Ребро И.В., Мустафина Д.А.,

Светличная В.Б., Матвеева Т.А.

Математика

Часть 4

Волжский

2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Ребро И.В., Мустафина Д.А., Светличная В.Б., Матвеева Т.А.

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ IV

Электронное учебное пособие

2018

УДК 51(075.5)
ББК 22.1
М 34

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент филиала ГОУВПО
«Московский энергетический институт
(технический университет)».
Капля Е.В.
кандидат физико-математических наук,
зав. кафедрой «Прикладная математика и информатика»
ВГИ (филиал) Волгоградского государственного университета.
Полковников А. А.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Ребро, И.В.

Математика. Часть 4 [Электронный ресурс] : учебное пособие / Ребро И. В., Мустафина Д. А., Светличная В. Б., Матвеева Т.А. ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 911 КБ). – Волжский, 2018. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-2894-6

Содержит основные теоретические положения, примеры решения задач, тестовые задания по дисциплине «Математика» и «Математический анализ».

Предназначено для студентов очной, очно-заочной и заочной формы обучения.

Ил. 18, табл. 3, библиограф.: 17 назв.

ISBN 978-5-9948-2894-6

© Волгоградский государственный технический университет, 2018
© Волжский политехнический институт, 2018

§1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1.1. Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, $i^2 = -1$ – ***мнимая единица***.

Число x называется ***действительной частью числа*** z и обозначается $x = \mathrm{Re}(z)$, а число y – ***мнимой частью*** и обозначается $y = \mathrm{Im}(z)$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными***, если равны их действительные и мнимые части, то есть $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются ***сопряженными*** (или *комплексно-сопряженными*).

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $\mathrm{M}(x; y)$ или радиус-вектором $\overrightarrow{OM}\{x; y\}$ плоскости Oxy, такой что $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ и наоборот (рис. 1). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью***. Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + yi = iy$, называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой*** осями.

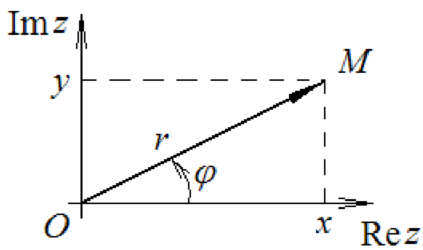

Рисунок 1

Свойства арифметических операций над комплексными числами.

1. При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиус-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.
2. Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а аргумент – сумме (разности) аргументов этих чисел.

1.2. Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа.

С каждой точкой $z = x + iy$ ($\mathrm{M}(x; y)$) комплексной плоскости связан радиус-вектор $\overline{OM}$, длина которого называется ***модулем комплексного числа*** и обозначается $|z|$ или r и находится по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина угла между положительным направлением оси Ox и вектором $\overline{OM}$ называется ***аргументом комплексного числа*** и обозначается $\mathrm{Arg}(z)$ или φ. Причем $\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k$ – величина многозначная $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, где $\arg z$ – ***главное значение аргумента***, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg(z) \le \pi$ (иногда $0 \le \arg(z) < 2\pi$). Из формулы $\mathrm{tg}(\varphi) = \dfrac{y}{x}$ (рис. 1) получаем, что

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0 \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y > 0 \\ arctg\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

Так как $x = r\cos(\varphi)$ *и* $y = r\sin(\varphi)$, то комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде $z = r\cos(\varphi) + i \cdot r\sin(\varphi)$ или $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, называемое ***тригонометрической формой***.

Используя ***формулу Эйлера*:** $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, комплексное число $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ можно представить в ***показательной*** (***экспоненциальной***) форме $z = re^{i\varphi}$.

1.3. Арифметические действия над комплексными числами

- Для алгебраической формы записи

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Сумма (разность) комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2).$$

2. Произведение комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

3. Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) + i(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \ (z_2 \ne 0).$$

Пример 1. Найти $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Решение.

$z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$;

$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i$;

$z_1 \cdot z_2 = (12 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 56 - 33i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63}{25} i = 0{,}64 + 2{,}52 i.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{1+2i}{1-2i}-(2-3i)^2+\frac{2-i}{1+3i}$

Решение. Вычисления выполним по действиям:

1) $\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+4i+4i^2}{1-4i^2}=\frac{1+4i-4}{1+4}=\frac{-3+4i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$,

2) $(2-3i)^2=4-12i+9i^2=4-12i-9=-5-12i$,

3) $\frac{2-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{2-i-6i+3i^2}{10}=\frac{2-7i-3}{10}=-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$,

4) $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i+5+12i-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i=\frac{43}{10}+\frac{121}{10}i$

Ответ: $\frac{43}{10}+\frac{121}{10}i$

Пример 3. Решить уравнение $(1+i+x)x-(2i+3)iy=0$

Решение. Раскроем скобки и сгруппируем подобные слагаемые:

$x+ix+x^2+2y-3iy=0$

$(x+x^2+2y)+(x-3y)i=0$

Составим систему из двух уравнений, приравняв действительные и мнимые части комплексных чисел, стоящих справа и слева:

$$\begin{cases}x+x^2+2y=0\\ x-3y=0\end{cases}\quad \begin{cases}9\mathrm{y}^2+5\mathrm{y}=0\\ \mathrm{x}=3\mathrm{y}\end{cases}\quad \begin{cases}\mathrm{y}_1=0\quad \mathrm{y}_2=-\frac{5}{9}\\ x_1=0\quad \mathrm{x}_2=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

Ответ: $\mathrm{x}_1=0\quad \mathrm{y}_1=0$

$x_2=-\frac{5}{3}\quad \mathrm{y}_2=-\frac{5}{9}$

- Для тригонометрической формы записи

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

1. $z_1z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.
2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$.
3. При возведении комплексного числа в натуральную степень n, используют ***формулу Муавра***: $[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.
4. Корень из комплексного числа извлекаются по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\text{ где } k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

При $k=n,\ n+1,\ \ldots$ значения корня будут повторяться. Таким образом, корень $n-ой$ степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 4. Комплексные числа $z_1=-1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Найдем модули и аргументы данных комплексных чисел:

$$r_1=\left|z_1\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2};\qquad \left.\begin{array}{l}\mathrm{tg}(\varphi_1)=\dfrac{1}{-1}=-1\\ \varphi_1\in \text{II четв.}\end{array}\right|\Rightarrow \varphi_1=\frac{3\pi}{4}.$$

$$r_2=\left|z_2\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2;\qquad \left.\begin{array}{l}\mathrm{tg}(\varphi_2)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \varphi_2\in \text{I четв.}\end{array}\right|\Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{6}.$$

Тогда

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Пример 5. Найти $(-1+i)^{20}$.

Решение. Комплексное число $z=-1+i$ представляется в тригонометрической форме следующим образом: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Поэтому по формуле Муавра:

$$(-1+i)^{20}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=2^{10}(\cos 15\pi+i\sin 15\pi)=1024(-1+0i)=-1024.$$

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение. Запишем число в тригонометрической форме

$$z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Теперь воспользуемся формулой извлечения корня

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\ \mathrm{k}=0,1,2.$$

Отсюда получаем три значения корня:

k=0, $z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi_0=\frac{\pi}{4}$

k=1, $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{12}\right)$, $\varphi_1=\frac{11\pi}{12}$

k=2, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{19\pi}{12}\right)$, $\varphi_2=\frac{19\pi}{12}$

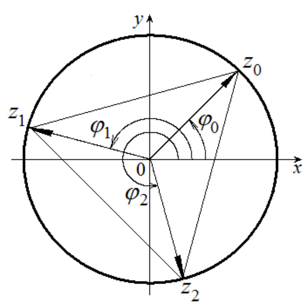

Рисунок 2

Изобразим полученные значения на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ (рис. 2). Как видно из рисунка, z_0, z_1, z_2 являются вершинами правильного треугольника.

Замечание. Если все расчеты проделаны верно, то на чертеже получается правильный многоугольник ($\sqrt[3]{\ }$ – треугольник, $\sqrt[4]{\ }$ – квадрат, $\sqrt[5]{\ }$ – пятиугольник и т.д.).

