}{3}$.

в)

$\overrightarrow{AB}=\{7-1;2-1\}=\{6;1\}$;
$\overrightarrow{AC}=\{3-1;6-1\}=\{2;5\}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{vmatrix}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+28\cdot\vec{k}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+0^2+28^2}=28$, тогда $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot28=14$.

Для нахождения площади треугольника на плоскости с вершинами $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2);C(x_3;y_3)$ можно также воспользоваться еще одним правилом, являющимся следствием применения векторного произведения:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|.$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}7-1 & 2-1\\ 3-1 & 6-1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}6 & 1\\ 2 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|6\cdot 5-2\cdot 1|=\frac{1}{2}\cdot|28|=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

г) Высота, опущенная из вершины C на наибольшую сторону AB:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot h_C \;\Rightarrow\; h_C=\frac{2\,S_{\Delta ABC}}{AB}=\frac{28}{\sqrt{37}}.$$

Пример 2.17. Даны точки: $A(1;\,4)$, $B(3;\,9)$, $C(\,3;2)$. Найти:

а) расстояние от точки C до прямой AB;

б) координаты точки M, которая принадлежит прямой CB и $\dfrac{|BM|}{|CM|}=\dfrac{2}{5}$;

в) общее уравнение прямой, которая проходит через точку M перпендикулярно прямой CB;

г) общее уравнение прямой, которая проходит через точку M параллельно прямой AC;

Решение.

а) Для прямой AB в качестве направляющего возьмём вектор

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}.$$

Тогда $\ell(A(1;\,4),\ \vec{s}):\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{5} \quad\Rightarrow\quad 5x-2y+3=0,\ \vec{N}=\{5;-2\}.$

Найдём расстояние от точки $C(\,3;2)$ до прямой AB, подставляя координаты точки в общее уравнение прямой и деля на длину вектора нормали прямой: $d(C,\ AB)=\dfrac{|5\cdot 3-2\cdot 2+3|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{29}}.$

б) Для точки $M\in[BC]$, учтем условие $\dfrac{|BM|}{|CM|}=\dfrac{2}{5}$, где $\lambda=2$, $\mu=5$. Тогда:

$$M=\frac{\lambda\cdot C+\mu\cdot B}{\lambda+\mu}=\frac{2\cdot C+5\cdot B}{7}=\frac{2\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}}{7}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot 3+5\cdot 3\\2\cdot 2+5\cdot 9\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}21\\49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

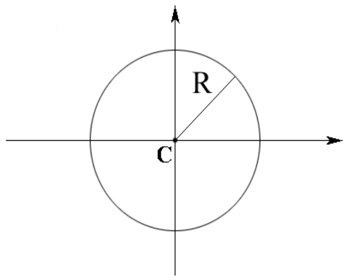
в) Так как искомая прямая перпендикулярна прямой CB, то в качестве нормального $\overline{N}$ возьмём вектор $\overrightarrow{CB}=B-C=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}.$

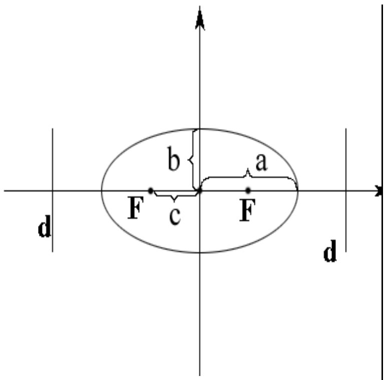
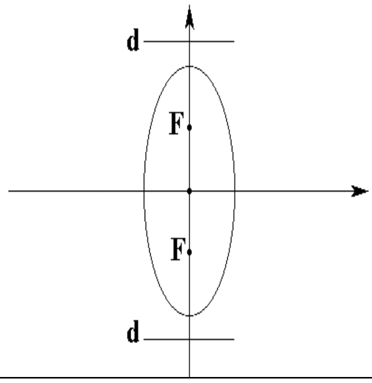
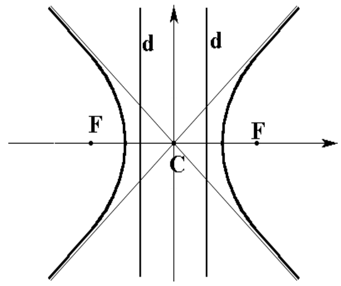
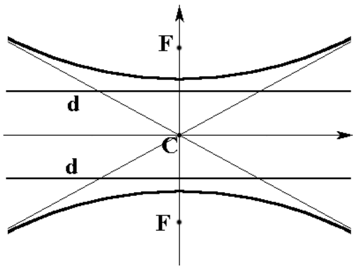
Тогда $\ell(M(3;7),\ \overline{N}):\quad 0\cdot(x-3)+7\cdot(y-7)=0 \;\Rightarrow\; y-7=0.$

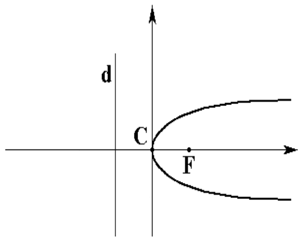
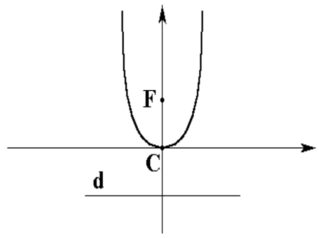
г) Так как искомая прямая параллельна прямой AC, то в качестве направляющего $\bar{s}$ возьмём вектор $\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.

Тогда $\ell(M(3;7),\ \vec{s})$: $\quad \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-7}{-2} \ \Rightarrow\ x + y - 10 = 0$.

2.5. Кривые 2-го порядка на плоскости

Тип кривой, *центр в точке* $C(x_0; y_0)$	*График кривой,* *центр в точке* $C(0;0)$	*Характеристики,* $C(x_0; y_0)$ – – *центр кривой*
Окружность – *ГМТ плоскости, равноудаленных от данной точки C (центра) на расстояние R (радиус)*: $\lvert MC\rvert = R$ или $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ или $\begin{cases} x - x_0 = R\cdot\cos t, \\ y - y_0 = R\cdot\sin t, \end{cases} t\in[0;\ 2\pi]$		R – радиус окружности
Эллипс – *ГМТ плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек* F_1 *и* F_2 *(фокусы) есть величина постоянная*: $\lvert MF_1\rvert + \lvert MF_2\rvert = const$ или $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	c – расстояние от центра до фокуса $a > b$	$c^2 = a^2 - b^2$; фокусы $F_{1,2}(x_0 \pm c; y_0)$; эксцентриситет $\varepsilon = c/a$, $(\varepsilon < 1)$; директрисы $d_{1,2} : x = x_0 \pm a/\varepsilon$