- Для показательной формы записи

Пусть $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$.

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.
3. При возведении комплексного числа в натуральную степень n, используют ***формулу Муавра*: **$\left[r \cdot e^{i\varphi}\right]^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$.
4. Корень из комплексного числа извлекаются по формуле: $\sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}$.

Пример 7. Найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если даны комплексные числа $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 6e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i} = 6e^{\frac{5\pi}{6}i}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{3}{2}e^{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)i} = 1{,}5e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

1.4. Основные понятия функции комплексного переменного

Понятие функции комплексного переменного вводится по аналогии с понятием функции вещественной переменной.

Величина w называется ***функцией комплексного переменного*** z в области *D****,*** если задано правило, согласно которому каждому числу (точке) z**,** взятому из области *D*, поставлено в соответствие одно или несколько значений w**.**

Это соответствие обозначается, как и для действительной переменной, $w = f(z)$. Переменную *z* называют независимой переменной или аргументом, а *w*-зависимой переменой или функцией. Так как при каждом значении $z \in D$ *w* есть комплексное число, то можно записать, что

$w = f(z) = u + iv = u(x; y) + i \cdot v(x; y)$, где $u = u(x; y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v = v(x; y) = \operatorname{Im} f(z)$

Функцию $u(x; y)$ называют ***действительной частью функции*** $f(z)$, а $v(x; y)$ ***– мнимой частью.***

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Если каждому $z \in D$ соответствует только одно значение w, то функцию $w = f(z)$ называется ***однозначной***, а если несколько – ***многозначной.***

Множество D называется ***областью определения*** функции $w = f(z)$, множество всех значений $f(z)$, соответствующих всем значениям $z \in D$, называется ***областью значений*** этой функции обозначается E. Геометрически заданную на D функцию можно рассматривать как отображение области D в некоторую (однозначную или многозначную) область E. Говорят, что функция f отображает D на E (рис.3).

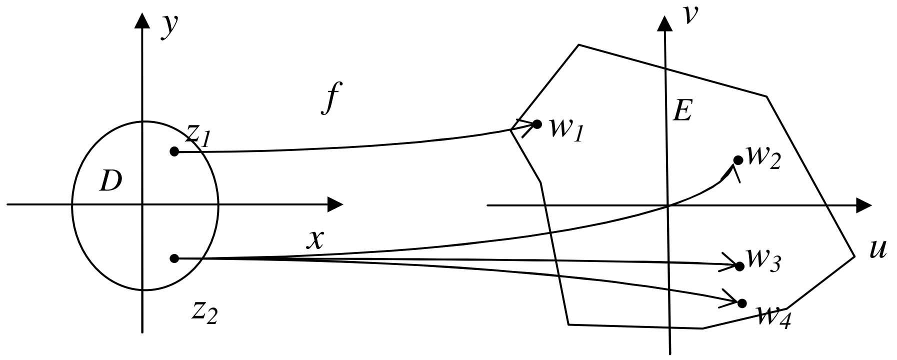

Рисунок 3

Обратное отображение $E \to D$ определяет обратную функцию $z = \varphi(w)$.

Пример 8. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^2$.

Решение. Функцию $w = z^2$ можно записать в виде:

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Отсюда следует: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

1.5. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под δ - ***окрестностью точки*** z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Число $\boldsymbol{w_0}$ называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$ удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Это определение коротко можно записать так: $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Из определения следует, что если предел w_0 существует, то существуют и пределы: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x;y)=u_0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x;y)=v_0$. Верно и обратное утверждение.

Замечание. Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного. Так, если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют пределы в точке $z_0\in D$, то:

1) $\lim\limits_{z\to z_0}(c_1 f_1(z)\pm c_2 f_2(z))=c_1\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\pm c_2\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$, где c_1, c_2 - постоянные;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot f_2(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$;

3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)}$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)\neq 0$.

Пусть функция $w=f(z)$ определена в точке $z=z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta f(z)=0$.

Функция $f(z)$ ***непрерывна в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

1.6. Основные элементарные функции комплексного переменного

Определим основные элементарные функции комплексного переменного $z=x+iy$.

Показательная функция

Показательная функция $w=e^z$ определяется формулой:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{1}$$

Свойства показательной функции:

1. $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.
2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$.
3. $(e^z)^n=e^{nz}$ (n$\in$ N).

Замечание.

1. Учитывая, что $\left|e^z\right|=e^x$, а $e^x\neq 0$, утверждаем, что показательная функция e^z нигде в нуль не обращается, то есть $e^z\neq 0$.

2. Выражение e^z при $z \to \infty$ не имеет смысла в случаях: $\lim\limits_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ (x \to -\infty)}} e^z = 0$, $\lim\limits_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ (x \to +\infty)}} e^z = \infty$.

Показательная функция комплексного переменного обладает специфическим свойством: она является ***периодической*** с мнимым основным периодом $2\pi \cdot i$. Так как $e^{z+2\pi \cdot i} = e^z \cdot e^{2\pi \cdot i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$, то есть $e^{z+2\pi \cdot i} = e^z$.

Логарифмическая функция

Эта функция определяется как функция, обратная показательной: число w называется ***логарифмом числа*** $z \neq 0$, ели $e^w = z$, обозначается $w = Ln(z)$. Так как значения показательной функции $e^w = z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w = Ln(z)$ определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$ (таким образом, выражение $Ln(-2)$ имеет смысл).

Положив $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получим, согласно определению логарифмической функции, $e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi}$, или $e^u \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi}$. Отсюда имеем: $e^u = r, v = \varphi + 2k\pi$, или $u = \ln(r)$, $v = \varphi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Следовательно, $w = Ln(z) = u + iv = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$ (2)

тогда $Ln(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi)$ или, $Ln(z) = \ln|z| + iArg(z)$, где $Arg(z) = \arg(z) + 2k\pi$.

Формула (2) показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, то есть $w = Ln(z)$ – многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу (2) определенное значение k. Положив $k = 0$, получим однозначную функцию, которую называют ***главным значением*** логарифма $Ln(z)$ и обозначают символом $\ln(z)$: $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, где $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. (3)

Если z- действительное положительное число, то $\arg(z) = 0$ и $\ln(z) = \ln|z|$, тогда формулу (2) можно переписать так: $Ln(z) = \ln(z) + 2k \cdot \pi \cdot i$.

Свойства логарифмической функции $w = Ln(z)$:

1. $Ln(z_1 \cdot z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$,
2. $Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Ln(z_1) - Ln(z_2)$,
3. $Ln(z)^n = n \cdot Ln(z)$,
4. $Ln(\sqrt[n]{z}) = \dfrac{1}{n} \cdot Ln(z)$.

Доказательство свойства 1:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1 \cdot z_2) + iArg(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(Arg(z_1) + Arg(z_2)) =$$
$$= (\ln|z_1| + iArg(z_1)) + (\ln|z_2| + iArg(z_2)) = Ln(z_1) + Ln(z_2),$$

Пример 9. Вычислить *Ln*(*-1*) и *1n*(*-1*); *1n* (*2i).*

Решение: Для числа $z=-1$ имеем $|z|=1$, $\arg z=\pi$. Следовательно,
$Ln(-1)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=i\pi(2k+1)$,
$\ln(-1)=\pi\cdot i$ (формулы (2) и (3)),
$\ln(2i)=\ln|2i|+i\arg(2i)=\ln(2)+i\dfrac{\pi}{2}$.

Степенная функция $w=z^n$

Если n - натуральное число, то степенная функция определяется равенством $w=z^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$. Функция $w=z^n$ - однозначная.

Если $n=\dfrac{1}{q}$ ($q\in N$), то в этом случае

$$w=z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg(z)+2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\frac{\arg(z)+2k\pi}{q}\right)\right),\text{ где } k=0,1,2,...,q-n.$$

Функция $w=z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная (q - значная) функция.

Если $n=\dfrac{p}{q}$, где $p,q\in N$, то степенная функция определяется равенством:

$$w=z^{\frac{p}{q}}=(z^{\frac{1}{q}})^p=\sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\left(\frac{p(\arg(z)+2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\frac{p(\arg(z)+2k\pi}{q}\right)\right),$$

Функция $w=z^{\frac{p}{q}}$ - многозначная.