или $\begin{cases} x-x_0=a\cdot\cos t, \\ y-y_0=b\cdot\sin t, \end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$	 $b>a$ 	$c^2=b^2-a^2$; фокусы $F_{1,2}(x_0;y_0\pm c)$; эксцентриситет $\varepsilon=c/b,\quad(\varepsilon<1)$; директрисы $d_{1,2}:y=y_0\pm b/\varepsilon$
***Гипербола** – ГМТ плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек* F_1 *и* F_2 *(фокусы) есть величина постоянная*: $\left\lvert\, \lvert MF_1\rvert-\lvert MF_2\rvert \,\right\rvert=const$ или $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	c – расстояние от центра до фокуса $c^2=b^2+a^2$ 	вершины $B_{1,2}(x_0\pm a;y_0)$; фокусы $F_{1,2}(x_0\pm c;y_0)$; эксцентриситет $\varepsilon=c/a,(\varepsilon>1)$; директрисы $d_{1,2}:x=x_0\pm a/\varepsilon$
или $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$	асимптоты: $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$. 	вершины $B_{1,2}(x_0;y_0\pm b)$; фокусы $F_{1,2}(x_0;y_0\pm c)$; эксцентриситет $\varepsilon=c/b,\quad(\varepsilon>1)$; директрисы $d_{1,2}:y=y_0\pm b/\varepsilon$

Парабола *– ГМТ плоскости, для которых расстояние до данной точки F (фокуса) равно расстоянию до данной прямой (директрисы)*: $\lvert MF\rvert = \textit{расстояние}(M,\ d)$ или $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$	$p>0$ 	фокус $F(x_0+p/2;y_0)$; эксцентриситет $\varepsilon=1$; директриса $d: x = x_0 - p/2$; $p>0$ – ветви вправо $p<0$ – ветви влево
или $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$	$p>0$ 	фокус $F(x_0;y_0+p/2)$; эксцентриситет $\varepsilon=1$; директриса $d: y = y_0 - p/2$; $p>0$ – ветви вверх $p<0$ – ветви вниз

Пример 2.18. Привести уравнение кривой $2x^2+4x-y^2+6y-3=0$ к каноническому виду. Определить вид кривой, найти её параметры, сделать чертёж.

Решение. Приведём данное уравнение к каноническому виду. Для этого выделим полные квадраты для переменных x и y:

$(2x^2+4x)-(y^2-6y)-3=0$,

$2(x^2+2x+1-1)-(y^2-6y+9-9)-3=0$,

$2(x^2+2x+1)-2-(y^2-6y+9)+9-3=0$,

$2(x+1)^2-(y-3)^2=-4 \mid :(-4)$.

$\frac{(y-3)^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$ – уравнение гиперболы, центр $C(-1,3)$.

$a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$ – мнимая полуось;

$b^2=4 \Rightarrow b=2$ – действительная полуось;

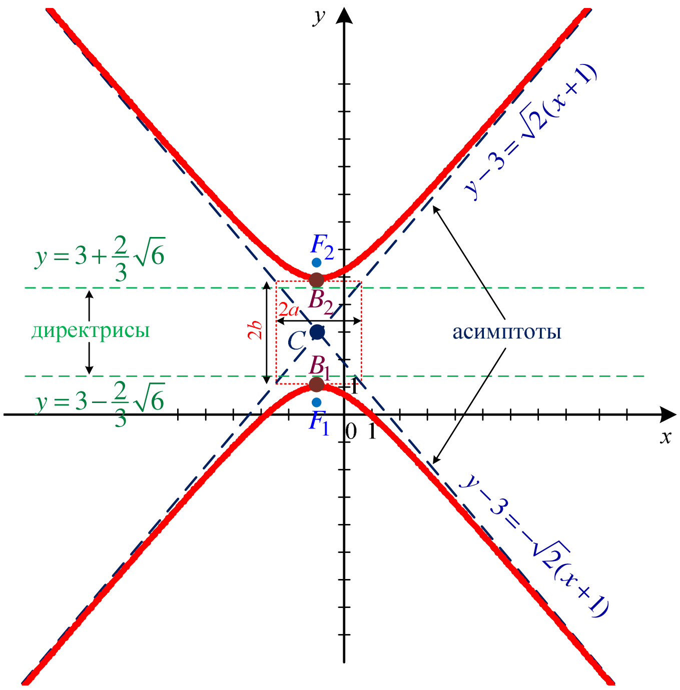
$c^2=a^2+b^2=6 \Rightarrow c=\sqrt{6}$; $\quad \varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ – эксцентриситет.

$B_1(x_C;y_C-b)$, $B_2(x_C;y_C+b)$ – вершины – $B_1(-1;1)$, $B_2(-1;5)$.

$F_1(x_C;y_C-c)$, $F_2(x_C;y_C+c)$ – фокусы – $F_1(-1;3-\sqrt{6})$, $F_2(-1;3+\sqrt{6})$.

$y = y_C \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$ – уравнения директрисы – $y = 3 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$y - y_C = \pm \frac{b}{a}(x - x_C)$ – уравнения асимптоты – $y - 3 = \pm\sqrt{2}(x+1)$.



Пример 2.19. Привести уравнение кривой $x = 4 - \sqrt{-y^2 - 4y - 5}$ к каноническому виду. Определить вид кривой, найти её параметры, сделать чертёж.

Решение. Преобразуем уравнение кривой:

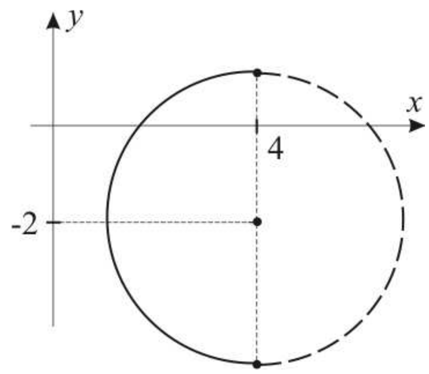
$$x = 4 - \sqrt{-y^2 - 4y + 5} \quad \Rightarrow \quad x - 4 = -\sqrt{-y^2 - 4y + 5} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (x-4)^2 = -y^2 - 4y + 5, \\ x - 4 \le 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-4)^2 = -\left(y^2 + 4y\right) + 5, \\ x - 4 \le 0; \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (x-4)^2 = -(y+2)^2 + 2^2 + 5, \\ x \le 4; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9, \\ x \le 4. \end{cases}$$

$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$ – уравнение окружности, $C(4;-2)$, $R = 3$.

Выполним чертёж с учётом условия: $x \le 4$.