Замечание. Степенная функция $w=z^a$ с произвольным комплексным показателем $a=\alpha+i\beta$ определяется равенством: $w=z^a=e^{aLn(z)}$.

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного аргумента $z=x+iy$ определяются равенствами:

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad tg(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)},\quad ctg(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

При действительных z эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного. Так, при $z=x$ $(y=0)$

$$\sin(z)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{1}{2i}(\cos(x)+i\sin(x)-(\cos(x)-i\sin(x)))=\frac{1}{2i}2i\sin(x)=\sin(x).$$

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного. В частности,

$\sin^2 z+\cos^2 z=1$
$\sin 2z=2\sin z\cdot\cos z$
$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$
$\sin(z+2\pi)=\sin z$

$\cos(-z)=\cos z$
$\sin(-z)=-\sin z$
$tg(z+\pi)=tgz$
$tg2z=\dfrac{2tgz}{1-tg^2 z}$

$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$ $\qquad\qquad$ $\sin\left(z+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos z$

$\cos z = 0$ *при* $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ _$(k=0,\pm1,\pm2,...)$ и т.д.

Доказательство свойства 1:

$$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=$$

$$=\frac{-e^{2iz}+2-e^{-2iz}+e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Замечание. Тригонометрические функции $\sin(z)$ и $\cos(z)$ в комплексной плоскости z неограниченны: $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}\sin(z)=\infty,\ \lim\limits_{\operatorname{Im} z\to\pm\infty}\cos(z)=\infty.$

Например, $\cos(i)=\frac{e+e^{-1}}{2}\approx 1{,}54>1,\quad \cos(3i)>10.$

Гиперболические функции

Функции определяются равенствами

$$sh(z)=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad ch(z)=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad th(z)=\frac{sh(z)}{ch(z)},\quad cth(z)=\frac{ch(z)}{sh(z)}.$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями: $sh(iz)=i\sin(z)$, $\sin(z)=-i\cdot sh(iz)$, $ch(iz)=\cos(z)$, $th(iz)=i\cdot th(z)$, $cth(iz)=-i\cdot cth(z)$.

Формулы, связывающие гиперболические функции:

1. $(-ish(iz))^2+(ch(iz))^2=1$, или $-sh^2(iz)+ch^2(iz)=1$.
2. $ch^2(z)-sh^2(z)=1$.
3. $ch(2z)=ch^2(z)+sh^2(z)$.
4. $sh(2z)=2sh(z)\cdot ch(z)$.
5. $ch(z_1+z_2)=ch(z_1)ch(z_2)+sh(z_1)sh(z_2)$.
6. $ch(-z)=ch(z),\ sh(-z)=-sh(z),\ sh(z)+ch(z)=e^{z}$ и т. д.

Замечание: функции $sh(z)$ и $ch(z)$ периодические с периодом $2\pi\cdot i$, функции $th(z)$ и $cth(z)$ имеют период $\pi\cdot i$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Число ***w*** называется ***арксинусом*** числа z, если $z=\sin(w)$, и обозначается $w=Arc\sin(z)$.

Выведем формулу, используя определение синуса: имеем $z=\sin(w)=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$, или $e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0$, отсюда, $e^{iw}=iz+\sqrt{(iz)^2+1}$ (то есть $e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}$ (перед корнем можно не писать знак $\pm$, так как $\sqrt{1-z^2}$ имеет два значения)), тогда $iw = Ln(zi + \sqrt{1-z^2})$, или $w = \frac{1}{i} Ln(zi + \sqrt{1-z^2})$. Получаем:

$$w = Arc\sin(z) = -iLn(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Функция $w = Arc\sin(z)$ многозначна (бесконечнозначна).

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции:

$$Arc\cos(z) = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arctg(z) = -\frac{i}{2} Ln\frac{i-z}{i+z},\quad Arcctg(z) = \frac{i}{2} Ln\frac{z-i}{z+i},\quad (z \neq \pm i).$$

Функции, обратные гиперболическим, обозначаются соответственно: $w = Arsh(z)$ (ареасинус), $w = Arch(z)$ (ареакосинус), $w = Arth(z)$ (ареатангенс), $w = Arcth(z)$ (ареакотангенс). Все эти функции бесконечнозначны.

Обратные гиперболические функции имеют следующие выражения:

$$Arsh(z) = Ln(z + \sqrt{1+z^2}),$$

$$Arch(z) = Ln(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$Arth(z) = \frac{1}{2} Ln\frac{1+z}{1-z},$$

$$Arcth(z) = \frac{1}{2} Ln\frac{z+1}{z-1}.$$

1.7. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Эйлера-Даламбера

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \qquad (4)$$

если он существует, называется ***производной функции*** $f(z)$ ***в точке*** z, а функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z.

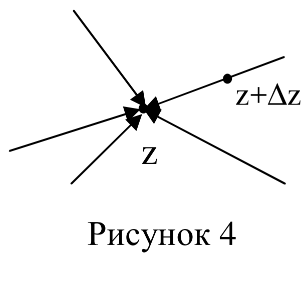

Рисунок 4

Подчеркнем, что в равенстве (4) Δz любым образом стремится к нулю, т.е. точка $z + \Delta z$ может приближаться к точке z по любому из бесконечного множества различных направлений (рис. 4) (в аналогичной ситуации для функции одного действительного переменного точка $x + \Delta x$ приближается к точке x лишь по двум направлениям: слева и справа).

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует ее непрерывность в этой точке (отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ может стремиться к конечному пределу $f'(z)$ лишь при условии, что и $\Delta w \to 0$). Обратное утверждение не имеет места.

Теорема (условие дифференцируемости функции в данной точке). Если функция $w = u(x;y) + iv(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Равенства (5) называются ***условиями Эйлера - Даламбера*** (или условиями ***Коши-Римана***).

С учетом условий Эйлера-Даламбера (5) производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad & f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad & f'(z) &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Следствие. Условие Эйлера – Даламбера для функции заданной в полярных координатах: $\frac{\partial u(r;\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v(r;\varphi)}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v(r;\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u(r;\varphi)}{\partial \varphi}$. И тогда производная вычисляется по формулам: $f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z. Это означает, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верно следующее:

1. $(f_1(z) \pm f_2(z))' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$,
2. $(f_1(z)\cdot f_2(z))' = f_1'(z)\cdot f_2(z) + f_1(z)\cdot f_2'(z)$,
3. $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z)\cdot f_2(z) - f_1(z)\cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}$ $\quad$ ($f_2(z) \neq 0$)
4. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z, а $f(w)$ дифференцируема в точке $w = \varphi(z)$, то $(f(\varphi(z)))' = f_\varphi'(\varphi)\cdot\varphi_z'(z)$.

5. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $(f^{-1}(w))' \neq 0$, то $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1}(w))'}$, где $f^{-1}(w)$ - функция, обратная функции $f(z)$.

Теорема (дифференцируемость основных элементарных функций комплексного переменного). Функции $w = e^z$, $w = \sin(z)$, $w = \cos(z)$, $w = sh(z)$, $w = ch(z)$, $w = z^n$ ($n \in N$) дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости; функции $w = tg(z)$ и $w = th(z)$ также дифференцируемы в любой точке плоскости, кроме точек $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ и $z = (\dfrac{\pi}{2} + \pi k) \cdot i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) соответственно; для функций $w = Ln(z)$, $w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z функцией.

1.8. Аналитическая функция. Дифференциал

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** (голоморфной) ***в точке*** z, если она дифференцируема (выполнены условия Эйлера-Даламбера) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Замечание. Условие аналитичности в точке не совпадает с условием дифференцируемости функции в этой же точке (первое условие - более сильное).

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются правильными точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми точками*** этой функции.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$.

Отсюда следует, что $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha.$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тогда приращение функции можно записать так: $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$. Если $f'(z) \neq 0$, то: первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z \to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz; второе слагаемое $\alpha \Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz. Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $w = f(z)$.