Пример 2.20. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси OY, симметрично относительно точки $O(0;0)$; малая ось равна 12, эксцентриситет равен 0,8.

Решение. Так как эллипс симметричен относительно начала координат, то $O(0;0)$ – центр эллипса. Т. о., уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

По условию фокусы $F_{1,2} \in OY$. Большая ось равна $2b$, малая ось равна $2a$ $(b>a)$. Таким образом, $2a=12 \Rightarrow \quad a=6$.

При этом: 1) $\varepsilon=\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad c=\varepsilon \cdot b \quad \Rightarrow \quad c^2=\varepsilon^2 b^2$ и 2) $c^2=b^2-a^2$.

Приравняем правые части полученных выражений:

$$\varepsilon^2 b^2=b^2-a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=\frac{a^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Учитывая, что $\varepsilon=0{,}8,\ a=6$, получим $b=10$.

Тогда уравнение эллипса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1.$

Пример 2.21. На эллипсе $16x^2+25y^2=400$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза меньше расстояния до левого фокуса.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на 400, найдем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \Rightarrow a^2=25,\ b^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=5,\ b=4\ (a>b);$$

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \quad \Rightarrow \quad c=3,\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}.$$

Расстояние от точки $M(x;y)$ эллипса до фокусов (фокальные радиусы):

$$r_1=a+\varepsilon x; \quad r_2=a-\varepsilon x \quad \Rightarrow \quad r_1=5+\frac{3}{5}x; \ r_2=5-\frac{3}{5}x.$$

По условию $r_1 = 4r_2 \Rightarrow 5+\frac{3}{5}x = 4\cdot\left(5-\frac{3}{5}x\right) \Rightarrow x = 5$ –

– абсцисса искомой точки. Подставляя это значение в уравнение эллипса, получим $y = 0$. Таким образом, искомая точка $M(5;0)$.

Пример 2.22. Составить простейшее уравнение гиперболы симметричной относительно координатных осей, пересекающей ось OY и проходящей через две точки $M\,(24\,;5\sqrt{5})$, $N\,(0\,;5)$. Найти фокусы этой гиперболы.

Решение. Так как гипербола симметрична относительно координатных осей, то центр гиперболы – начало координат. По условию гипербола пересекает ось OY, следовательно, OY – действительная ось. Поэтому, уравнение гиперболы ищем в виде: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$

Так как точки M и N лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Подставляя координаты данных точек в это уравнение, получим:

$$\begin{cases} \frac{125}{b^2}-\frac{24}{a^2}=1, \\ \frac{25}{b^2}=1. \end{cases} \Rightarrow \quad b^2 = 25, \quad a^2 = 144.$$

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1$ –искомое уравнение; $c=\sqrt{b^2+a^2}=\sqrt{144+25}=13.$

Фокусы гиперболы лежат на действительной оси, то есть на оси OY:

$$F_1(0;-13),\;\; F_2(0;13).$$

Пример 2.23. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0;3)$ и прямой $y=-5$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

Решение.

Искомым геометрическим местом будет парабола.

Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка параболы.

По условию $MN = MF$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y=-5$.

Так как $MF=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$ и $MN=\sqrt{(y-(-5))^2}$, то

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y+5)^2} \Rightarrow x^2+y^2-6y+9=y^2+10y+25 \Rightarrow$$

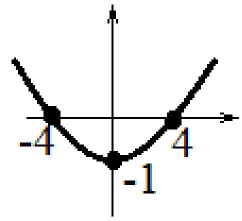
$$\Rightarrow \quad x^2 = 2\cdot 8(y+1).$$

Вершина параболы $B(0;-1)$; параметр $p=8>0$; ветви параболы направлены вверх.

Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью OX:

$$\begin{cases} x^2 = 16y+1, \\ y=0. \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=-4, \ x_2=4.$$

Полагая в уравнении параболы $x=0$, получим $y=-1$. Парабола пересекает ось OY в точке $K(0;-1)$, которая является в данном случае вершиной параболы.



Пример 2.24. Составить уравнение параболы, зная, что фокус находится в точке $F(5;0)$, директриса – ось ординат и ось симметрии – ось абсцисс.

Решение.

Уравнение параболы, имеющей осью симметрии ось абсцисс, имеет вид $y^2=2p(x-x_0)$ (так как $y_0=0$).

Расстояние от фокуса $F(5;0)$ до директрисы $d: y=0$ равно p. Следовательно, $p=5$.

Так как каждая точка параболы равноудалена от фокуса F и директрисы, то для вершины параболы $B(x_0;\,0)$, расположенной на оси симметрии – оси OX, получим уравнение: $x_0=\dfrac{5+0}{2}=\dfrac{5}{2}$.

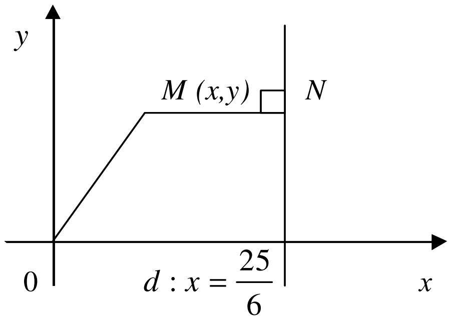
Возвращаясь к уравнению параболы при $p=5$, $\quad x_0=\dfrac{5}{2}$, получаем:

$$y^2=2\cdot 5\left(x-\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y^2=10x-25.$$

Пример 2.25. Найти каноническое уравнение кривой, для точек которой отношение расстояния от начала координат к расстоянию до прямой $d: 3x-12{,}5=0$ постоянно и равно: $1)\,\varepsilon=\dfrac{3}{2}$ $\quad 2)\,\varepsilon=1$.

Решение.

1) $M(x;y)$ – произвольная точка искомой кривой. По условию $\varepsilon=\dfrac{OM}{MK}=\dfrac{3}{2}$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $d: x=\dfrac{25}{6}$.



Так как $OM=\sqrt{x^2+y^2}$, $MK=\left|\frac{25}{6}-x\right|$, то:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left|\frac{25}{6}-x\right|}=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{x^2+y^2}=|25-6x|.$$

Возведем в квадрат и выделим полный квадрат:

$$20x^2-300x-16y^2=-625;$$

$$20(x-7{,}5)^2-16y^2=500\ ;$$

$$\frac{(x-7{,}5)^2}{25}-\frac{y^2}{31{,}25}=1$$

– каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(7{,}5;\ 0)$.

2) Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка искомой кривой. По условию

$$\varepsilon=\frac{OM}{MK}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left|\frac{25}{6}-x\right|}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=\left(\frac{25}{6}-x\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2=\frac{625}{36}-2\cdot\frac{25}{6}x \quad \Rightarrow \quad y^2=-\frac{25}{3}\left(x-\frac{25}{12}\right)$$

– каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $B\left(\frac{25}{12};0\right)$.

Пример 2.26. Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1, F_2 есть величина постоянная, равная a^2, где a – половина расстояния между точками F_1 и F_2. Изобразить эту кривую на плоскости. (Эта линия называется лемнискатой Бернулли.)

Решение. Начало координат выберем в середине отрезка F_1F_2, длина которого $2a$. Ось OX направим вдоль F_1F_2. Тогда $F_1(-a;0)$, $F_2(a;0)$.

$M(x;\ y)$ – произвольная точка искомого геометрического места.

$F_1M=\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}$, $F_2M=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$.

По условию $F_1M\cdot F_2M=a^2$. Тогда:

$$\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=a^2.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения и группируя члены, находим

$$\left(\left(x^2+y^2+a^2\right)+2ax\right)\cdot\left(\left(x^2+y^2+a^2\right)-2ax\right)=a^4;$$

$$\left(\left(x^2+y^2\right)+a^2\right)^2-4a^2x^2=a^4;$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2+2a^2\left(x^2+y^2\right)+a^4-4a^2x^2=a^4;$$
$$\left(x^2+y^2\right)^2-2a^2\left(x^2-y^2\right)=0.$$

Так как x и y входят в это уравнение только в четных степенях, то лемниската симметрична относительно координатных осей.

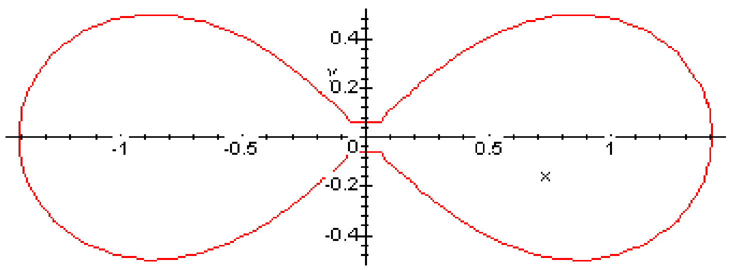
Переведем полученную лемнискату Бернулли в полярную систему координат, используя уравнения связи:

$$\rho^4=2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\quad\Rightarrow\quad\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Из этого уравнения видно, что $\rho=a\sqrt{2}$ при $\varphi=0$. Если φ увеличивается от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi/4$, то ρ уменьшается от $\rho=a\sqrt{2}$ до $\rho=0$. Если $\pi/4<\varphi<\pi/2$, то ρ принимает мнимые значения, то есть, нет точек, для которых φ меняется в указанных пределах. Следовательно, мы можем построить часть лемнискаты, расположенную в первой четверти (для $0\le\varphi\le\pi/4$):

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$
ρ	$a\sqrt{2}$	a	0

Построив соответствующие точки и учитывая симметричность, получим искомую кривую.



2.6. Кривые и поверхности 1-го порядка в пространстве

- ***Поверхностью*** *в пространстве называется геометрическое место точек (ГМТ) пространства, координаты которых в ПДСК удовлетворяют уравнению связи трёх переменных* $F(x, y, z)=0$.

Линию (кривую) в пространстве можно определить пересечением двух поверхностей.

Плоскость (Π) ***в пространстве***

Общее уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или $Ax+By+Cz+D=0$	точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, нормаль $\vec{N}\{A,B,C\}\perp \Pi$
Уравнение в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a,b,c – отрезки, которые отсекает плоскость на осях координат OX, OY, OZ
Нормальное уравнение $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0$	$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – орт $\vec{N}$, p – расстояние от $O(0,0,0)$ до плоскости
Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, $\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$

Прямая (ℓ) в пространстве

Каноническое уравнение $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$	точка $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\ell$,
Параметрическое уравнение $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$	направляющий вектор $\vec{S}\{m,n,p\}\,\|\,\ell$
Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{z-z_1}{z_1-z_2}$, $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}$

Вычисление расстояний в пространстве

$\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$	*расстояние от точки $K(x_K,y_K,z_K)$ до плоскости* Π $$D(K,\Pi)=\frac{\lvert Ax_K+By_K+Cz_K+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$\ell: \ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\ell, \ \ \vec{S}\{m,n,p\}\parallel\ell$	*расстояние от точки* $K(x_K, y_K, z_K)$ *до прямой* ℓ $D(K,\ell)=\dfrac{\left\lvert\overline{M_0K}\times\overline{S}\right\rvert}{\left\lvert\overline{S}\right\rvert}$
$\ell_1: \dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $M_1\in\ell_1, \ \vec{S}_1\,\vert\vert\,\ell_1$;	*расстояние между параллельными прямыми* $\ell_1\,\vert\vert\,\ell_2$ $D(\ell_1\,\vert\vert\,\ell_2)=\dfrac{\left\lvert\overline{M_1M_2}\times\overline{S_1}\right\rvert}{\left\lvert\overrightarrow{S_1}\right\rvert}$
$\ell_2: \dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $M_2\in\ell_2, \ \vec{S}_2\,\vert\vert\,\ell_2$	*расстояние между скрещивающимися прямыми* $\ell_1 \div \ell_2$ $D(\ell_1,\ell_2)=\dfrac{\left\lvert\left(\overline{M_1M_2},\overline{S_1},\overline{S_2}\right)\right\rvert}{\left\lvert\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\right\rvert}$,
$\Pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$, $\Pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$	*расстояние между параллельными плоскостями* $\Pi_1\,\vert\vert\,\Pi_2$ $D(\Pi_1\,\vert\vert\,\Pi_2)=\dfrac{\lvert D_2-D_1\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Взаимное расположение двух объектов в пространстве