Дифференциалом dw аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная часть ее причащения: $dw = f'(z)\Delta z$ или $dw = f'(z)dz$ (так как при $w = z$ будет $dz = z'\Delta z = \Delta z$). Отсюда следует: $f'(z) = \dfrac{dw}{dz}$ – производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0\right)$.

Действительно, дифференцируя первое из равенств Эйлера-Даламбера по y, а второе по x, получаем: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, откуда $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются ***гармоническими функциями***.

Пример 10. Проверить, является ли функция $w = z^2$ аналитической, если да, то найти ее производную.

Решение: Находим действительную $\operatorname{Re} w = u$ и мнимую $\operatorname{Im} w = v$ части функции: $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$ Получаем: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Проверяем условия Эйлера-Даламбера (5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Условия (5) выполняются во всех точках комплексной плоскости z. Функция $w = z^2$ дифференцируема, следовательно, аналитична во всех точках этой плоскости. Её производную найдем по одной из формул (6), например, по первой: $(z^2)' = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + i\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$. Таким образом , $(z^2)' = 2z.$

Заметим, что производную функции $w = z^2$ можно найти, воспользовавшись определением производной (4):

$$w' = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(2z + \Delta z) = 2z.$$

Пример 11. Найти аналитическую функцию $w = u + iv$ по ее заданной действительной части $u = x^3 - 3xy^2 + 2$.

Решение: Отметим, что функция u является гармонической функцией ($u''_{xx} = 6x$, $u''_{yy} = -6x$, следовательно, $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$).

Для определения мнимой части v воспользуемся условиями Эйлера-Даламбера (5). Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_x = 3x^2 - 3y^2$, то, согласно первому условию, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Отсюда, интегрируя по y, находим:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x).$$

Для определения функции $\varphi(x)$ воспользуемся вторым условием Эйлера-Даламбера.

Так как $\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2)'_y = -6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x} = (3x^2 y - y^3 + \varphi(x))'_x = 6xy + \varphi'(x)$, то $-6xy = -(6xy + \varphi'(x))$. Отсюда $\varphi'(x) = 0$ и $\varphi'(x) = C$, $C = const$.

Поэтому $v = 3x^2 y - y^3 + C$. Находим функцию $w = u + iv$:

$$w = u + iv = x^3 - 3xy^2 + 2 + i(3x^2 y - y^3 + C) =$$

$$= x^3 + i3x^2 y - 3xy^2 - iy^3 + 2 + Ci = (x + iy)^3 + 2 + iC = z^3 + 2 + iC.$$

1.9. Определение, свойства и правила вычисления интеграла функции комплексного переменного

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L с началом в точке z_0 и концом в точке z_n определена непрерывная функция $f(z)$. Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z_n точками $z_1, z_{2,...,} z_{n-1}$ (рис. 5).

В каждой «элементарной дуге» $(z_{k-1} z_k)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(C_k) \Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

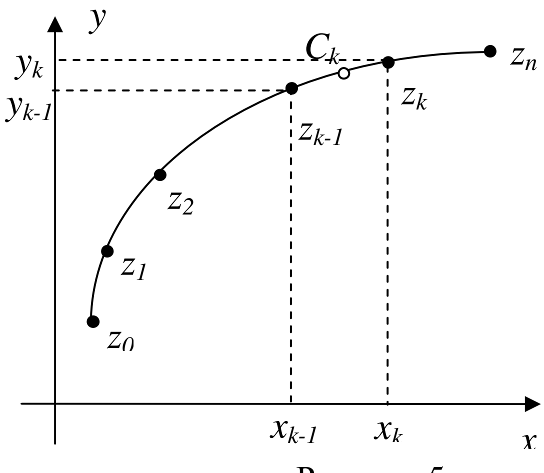

Рисунок 5

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется ***ин-***

тегралом от функции $f(z)$ ***по кривой (по контуру)*** L и обозначается символом $\int\limits_L f(z)dz.$.

Таким образом, $\int\limits_L f(z)dz = \lim\limits_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k.$ (7)

Покажем, что если L – гладкая кривая, а $f(z)$ – непрерывная и однозначная функция, то интеграл (7) существует.

Действительно, пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y), z = x + iy, C_k = \hat{x}_k + i\hat{y}_k$.

Тогда $f(C_k) = u(\hat{x}_k;\hat{y}_k) + iv(\hat{x}_k;\hat{y}_k)$, $\Delta z = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$.

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(\hat{x}_k;\hat{y}_k) + iv(\hat{x}_k;\hat{y}_k))\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum(u(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta x_k - v(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta y_k) + i\sum(v(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta x_k + u(\hat{x}_k;\hat{y}_k)\Delta y_k).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов.

При сделанных предположениях о кривой L и функции $f(z)$ пределы этих сумм существуют. Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\max|\Delta z_k| \to 0$ получим:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy. \qquad (8)$$

Формула (8) показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Формулу (8) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy). \qquad (9)$$

Если $x = x(t), y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$ - параметрические уравнения кривой L, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ называют ***комплексным параметрическим уравнением*** кривой L и формула (9) преобразуется в формулу:

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (10)$$

Действительно, считая $z(t)$ непрерывной и дифференцируемой функцией, получаем

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_{t_1}^{t_2}(u + iv)(x_t' + iy_t')dt = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Приведем ***основные свойства*** интеграла от функции комплексного переменного:

1. $\int\limits_L dz = z - z_0$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta z_k = \Delta z_1 + ... + \Delta z_n = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + ... + z_n - z_{n-1} = z - z_0$.

2. $\int\limits_L (f_1(z) \pm f_2(z))dz = \int\limits_L f_1(z)dz \pm \int\limits_L f_2(z)dz.$

3. $\int\limits_L af(z)dz = a\int\limits_L f(z)dz, a - \textit{комплексное число.}$

4. $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{-L} f(z)dz,$ то есть при перемене направления пути интегрирования интеграл изменяет свой знак на противоположный (в других обозначается кривой: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$).

5. $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz,$ где $L = L_1 + L_2$, то есть интеграл по всему пути L равен сумме интегралов по его частям L_1 и L_2.

6. *Оценка модуля интеграла*. Если $|f(z)| \le M$ во всех точках кривой L, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le Ml$, где $l-$ длина кривой L.

Действительно, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(C_k)\Delta z_k| \le M\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le Ml,$ где $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ - длина ломанной $z_0 z_1 z_2 ... z_n$, вписанной в кривую L.

Все приведенные свойства интеграла функции комплексного переменного непосредственно вытекают из его определения (7) и представления (8).

Пример 12. Вычислить $I = \int\limits_L \operatorname{Im} z dz,$

где L – полуокружность $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$ (рис. 6).

Решение:

1 способ. Уравнение верхней половины окружности есть $y = \sqrt{1 - x^2}$. Используя формулу (9), имеем:

$$I = \int\limits_L y(dx + idy) = \int\limits_L ydx + i\int\limits_L ydy = \int\limits_1^{-1} \sqrt{1 - x^2}\, dx +$$

$$+ i\int\limits_1^{-1} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)\right)\Big|_1^{-1} - i\frac{x^2}{2}\Big|_1^{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

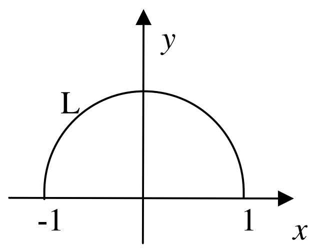

Рисунок 6

2 способ. Для упрощения вычислений представим уравнение окружности в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$. Используя формулу (10), имеем ($z = x + iy = \cos(t) + i\sin(t)$):

$$I=\int_0^{\pi}\sin(t)(-\sin(t)+i\cos(t))dt=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}(1-\cos(2t))dt+i\int_0^{\pi}sit(t)\cos(t)dt=\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)\right)_0^{\pi}+$$
$$+i\frac{1}{2}\sin^2(t)\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}$$

1.10. Теорема Коши. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема ***Коши (для односвязной области)***. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю, то есть

$$\oint_L f(z)dz=0.$$

Теорема Коши допускает распространение на случай многосвязной области.