Виды объектов	***Угол***	Условие ***параллельности***	Условие ***перпендикулярности***
Две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\varphi=\dfrac{\left\lvert\vec N_1\cdot\vec N_2\right\rvert}{\left\lvert\vec N_1\right\rvert\cdot\left\lvert\vec N_2\right\rvert}$, где $\vec N_1\{A_1,B_1,C_1\}$, $\vec N_2\{A_2,B_2,C_2\}$.	$\vec N_1 \parallel \vec N_2$ $\Updownarrow$ $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$\vec N_1\perp\vec N_2$ $\Updownarrow$ $\vec N_1\cdot\vec N_2=0$
Две прямые в пространстве $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi=\dfrac{\left\lvert\vec S_1\cdot\vec S_2\right\rvert}{\left\lvert\vec S_1\right\rvert\cdot\left\lvert\vec S_2\right\rvert}$, где $\bar S_1\{m_1,n_1,p_1\}$, $\bar S_2\{m_2,n_2,p_2\}$.	$\vec S_1\parallel\vec S_2$ $\Updownarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$	$\vec S_1\perp\vec S_2$ $\Updownarrow$ $\vec S_1\cdot\vec S_2=0$
Плоскость Π $Ax+By+Cz+D=0$ *и прямая* (ℓ) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$	$\sin\varphi=\dfrac{\left\lvert\vec N\cdot\vec S\right\rvert}{\left\lvert\vec N\right\rvert\cdot\left\lvert\vec S\right\rvert}$, где $\vec N\{A,B,C\}$, $\vec S\{m,n,p\}$.	$\ell\parallel\Pi$ $\Updownarrow$ $\vec N\perp\vec S$ $\Updownarrow$ $\vec N\cdot\vec S=0$	$\ell\perp\Pi$ $\Updownarrow$ $\vec N\parallel\vec S$ $\Updownarrow$ $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

Пример 2.27. Найти каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей: $\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$

Решение.

1) Для нахождения произвольной т. A прямой примем ее координату $x=0$, тогда заданная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases}y=3z-1\\4y-z-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3z-1\\12z-4-z-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3z-1\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}, \text{ т.е. } A(0;\ 2;\ 1).$$

2) Направляющий вектор прямой определим через векторное произведение нормальных векторов плоскостей, так как прямая, принадлежа обеим плоскостям, перпендикулярна нормалям этих плоскостей:

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-11\vec{i}+17\vec{j}+13\vec{k}.$$

3) Искомое каноническое уравнение прямой: $\dfrac{x}{-11}=\dfrac{y-2}{17}=\dfrac{z-1}{13}$.

Пример 2.28. Написать уравнение плоскости, проведенной через точку $M(2;-3;1)$ перпендикулярно к двум пересекающимся плоскостям

$$\beta_1:\ 3x-y+2z-1=0,\ \beta_2:\ 4x+5y-3z+2=0.$$

Решение. $\vec{N}_1=\{3;-1;2\}$ − нормаль плоскости $\beta_1:\ 3x-y+2z-1=0$;

$\vec{N}_2=\{4;5;-3\}$ − нормаль плоскости $\beta_2:\ 4x+5y-3z+2=0$.

Так как искомая плоскость Π перпендикулярна двум данным плоскостям, то $\vec{N}_1\parallel\Pi$ и $\vec{N}_2\parallel\Pi$. Нормаль $\vec{N}$ к плоскости Π может быть определена: $\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & 5 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+17\vec{j}+19\vec{k}$.

Используя уравнение плоскости через точку и нормаль, получаем:

$$-7(x-2)+17(y+3)+19(z-1)=0\quad\Rightarrow\quad -7x+17y+19z+46=0.$$

Пример 2.29. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1;-2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(-5;-4;8)$. Требуется:

а) составить каноническое уравнение прямой A_1A_2;
б) найти расстояние от A_3 до прямой A_1A_2
в) составить уравнение плоскости $A_1\,A_2\,A_3$;
г) составить уравнение перпендикуляра к прямой A_1A_2, проходящего через точку A_3 в плоскости $A_1\,A_2\,A_3$;
д) найти координаты точки M – пересечения перпендикуляра A_3M и прямой A_1A_2;
е) составить уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1\,A_2\,A_3$;
ж) найти длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1\,A_2\,A_3$ (расстояние от точки до плоскости).

з) найти координаты точки, симметричной точке A_4 относительно грани $A_1 A_2 A_3$;

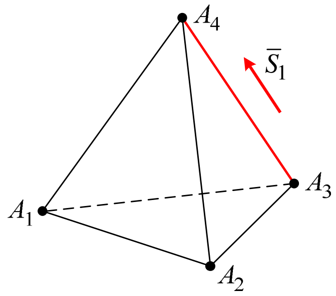
и) найти угол между гранью $A_1 A_2 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_3$;

к) найти угол между ребром $A_3 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_4$;

л) вычислить объем тетраэдра A_1, A_2, A_3, A_4.

Решение.

а) В качестве направляющего вектора $\overline{S}$ прямой $A_1 A_2$ возьмём вектор:



$$\overrightarrow{A_1 A_2} = A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \overline{S}.$$

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(2;\ 3;\ 1)$, с направляющим вектором $\overline{S}\{2;\ -2;-3\}$ имеет вид: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{-3}$.

б) Так как $d(A_3,\ A_1 A_2) = \dfrac{\left|\overline{A_1 A_3} \times \overline{A_1 A_2}\right|}{\left|\overline{A_1 A_2}\right|}$, то вычислим:

$$\overline{A_1 A_3} \times \overline{A_1 A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6-2 & 3-3 & 7-1 \\ 4-2 & 1-3 & -2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 24\vec{j} - 8\vec{k};$$

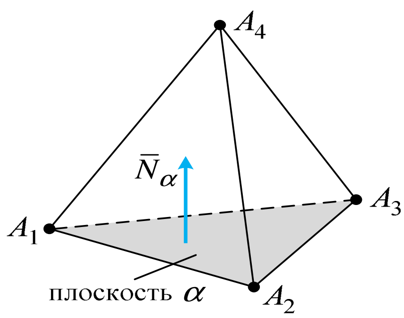
$$\left|\overline{A_1 A_3} \times \overline{A_1 A_2}\right| = \sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2} = \sqrt{4^2 \cdot \left(3^2 + 6^2 + 2^2\right)} = 4\sqrt{49} = 28;$$

$$\left|\overline{A_1 A_2}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}.$$

В результате: $d(A_3,\ A_1 A_2) = \dfrac{\left|\overline{A_1 A_3} \times \overline{A_1 A_2}\right|}{\left|\overline{A_1 A_2}\right|} = \dfrac{28}{\sqrt{17}}$.

в) Вектор нормали грани $(A_1 A_2 A_3)$ определяется ранее найденным векторным произведением $\overline{A_1 A_3} \times \overline{A_1 A_2} = \{12;\ 24; -8\}$:

$$\overline{N} = \{3;\ 6; -2\} \,\|\, \{12;\ 24; -8\}$$



Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(2;\ 3;\ 1)$:

$$3 \cdot (x-2) + 6 \cdot (y-3) - 2 \cdot (z-1) = 0,$$

$3x + 6y - 2z - 22 = 0$ – искомое уравнение грани $(A_1 A_2 A_3)$.