Рассмотрим для определенности трехсвязную область D, ограниченную внешним контуром L и внутренними контурами L_1 и L_2. Выберем положительное направление обхода контуров: при обходе область D остается слева (рис. 7).

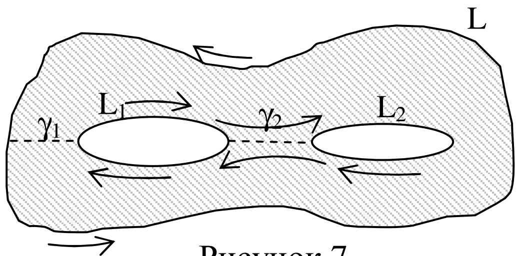

Рисунок 7

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и на контурах L, L_1 и L_2 (в замкнутой области $\overline{D}$ функция называется аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, если она аналитична в некоторой области, содержащей внутри себя область D и ее границу L).

Проведя два разреза (две дуги) γ_1 и γ_2 области D (рис. 7), получим новую односвязную область D_1, ограниченную замкнутым ориентированным контуром Γ, состоящим из контуров L, L_1, L_2 и разрезов γ_1 и γ_2: $\Gamma=L+\gamma_1^++L_1+\gamma_2^++L_2+\gamma_2^-+\gamma_1^-$. По теореме Коши для односвязной области $\oint_L f(z)dz=0,$ но $\int_{\gamma_1^++\gamma_2^++\gamma_2^-+\gamma_1^-}=\int_{\gamma_1^+}+\int_{\gamma_1^-}+\int_{\gamma_2^+}+\int_{\gamma_2^-}=0,$ т. к. каждый из разрезов (дуг) γ_1 и γ_2 при интегрировании проходится дважды в противоположных направлениях. Поэтому получаем: $\int_{\Gamma} f(z)dz=\oint_L f(z)dz+\oint_{L_1} f(z)dz+\oint_{L_2} f(z)dz=0,$ т.е. интеграл от аналитической в замкнутой многосвязной области *D* функции $f(z)$ по границе области *D*, проходимой в положительном направлении, равен нулю.

Теорема ***Коши (для многосвязной области).*** Пусть функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной внешним контуром *L*, ориентированным против часовой стрелки, и внутренними контурами L_1, L_2,..., L_n, ориентированными тоже против часовой стрелки, и *f(z)* непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup L \cup L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$.

Тогда $\oint\limits_{L^*} f(z)dz = 0$, где $L^* = L \cup L_1 \cup L_2 \cup ... \cup L_n$

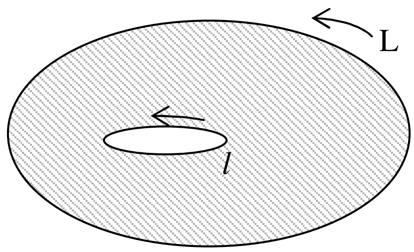

Рисунок 8

Замечание. Изменив направление обхода внутренних контуров L_1 и L_2, будем иметь: $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz,$ где все контуры (L, L_1 и L_2) обходятся в одном направлении: против часовой стрелки (или по часовой стрелке). В частности, если $f(z)$ аналитична в двусвязной области, ограниченной контурами L и l и на самих этих контурах (рис. 8), то $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_l f(z)dz$, то есть «интеграл от функции $f(z)$ по внешнему контуру L равен интегралу от функции $f(z)$ по внутреннему контуру l» (контуры L и l обходят в одном направлении).

Следствие. Если $f(z)$- аналитическая функция в односвязной области *D*, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

В таких случаях, когда интеграл зависит только от начальной точки и конечной точки пути интегрирования, пользуются обозначением $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$. Если здесь зафиксировать точку z_0, а точку z изменять, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ будет функцией от z. Обозначим эту функцию через $F(z)$: $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$. Можно доказать, что если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области *D*, то функция $F(z)$ также аналитична в *D*, причем $F'(z) = (\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz)' = f(z).$

Функция $F(z)$ называется ***первообразной*** для функции $f(z)$ в области D, если $F'(z) = f(z)$.

Можно показать, что если $F(z)$ есть некоторая первообразная для $f(z)$, то совокупность всех первообразных $f(z)$ определяется формулой $F(z) + C$, где $C - const$.

Совокупность всех первообразных функций $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(z)$ и обозначается символом $\int f(z)dz$, т. е. $\int f(z)dz = F(z) + C,\ где\ F'(z) = f(z).$

Пусть функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ есть первообразная функция для $f(z)$.

Следовательно, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) + C$. Положив здесь $z = z_0$, получим: $0 = F(z_0) + C$ (контур замкнётся, интеграл равен нулю). Отсюда $C = -F(z_0)$, а значит, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0).$

Полученная формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

Интегралы от элементарных функций комплексного переменного в области их аналитичности вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе.

Пример 13. $\int e^z dz = e^z + C; \int \sin z dz = -\cos z + C; \int\limits_0^i 3z^2 dz = 3 \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_0^i = -i$.

Пример 14. Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0}$;

б) $\oint\limits_L (z - z_0)^n dz\ \ (n \neq -1)$, где L есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки (рис. 9).

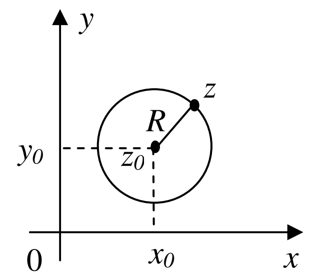

Рисунок 9

Решение: а) Теорема Коши неприменима, т.к. функция $\frac{1}{z - z_0}$ не аналитична в точке z_0. Параметрические уравнения окружности L есть $x = x_0 + R\cos(t),\ y = y_0 + R\sin(t)$, где $0 \le t \le 2\pi$. Следовательно,

$$z = x + iy = x_0 + R\cos(t) + iy_0 + iR\sin(t) = (x_0 + iy_0) + R(\cos(t) + i\sin(t)) = z_0 + R \cdot e^{i \cdot t}$$

Таким образом, мы получили, что комплексно-параметрическое уравнение данной окружности есть $z = z_0 + R \cdot e^{i \cdot t}, 0 \le t \le 2\pi$. Поэтому по формуле (10): $\oint\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i \cdot R \cdot e^{it}}{R \cdot e^{it}} dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \cdot i$.

б) При *n≠-1* имеем:

$$\oint\limits_L (z - z_0)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} (R \cdot e^{it})^n \cdot R \cdot i \cdot e^{it} dt = iR^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = R^{n+1} \cdot \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1} (\cos 2\pi(n+1) + i \sin 2\pi(n+1) - e^0) = \frac{R^{n+1}}{n+1}(1 - 1) = 0.$$

Итак, $\oint\limits_L \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi \cdot i, \quad \oint\limits_L (z-z_0)^n dz = 0.$ n – целое, $n \neq -1$

1.11. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L граница области D. Тогда имеет место формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \tag{11}$$

где $z_0 \in D$ - любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).

Интеграл, находящийся в правой части равенства (11), называется ***интегралом Коши***, а сама эта формула называется ***интегральной формулой Коши***.

Формула Коши (11) является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области D через ее значения на границе этой области.

Замечание. Интегральная формула Коши (11) справедлива для многосвязной области: каждый из контуров обходится так, чтобы область D оставалась слева.

Теорема-следствие 1. Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi \cdot i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \tag{12}$$

Теорема-следствие 2. В окрестности каждой точки z_0, где существует производная $f'(z_0)$, функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots \tag{13}$$

Таким образом, ***производная аналитической функции также является аналитической функцией***.

Ряд (13) называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ в точке z_0.

Ряд Тейлора дифференцируемой в точке z_0 функции существует и сходится к самой функции. Ряд же Тейлора для действительной функции $f(z)$ может сходиться к другой функции или быть расходящимся.

Замечание. Формула n-ой производной функции $f(z)$ может быть получена из формулы Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \cdot i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{14}$$

(в формуле (11) заменено z на ξ и z_0 на z) путем последовательного дифференцирования равенства (14) по z: $f^n(z) = \dfrac{n!}{2\pi \cdot i} \oint\limits_L \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$. (15)

Формулы (11) и (12) можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 15. Вычислить $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z^2+4)}$, где а) L – окружность $|z| = 1$, б) L – окружность $|z - i| = 2$.

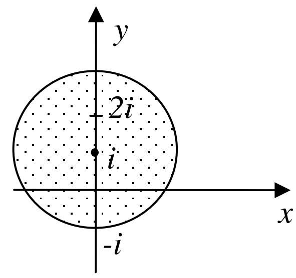

Рисунок 10

Решение: а) функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ является аналитической

в области $|z| \le 1$. В силу теоремы Коши имеем $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z^2+4)} = 0$.

б) На рисунке представлена область, ограниченная контуром интегрирования. В этой области $|z - i| \le 2$ находится точка $z = 2i$, в которой знаменатель подынтегральной функции равен нулю.

Перепишем интеграл в виде: $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z^2+4} = \oint\limits_L \dfrac{\overline{\dfrac{1}{z+2i}}}{z-2i} dz$.

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z+2i}$. является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши (11), находим:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi \cdot i \left(\frac{1}{z+2i} \right)\Bigg|_{z=2i} = 2\pi \cdot i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 16. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos(z)}{z^3} dz$.

Решение: Внутри круга и на его границе $|z| = 1$ функция $f(z) = \cos z$ аналитична. Поэтому, в силу формулы (12), имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{(z-0)^{2+1}} dz = \frac{2\pi \cdot i}{2!} (\cos(z))'' \,\Big|_{z=0} = \pi \cdot i(-\cos(z)) \,\Big|_{z=0} = -\pi \cdot i.$$

1.12. Классификация особых точек. Связь между нулем и полюсом функции

Особой точкой функции $f(z)$ называется точка, в которой функция не является аналитической.

Регулярной точкой функции $f(z)$ называется точка, для которой существует окрестность, в которой функция является аналитической.

Особая точка $z = z_0$ функции $f(z)$ называется ***изолированной***, если в некоторой её окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

При этом возможны следующие случаи:

1) точка z_0 является ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$;
2) точка z_0 является ***полюсом*** функции $f(z)$;
3) точка z_0 является ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$.

Укажем особенности поведения аналитической функции $f(z)$ в окрестности особой точки каждого типа.

Устранимые особые точки

Изолированная особая точка $z = z_0$ ***является устранимой, если существует конечный предел*** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Из равенства $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \ (A \neq \infty)$ следует, что в достаточно малой окрестности устраняемой особой точки z_0 функция $f(z)$ является ограниченной.

Нули функции

Точка $z = z_0$ ***является нулём функции***, ***если*** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Точка $z = z_0$ есть нуль *m-го* порядка для функции $f(z)$, если имеет место равенство $f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

В случае m=1 будем называть точку z_0 простым нулём функции.

Полюсы

Изолированная особая точка $z = z_0$ ***является полюсом***, ***если*** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Точка $z = z_0$ есть полюс *m-го* порядка для функции $f(z)$,если имеет место равенство $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$, где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$.

В случае m=1 будем называть полюс простым.

Имеется связь между нулем и полюсом функции.

Теорема. Если точка z_0 - нуль *m-го* порядка функции $f(z)$, то z_0 является полюсом *m-го* порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$; если точка z_0 - полюс *m-го* порядка функции $f(z)$, то z_0 является нулем *m-го* порядка функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Существенно особая точка

Если z_0 - существенно особая точка, то, как доказывается (теорема Сохоцкого - Вейерштрасса), в достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ становится неопределенной. В такой точке аналитическая функция не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Выбирая различные последовательности точек $\{z_n\}$, сходящихся к существенно особой точке z_0, можно получать различные последовательности соответствующих значений функций, сходящиеся к различным пределам.

Пример 17. Определить тип особенности функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ в точке z=0.

Решение: Точка z=0 является существенно особой точкой. Если $z\to 0$ вдоль положительной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Если $z\to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, то $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Замечание. Классификацию изолированных особых точек можно распространить на случай, когда особой точкой функции $f(z)$ является бесконечно удаленная точка, $z=\infty$.

Окрестностью точки $z=\infty$ называют внешность какого-либо круга с центром в точке z=0 и достаточно большим радиусом R (чем больше R, тем меньше окрестность точки $z=\infty$).

Точку $z=\infty$ называют ***изолированной особой точкой***, если в некоторой окрестности ее нет других особых точек функции $f(z)$. .

Бесконечно удаленная изолированная особая точка может оказаться устранимой особой точкой, полюсом порядка m или существенно особой точкой.

Изучение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ можно свести путем подстановки $z=\frac{1}{w}$ к изучению функции $f\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности точки z=0.

Пример 18. Найти особые точки функции $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$.

Решение: Особой точкой функции $f(z)$ является z=0. Найдем предел функции при $z\to 0$: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z^4} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\frac{1}{z^3} = \infty$.

Следовательно, точка z=0 является полюсом. Можно убедиться, что $\lim\limits_{z\to 0} z^2\frac{\sin z}{z^4} = \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} z^3\frac{\sin z}{z^4} = 1 \neq 0$. Следовательно, точка z=0 - полюс третьего порядка.

Пример 19. Исследовать особенности функции $f(z)=\dfrac{z+3}{z(z+2)(z-1)^2}$.

Решение: Для данной функции точки $z_1=0$ и $z_2=-2$ - простые полюса, $z_3=1$ - полюс второго порядка.

Пример 20. Выяснить поведение функций $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$, $g(z)=\dfrac{z^2}{1+z^2}$ в окрестности $z=\infty$.

Решение: $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z-3}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$. Поэтому точка $z=\infty$ является устранимой особой точкой.

$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2}{1+z^2}=\left[\dfrac{z^2}{z^2}\right]=1$. Тогда $z=\infty$ для функции $g(z)=\dfrac{z^2}{1+z^2}$ является изолированной особой точкой или правильной точкой.

1.13. Понятие вычета функции и основная теорема о вычетах

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, равное значению интеграла $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, взятого в положительном направлении по окружности L с центром в точке z_0, лежащей в области аналитичности функции $f(z)$ (т. е. в кольце $0<|z-z_0|<R$).

Обозначается вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 символом $\mathbf{Res}\, f(z_0)$ или $\mathbf{Res}(f(z);z_0)$.

Таким образом, $\operatorname{Res} f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi\cdot i}\oint f(z)dz$. (16)

Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром L, за исключением конечного числа особых точек z_k (k =1,2, ..., n), лежащих внутри области D, то $\oint\limits_L f(z)dz=2\pi\cdot i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k)$. (17)

1.14. Вычисление вычетов. Применение вычетов в вычислении интегралов

Если $z=z_0$ ***есть правильная или устранимая особая точка***, то $\operatorname{Res} f(z_0)=0$.

Если $z=z_0$ ***есть простой полюс***, то $\operatorname{Res} f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ (18)

Замечание. Формуле (18) для вычисления вычета функции $f(z)$ в простом полюсе можно придать другой вид, если функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестностях точки z_0. Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, $\varphi(z_0)\neq 0$, $g(z)$ имеет простой нуль при $z=z_0$ (то есть $g(z_0)=0, g'(z_0)\neq 0$), тогда

$$\mathbf{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{g(z)};z_0\right)=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad (19)$$

Если $z=z_0$ ***есть полюс m-го порядка*** функции $f(z)$, то

$$\mathrm{Res}\, f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z)). \qquad (20)$$

Пример 21. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z+2}{z^3-z^4}$ в ее особых точках.

Решение: Особыми точками функции $f(z)$ являются: $z_1=1$- простой полюс, $z_2=0$- полюс третьего порядка ($m=3$).