г) Найдём векторное произведение векторов $\overline{N}_{A_1A_2A_3}\{3;\ 6;-2\}$ и $\overline{A_1A_2}$, которое определяет вектор, перпендикулярный вектору нормали плоскости $A_1\ A_2\ A_3$ (параллельный плоскости $(A_1A_2A_3)$) и ребру A_1A_2:

$$\overline{N}_{A_1A_2A_3}\times\overline{A_1A_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & -2\\ 2 & -2 & -3\end{vmatrix}==\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}6 & -2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & 6\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\cdot(-22)-\vec{j}\cdot(-5)+\vec{k}\cdot(-18)=\{-22;\ 5;-18\}-$$

– направляющий вектор искомой прямой.

Тогда: $\dfrac{x-6}{-22}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-7}{-18}$ – уравнение искомой прямой $\ell(A_3,\perp A_1A_2)$.

д) Чтобы найти координаты точки M – пересечения прямых A_3M и A_1A_2, уравнения прямых представим в параметрическом виде

$$A_1A_2:\begin{cases}x=2t_1+2,\\ y=-2t_1+3,\\ z=-3t_1+1.\end{cases}\qquad A_3M:\begin{cases}x=-22t_2+6,\\ y=5t_2+3,\\ z=-18t_2+7.\end{cases}$$ и решим систему:

$$\begin{cases}-22t_2+6=2t_1+2,\\ 5t_2+3=-2t_1+3,\\ -18t_2+7=-3t_1+1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2t_1+22t_2=4,\\ 2t_1+5t_2=0,\\ 3t_1-18t_2=-6.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1+11t_2=2,\\ 2t_1+5t_2=0,\\ t_1-6t_2=-2.\end{cases}\Rightarrow$$

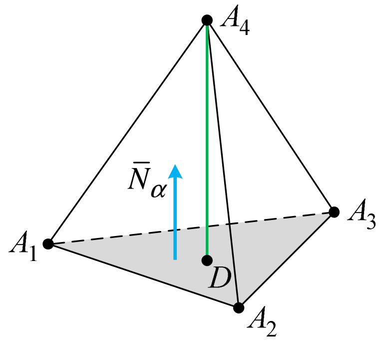
$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 11 & 2\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & -6 & -2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 11 & 2\\ 0 & -17 & -4\\ 0 & -17 & -4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 11 & 2\\ 0 & -17 & -4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 11 & 2\\ 0 & 1 & 4/17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -10/17\\ 0 & 1 & 4/17\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\quad t_1=-10/17,\quad t_2=4/17.$$

Подставляя t_1 в параметрические уравнения прямой A_1A_2 (или t_2 в параметрические уравнения прямой A_3M), получим $M\left(\dfrac{14}{17};\dfrac{71}{17};\dfrac{47}{17}\right)$.

е) Высота тетраэдра, опущенная из вершины $A_4(-5;-4;8)$ на грань $(A_1A_2A_3)$, перпендикулярна грани. Следовательно, направляющий вектор высоты A_4D определяется вектором нормали плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\overline{S}=\overline{N}_{A_1A_2A_3}\{3;\ 6;-2\}.$$



Уравнение высоты A_4D: $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z-8}{-2}$.

ж) Найдём расстояние от точки $A_4(-5;-4;\,8)$ до плоскости $(A_1\,A_2\,A_3)$, заданной уравнением $3x+6y-2z-22=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot(-5)+6\cdot(-4)-2\cdot 8-22|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{|-77|}{\sqrt{49}}=\frac{77}{7}=11.$$

з) Найдём точку пересечения прямой A_4D, представленной в параметрическом виде, и плоскости $A_1\,A_2\,A_3$:

$$\begin{cases}x=3t-5,\\ y=6t-4,\\ z=-2t+8,\\ 3x+6y-2z-22=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3t-5,\\ y=6t-4,\\ z=-2t+8,\\ 3\cdot(3t-5)+6\cdot(6t-4)-2\cdot(-2t+8)-22=0.\end{cases}\Rightarrow$$

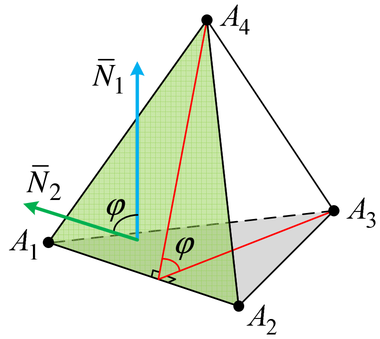
$$\Rightarrow\begin{cases}x=3t-5,\\ y=6t-4,\\ z=-2t+8,\\ t=\dfrac{11}{7}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-{}^{2}\!/_{7},\\ y={}^{38}\!/_{7},\\ z={}^{34}\!/_{7},\\ t={}^{11}\!/_{7}.\end{cases}\Rightarrow O\left(\frac{-2}{7};\frac{38}{7};\frac{34}{7}\right)$$ – точка пересечения.

Точка O является серединой отрезка, соединяющего точку A_4 и симметричную ей относительно плоскости $(A_1A_2A_3)$ точку K. Следовательно, справедливо матричное уравнение:

$$\frac{A_4+K}{2}=O\;\Rightarrow\;K=2\cdot O-A_4=2\cdot\begin{pmatrix}-{}^{2}\!/_{7}\\ {}^{38}\!/_{7}\\ {}^{34}\!/_{7}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\ -4\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^{31}\!/_{7}\\ {}^{104}\!/_{7}\\ {}^{12}\!/_{7}\end{pmatrix}.$$

и) Уравнение грани $(A_1 A_2 A_3)$:

$$3x+6y-2z-22=0, \text{ нормаль } \overline{N}_1\{3;6;-2\}.$$



Составим уравнение грани $(A_1 A_2 A_4)$, например, как уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 4-2 & 1-3 & -2-1 \\ -5-2 & -4-3 & 8-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - (y-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-35\cdot(x-2)+7\cdot(y-3)+28\cdot(z-1)=0 \quad \Big| : (-7)$$

$$5\cdot(x-2)-(y-3)-4\cdot(z-1)=0.$$

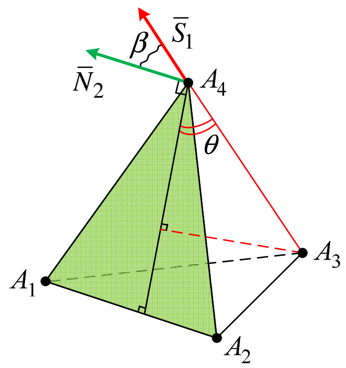
Т. о., уравнение грани $(A_1 A_2 A_4)$: $5x-y-4z-11=0$, $\quad \overline{N}_2\{5;-1;-4\}$.