Следовательно, по формуле (19) имеем

$$\mathbf{Res}(f(z);1)=\frac{z+2}{(z^3-z^4)'}\Big|_{z=1}=\frac{1+2}{3-4}=-3.$$

Используя (20), находим:

$$\mathbf{Res}(f(z);0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left((z-0)^3\frac{z+2}{z^3-z^4}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z+2}{1-z}\right)''=\frac{1}{2}\cdot 6=3.$$

Теорема о вычетах часто используется для вычисления интеграла от функции комплексного переменного по замкнутому контуру.

Пример 22. Вычислить $\oint\limits_L\dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где L – окружность $|z-1-i|=\sqrt{2}$.

Решение: Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ имеет в круге $|z-1-i|=\sqrt{2}$ (рис. 11) простой полюс $z_1=i$ и полюс 2-ого порядка $z_2=1$. Применяя (17), (18) и (20), получаем:

$$\oint\limits_L\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i(\mathrm{Res}(f(z);i)+\mathrm{Res}(f(z);1))=$$

$$=2\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}+\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right)'\right]$$

$$=2\pi i\left(\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}+\lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi i}{2}.$$

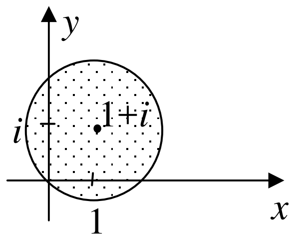

Рисунок11

Определённый интеграл вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x; \cos x)dx$ с помощью замены $z = e^{ix}$ в некоторых случаях удается преобразовать в интеграл по замкнутому контуру $|z| = 1$ от функции комплексного переменного, к которому уже применима основная теорема о вычетах.

Пример 23. Вычислить с помощью вычетов интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2}.$$

Решение: Произведём замену переменного, положив $z = e^{ix}$. Тогда $dz = ie^{ix}dx = izdx$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$. При изменении x от 0 до 2π точка z опишет в положительном направлении окружность $|z| = 1$. Т.о.,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz(3 + 2\frac{z^2+1}{2z})^2} = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2 + 3z + 1)^2} = I.$$

В круге $|z| < 1$ функция $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 3z + 1)^2}$ имеет полюс второго порядка $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. По формуле (20) находим:

$$\operatorname{Res}(f(z); \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}) = \frac{1}{1!}\lim_{z \to \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \left(\left(z - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \frac{z}{(z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2})^2 \cdot (z - \frac{-3-\sqrt{5}}{2})^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to \frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - z}{(z + \frac{3+\sqrt{5}}{2})^3} = \frac{3}{5\sqrt{5}}.$$

Следовательно, $I = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}\pi$.

§2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производные или дифференциалы.

- $F(x, y, y') = 0$ - дифференциальное уравнение первого порядка, неявный вид.
- $y' = f(x, y)$ - уравнение, ***разрешённое относительно производной***.

- $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ - дифференциальная форма записи дифференциального уравнения первого порядка.

ДУ с одной независимой переменной называется ***обыкновенным***.

Порядком ДУ называется порядок наивысшей производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Всякая функция, удовлетворяющая ДУ, т.е. при подстановке в уравнение обращающая его в тождество, называется ***решением уравнения***. Бесконечное множество решений уравнения называется ***общим решением*** ДУ. Общее решение имеет вид $y=f(x,C)$, где C – произвольная постоянная. Если решение задано в неявном виде, то оно обычно называется интегралом. Множество интегралов называется ***общим интегралом*** и имеет вид $\Phi(x,y,C)=0$.

Каждому решению уравнения соответствует линия (график), называемая ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется ***задачей Коши.***

Теорема (существования и единственности задачи Коши). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области, содержащей точку (x_0,y_0), то уравнение $y'=f(x,y)$ имеет решение $y=y(x)$ такое, что $y_0=y(x_0)$. Если, кроме того, непрерывна и частная производная f'_y, то это решение – единственное.

Условие, при котором значение искомой функции $y(x)$ равно y_0 при $x=x_0$, называется ***начальным условием*** уравнения и записывается $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

Решение ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию, называется ***частным решением***.

Например.

а) $xy'+(x^2-7)y=0$ – ДУ 1-го порядка в неявном виде.

б) $3y^3dy-2x^3dx=0$ – ДУ 1-го порядка в дифференциальной форме.

в) $y'=\cos(x)+x^2y$ – ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной.

Пример 1. Выяснить, является ли функция $y=5x^2$ решением уравнения $xy'=2y$?

Решение. $y'=10x$. Полученную производную подставим в уравнение. Тогда $x\cdot 10x=2\cdot 5x^2$, $10x^2=10x^2$. Получили верное тождество, следовательно, данная функция является решением данного ДУ.

2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Метод изоклин (графическое решение)

Геометрическое истолкование ДУ первого порядка. Уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливающее связь (зависимость) между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом $y' = tg(x)$ касательной интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x, y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости *Oxy*.

Поле направлений изображается при помощи системы чёрточек или стрелок с углом наклона α.

Кривые $f(x, y) = k$ (где $k = \mathrm{tg}\alpha$), в точках которых наклон поля имеет постоянное значение, равное *k*, называются ***изоклинами***. Построив изоклины и поле направлений, можно приближённо нарисовать интегральные кривые, рассматривая последние как кривые, которые в каждой своей точке имеют заданное направление поля.

Пример 2. Методом изоклин построить приближенно поле интегральных кривых для дифференциальног уравнения $y' = x$.

Решение. Здесь изоклинами являются прямые линии:

$x = k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...$

$k = 0, \quad x = 0, \quad \mathrm{tg}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ;$

$k = 1, \quad x = \pm 1, \quad \mathrm{tg}\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm 45^\circ;$

$k = 2, \quad x = \pm 2, \quad \mathrm{tg}\alpha = \pm 2 \Rightarrow \alpha \approx \pm 63^\circ.$

На каждой из прямых изображаем систему черточек под найденным углом. Проводя линии таким образом, чтобы черточки являлись касательными к интегральным кривым, получим параболы (рис. 12)

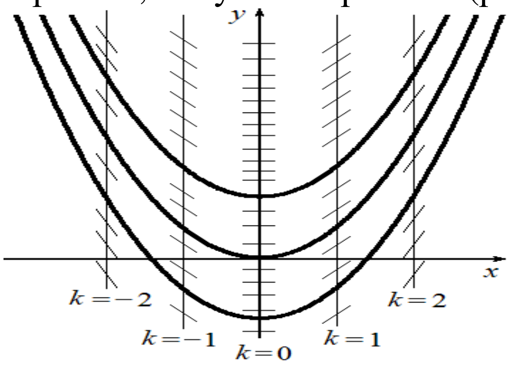

Рисунок 12

2.3. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

ДУ вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называются ***уравнениями с разделенными переменными***. Решаются такие ДУ путем непосредственного интегрирования обеих частей равенства по соответствующим переменным.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $xdx - ydy = 0$.

Решение. $xdx - ydy = 0$, $xdx = ydy$, $\int xdx = \int ydy$, $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C$ – общий интеграл (общее решение).

ДУ вида $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ называются ***уравнениями с разделяющимися переменными***.

Для решения дифференциального уравнения данного вида необходимо перенести одно слагаемое в правую сторону: $P_1(x)Q_1(y)dx = -P_2(x)Q_2(y)dy$ и разделить обе части на $Q_1(y)\cdot P_2(x)$ $(Q_1(y)\cdot P_2(x) \neq 0)$, получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$.

Пример 4. Решить ДУ $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}\ ydy = 0$.

Решение. $\sqrt{1-y^2}dx = -y\sqrt{1-x^2}\ ydy$. Делим обе части уравнения на $\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}$. ($\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} \neq 0$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy \quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow \arcsin(x) = \sqrt{1-y^2} + C.$$

2.4. Однородные дифференциальные уравнения

Если ДУ 1-го порядка можно записать в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ с помощью алгебраических преобразований, то это уравнение называется ***однородным дифференциальным уравнением***.

Например, уравнение $\left(xy - y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0$ – однородное, так как $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\cdot\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решают однородное уравнение заменой: $\frac{y}{x} = u$ или $y = xu$, тогда $y' = u + xu'$ (если уравнение задано в дифференциалах, то $dy = udx + xdu$).