Угол между гранями $(A_1 A_2 A_4)$ и $(A_1 A_2 A_3)$ вычислим по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|} = \frac{\left|3\cdot 5+6\cdot(-1)-2\cdot(-4)\right|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4)^2}} = \frac{17}{7\cdot\sqrt{42}}.$$

к) Грань $(A_1 A_2 A_4)$: $5x-y-4z-11=0$, нормаль $\overline{N}_2\{5;-1;-4\}$.

В качестве направляющего $\overline{S}$ вектора прямой $A_3 A_4$ возьмём вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{A_3 A_4} = A_4 - A_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.



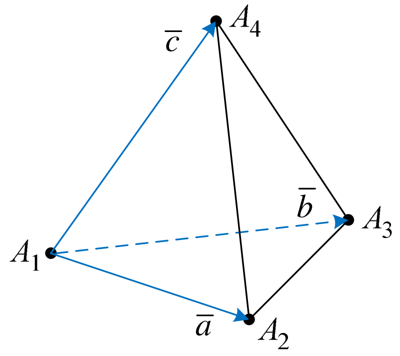
Угол между ребром $A_3 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_4$ вычислим по формуле:

$$\sin\theta = \cos\beta = \frac{\left|\overline{S}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{S}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|}, \text{ где } \beta = 90^\circ - \theta.$$

$$\sin\theta = \frac{\left|-11\cdot 5-7\cdot(-1)+1\cdot(-4)\right|}{\sqrt{(-11)^2+(-7)^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2+(-4}}$$

$$= \frac{52}{\sqrt{171}\cdot\sqrt{42}} = \frac{52}{3\sqrt{798}}.$$

л) Найдем смешанное произведение векторов:



$$\left(\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} =$$

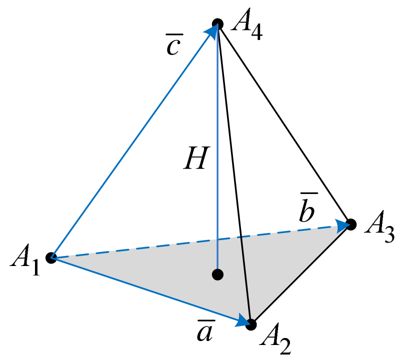
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 84 + 140 + 84 = 308.$$

Или: $\left(\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = \left(\overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_2}\right) \cdot A_1A_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 308.$

Получаем: $V_{тетраэдда} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \right| = \frac{308}{6} = \frac{154}{3}.$

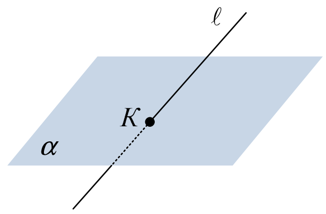
Замечание. Высоту тетраэдра, опущенную из вершины A_4 на грань $(A_1A_2A_3)$ можно найти по формуле: $H_{тетраэдда} = \frac{\left|\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)\right|}{\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|}$, где $\left|\overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_2}\right| = 28$ (смотри п.б); $\left|\left(\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)\right| = 308.$



Тогда: $H_{тетраэдда} = \frac{\left|\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)\right|}{\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|} = \frac{308}{28} = 11$ – расстояние от точки A_4 до грани $(A_1A_2A_3)$.

Пример 2.30. Найти точку пересечения прямой $\ell: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ и плоскости $\Pi: x + 2y - z - 2 = 0$.

Решение. Пусть K – точка пересечения прямой ℓ и плоскости Π.



Запишем уравнение прямой ℓ в параметрическом виде: $\begin{cases} x = -t - 2, \\ y = t + 1, \\ z = 2t - 3. \end{cases}$

При фиксированном $t = t'$ данное уравнение задает координаты т. K:

$$\begin{cases} x_k = -t' - 2, \\ y_k = t' + 1, \\ z_k = 2t' - 3. \end{cases}$$

С другой стороны, точка $K \in \Pi$, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости Π: $x_k + 2y_k - z_k - 2 = 0$.

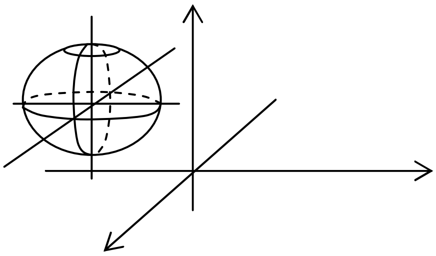
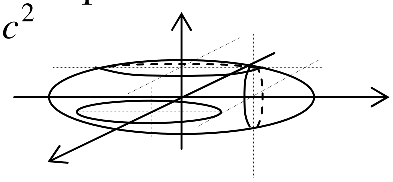
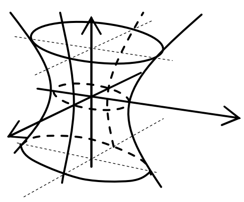
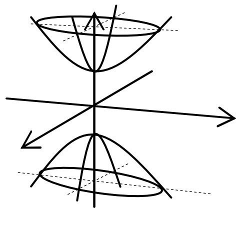
Подставим в уравнение плоскости координаты точки K:

$$(-t' - 2) + 2(t' + 1) - (2t' - 3) - 2 = 0,$$
$$-t' - 2 + 2t' + 2 - 2t' + 3 - 2 = 0,$$
$$-t' + 1 = 0,$$
$$t' = 1.$$

Тогда координаты точки K: $\begin{cases} x_k = -1 - 2 = -3, \\ y_k = 1 + 1 = 2, \\ z_k = 2 \cdot 1 - 3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \quad K(-3; 2; -1).$

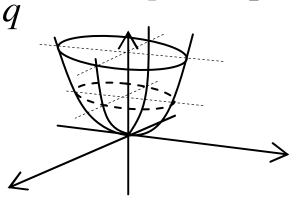
2.7. Поверхности 2-го порядка –

это ГМТ пространства, координаты которых в ПДСК являются уравнениями второго порядка

сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 	*трехосный эллипсоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 
однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 	*двуполостный гиперболоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 

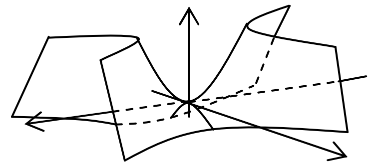
эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad p>0,\, q>0$$



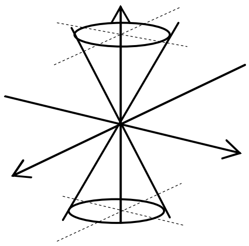
гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$



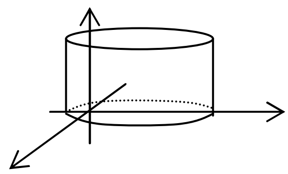
конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



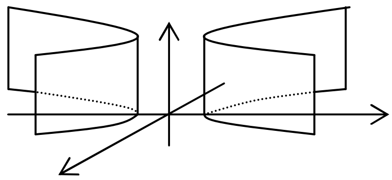
эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



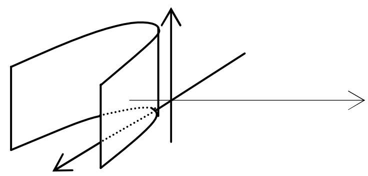
гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



параболический цилиндр

$$x^2=2\,p\,y$$



2.8. Приведение уравнений кривой и поверхности к каноническому виду через преобразование ЛП

Пример 2.31. Привести уравнение кривой

$$9x^2+19xy+16y^2-120x+90y=0$$

к каноническому виду. Указать новую систему координат.

*Решение**.***

Запишем систему для нахождения центра $\begin{cases}9x+12y-60=0,\\ 12x+16y+45=0.\end{cases}$

Так как определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{vmatrix}=0$, то искомая кривая − нецентральная.

Выполним ортогональное преобразование, приводящее матрицу квадратичной формулы $9x^2+24xy+16y^2$ к диагональному виду.

Для этого найдем собственные числа λ_1, λ_2 и соответствующие собственные вектора матрицы квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25$.

Определим собственные вектора:

$$\lambda_1 = 0: \begin{cases} 9x + 12y = 0, \\ 12x + 16y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_1(4;-3).$$

$$\lambda_2 = 25: \begin{cases} (9-25)\cdot x + 12y = 0, \\ 12x + (16-25)\,y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_2(3;4).$$

Таким образом, квадратичная форма $9x^2 + 24xy + 16y^2$ в новом ортонормированном базисе $\vec{e}_1(4/5;-3/5)$, $\vec{e}_2(3/5;4/5)$ примет вид:

$$0\cdot\tilde{x}^2 + 25\tilde{y}^2 = 25\tilde{y}^2.$$

Свободный член при повороте не изменяется.

Вычислим новые коэффициенты линейной части уравнения кривой:

$$\tilde{a}_{13} = \frac{4}{5}a_{13} - \frac{3}{5}a_{23} = \frac{4}{2}(-60) - \frac{3}{5}\cdot 45 = -75,$$

$$\tilde{a}_{23} = \frac{3}{5}a_{13} + \frac{4}{5}a_{23} = \frac{3}{5}(-60) + \frac{4}{5}\cdot 45 = 0.$$

Исходное уравнение в новом базисе примет вид

$$25\tilde{y}^2 - 2\cdot 75\tilde{x} + 2\cdot 0\cdot\tilde{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 25\tilde{y}^2 - 150\tilde{x} = 0 \ \Rightarrow \ \tilde{y}^2 = 6\tilde{x}$$

– каноническое уравнение параболы в новом ортонормированном базисе $\vec{e}_1(4/5;-3/5)$, $\vec{e}_2(3/5;4/5)$ с вершиной в начале координат.

Пример 2.32. Привести уравнение поверхности к каноническому виду

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 16z + 16 = 0.$$

Указать новую систему координат.

Решение. Запишем систему для нахождения центра поверхности

$$\begin{cases} 7x - 2y = 3, \\ -2x + 6y - 2z = 12, \\ -2y + 5z = -9. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 12 & 6 & -2 \\ -9 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ -2 & 12 & -2 \\ 0 & -9 & 5 \end{vmatrix} = 324; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 12 \\ 0 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 162.$$

Система имеет единственное решение:

$$x = \frac{162}{162} = 1, \quad y = \frac{324}{162} = 2, \quad z = \frac{-162}{162} = -1.$$

Следовательно, центр этой поверхности – точка $C(1;2;-1)$.

Вычислим, как изменился свободный член при параллельном переносе системы координат в центр поверхности:

$$7 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 5 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 - 24 \cdot 2 + 16 \cdot (-1) + 16 = -18.$$

Приведем к диагональному виду квадратичную форму

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Найдем её собственные числа, для чего решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 9.$$

Определим соответствующие собственные вектора:

$$\lambda_1 = 3, \quad \begin{cases} (7-3) \cdot x - 2y = 0, \\ -2x + (6-3) \cdot y - 2z = 0, \\ -2y + (5-3) \cdot z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Жордано-Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного вектора можно взять вектор $\vec{e}_1(1;2;2)$,

$$\lambda_2 = 6, \quad \begin{cases} (7-6) \cdot x - 2y = 0, \\ -2x + (6-6) \cdot y - 2z = 0, \\ -2y + (5-6) \cdot z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + z = 0, \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix},$$

В качестве второго собственного вектора можно взять $\vec{e}_2(2;1;-2)$,

$$\lambda_3 = 9, \quad \begin{cases} (7-9)\cdot x - 2y = 0, \\ -2x + (6-9)\cdot y - 2z = 0, \\ -2y + (5-9)\cdot z = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + 3y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Третий собственный вектор – $\vec{e}_3(2;-2;1)$.

Так как собственные числа различны, то собственные вектора ортогональны.

В новом ортонормированном базисе:

$$\vec{e}_1\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right),\ \vec{e}_2\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right),\ \vec{e}_3\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

квадратичная форма примет диагональный вид: $3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2$.

После ортогонального преобразования и параллельного переноса в точку $C(1;\ 2;-1)$ искомая поверхность примет вид:

$$3\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2 - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{x}^2}{6} + \frac{\tilde{y}^2}{3} + \frac{\tilde{z}^2}{2} = 1$$

– каноническое уравнение эллипсоида в новом ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, приложенном к точке $C(1;\ 2;-1)$.

Библиографический список

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс. - Санкт-Петербург: Лань, 2006. - 960 с.: ил.

2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: Учебное пособие – Санкт-Петербург: Лань, 2007. - 688 с.

3. Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А. Практическое руководство по аналитической геометрии. Математика. Учеб. пособие / ВолгГТУ, ВПИ (филиал), Волгоград, 2003. – 41с.

4. Александрова Л.А, Александрова В.А, Зотова С.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А., Короткова Н. Н.. Математика. I часть: Учебное пособие (для студентов заочной формы обучения) / – Волгоград, РПК «Политехник», 2003. – 84с.

5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2000. – 288 с., с илл.

6. Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Рольф, 2001. – 576 с., с илл.

Электронное учебное издание

Виктория Борисовна **Светличная**
Татьяна Александровна **Матвеева**
Джамиля Алиевна **Мустафина**
Ирина Викторовна **Ребро**

Математика. Часть 2

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2018 г. Поз. № 38.
Подписано к использованию 22.02.2018. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 3,5.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. им. В. И. Ленина, 28. корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.