Пример 5. Решить дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x+y}{x}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $y' = -1 - \frac{y}{x}$.

Сделаем замену $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$. Получаем уравнение $u + xu' = -1 - u$. В результате преобразований его можно привести к виду $\frac{du}{-1-2u} = \frac{dx}{x}$. Таким образом, имеем ДУ 1-го порядка с разделенными переменными. Решая его, получим: $-\frac{1}{2}\ln|1+2u|=\ln|x|+C$. Так как $\frac{y}{x}=u$, то $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|1+2\frac{y}{x}\right|=C \quad \Rightarrow x\sqrt{1+2\frac{y}{x}}=C$. Получаем $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$ – общее решение данного ДУ.

2.5. Приводящееся дифференциальное уравнение

Пусть $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ тогда:

- если $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, то полагают $\begin{cases} x=u+x_0, \\ y=v+y_0. \end{cases}$

  Здесь x_0 и y_0 – const, определяемые из системы уравнений $\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0. \end{cases}$ Так как $\begin{cases} dx=du, \\ dy=dv, \end{cases}$ то получим однородное дифференциальное уравнение относительно переменных u и v.
- если $\Delta=0$, то, полагая в уравнении $a_1x+b_1y=u$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 6. Решить уравнение $y'=\frac{1-3x-3y}{1+x+y}$.

Решение. $\Delta=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, делаем замену $1+x+y=z$, тогда $y'=z'$.

Тогда $z'=\frac{-3z+4}{z}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим $-\frac{1}{3}z-\frac{4}{9}\ln|3z-4|=x+C$. Вернемся к переменным x и y:

$$-\frac{1}{3}(1+x+y)-\frac{4}{9}\ln|3x+3y-1|=x+C.$$

2.6. Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные функции (в частности, постоянные), называется ***линейным***.

Рассмотрим два метода решения линейного ДУ – метод Лагранжа и метод Бернулли.

***Метод Лагранжа* (*метод вариации произвольной постоянной*)**

В общем случае, если $q(x) \neq 0$, то уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называется ***линейным неоднородным ДУ*** (ЛНДУ) ***первого порядка***. Рассмотрим соответствующее уравнение без правой части, т. е. уравнение $y' + p(x)y = 0$. Оно называется ***линейным однородным ДУ*** (ЛОДУ) ***первого порядка***. В этом уравнении переменные делятся: $\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow$ $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Метод вариации произвольной постоянной состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяют на функцию $C(x)$. Тогда решение ЛНДУ находится в виде $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Находим производную: $y' = C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Подставляем y и y' в ЛНДУ:

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x),$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Учитывая, что $C'(x) = \frac{dC(x)}{dx}$, запишем $dC(x) = g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$.

Интегрируя, находим $C(x) = \int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$.

Таким образом, получим общее решение ЛНДУ в виде

$$y = \left[\int g(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Пример 7. Решить ДУ $y' + \frac{1}{x} y = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка. Здесь $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{e^x}{x}$. Решаем сначала однородное уравнение $y' + \frac{1}{x} y = 0$. Имеем $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ или $y = \frac{C}{x}$. Заменяем C на $C(x)$, т. е. решение линейного уравнения ищем в виде $y = \frac{C(x)}{x}$. Тогда $y' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. Подставляя выражения для y и y' в уравнение, получим $\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = \frac{e^x}{x}$ или $C'(x) = e^x$. Отсюда находим $C(x)$:

$C(x) = e^x + C$. Следовательно, $y = \frac{e^x + C}{x}$ – искомое решение.

Метод Бернулли

Запишем функцию y в виде произведения двух функций $y = uv$. Находим производную $y' = u'v + v'u$. Подставим все в данное уравнение $u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u[v' + p(x)v] = q(x)$, выражение в квадратных скобках приравняем к нулю. Отсюда $v' + p(x)v = 0$, тогда для отыскания u получим уравнение $u'v = q(x)$.

Сначала найдем v из уравнения $v' = -p(x)v$ – ДУ с разделяющимися переменными: $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$, $\ln|v| = -\int p(x)dx + c$, $v = e^{-\int p(x)dx + c}$, придадим c любое значение, пусть $c = 0$, тогда $v = e^{-\int p(x)dx}$.

Зная v, найдем u из уравнения $u'v = q(x)$: $\frac{du}{dx}e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ – уравнение с разделяющимися переменными, отсюда $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Найдем искомую функцию y: $y = uv = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ – эта формула дает общее решение линейного уравнения.

Замечание. Формулу запоминать не имеет смысла, необходимо помнить алгоритм решения.

Пример 8. Решить уравнение $y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Положим $y = uv$; тогда $y' = u'v + v'u$. Имеем:

$$u'v + v'u + \frac{1}{x}uv = \frac{e^x}{x},\ u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{e^x}{x}. \tag{1}$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \text{ тогда } \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|v| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Значит $v = \frac{C}{x}$. Пусть $C = 1$, тогда $v = \frac{1}{x}$.

Для нахождения функции u вернемся к уравнению (1): $u'v = \frac{e^x}{x}$, $du = e^x dx$, $\int du = \int e^x dx$, $u = e^x + C$.

Зная, u и v окончательно имеем: $y = uv = \frac{e^x + C}{x}$.

2.7. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $n \neq 0$ и $n \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***. Данное уравнение также решают методами Лагранжа или Бернулли.

Решите самостоятельно ДУ $y' - xy = xy^2$ любым из указанных методов.

2.8. Уравнения в полных дифференциалах

Если для дифференциального уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ выполнено равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то оно может быть представлено в виде $du(x, y) = 0$. Такое уравнение называется ДУ в ***полных дифференциалах***.

Общий интеграл уравнения есть $u(x, y) = C$. Функция $u(x, y)$ определяется по формуле $u = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$, где x_0 и y_0 – подбираются произвольным образом. Если $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ необходимо найти интегрирующий множитель (рекомендуем эту тему разобрать самостоятельно).

Пример 9. Найти общий интеграл уравнения
$(2x + 2y)dx + (2x - 4y)dy = 0$.

Решение. $\frac{\partial(2x + 2y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x - 4y)}{\partial x} = 2 \Rightarrow$ левая часть ДУ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Найдем ее:

$$u = \int_{x_0}^{x} (2x + 2y)\,dx + \int_{y_0}^{y} (2x_0 - 4y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{x} (2x + 2y)\,dx - \int_{0}^{y} 4y\,dy = \left(x^2 + 2xy\right)\Big|_0^x - 2y^2\Big|_0^y = x^2 + 2xy - 2y^2.$$

Так как $u(x, y) = \mathrm{C}$, получим $x^2 + 2xy - 2y^2 = C$.

2.9. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***ДУ высших порядков***. ДУ второго порядка в общем случае имеет вид $\mathrm{F}(x, y, y', y'') = 0$, или в виде, разрешенном относительно старшей производной $y'' = f(x, y, y')$, если это возможно.

Решением ДУ второго порядка называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ второго порядка называется функция $y=\varphi(x;c_1;c_2)$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(x;c_1;c_2)$ – является решением ДУ для каждого фиксированного значения c_1 и c_2; 2) каковы бы ни были начальные условия $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$, существуют единственные значения постоянных $c_1=c_1^0$ и $c_2=c_2^0$ такие, что функция $y=\varphi\left(x;c_1^0;c_2^0\right)$ является решением данного уравнения и удовлетворяет начальным условиям.

Всякое решение $y=\varphi\left(x;c_1^0;c_2^0\right)$ данного ДУ, получающееся из общего решения $y=\varphi(x;c_1;c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1=c_1^0$ и $c_2=c_2^0$, называется ***частным решением***.

Решения ДУ, записанные в виде $\Phi(x;c_1;c_2)=0$, $\Phi(x;c_1^0;c_2^0)=0$, называются *общим* и *частным интегралом* соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется *интегральной кривой*. Общее решение представляет собой множество интегральных кривых; частное решение – одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку $(x_0;y_0)$ и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)$.

Как и в случае ДУ первого порядка, задача нахождения решения ДУ, удовлетворяющая заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

Теорема (существования и единственности задачи Коши). Если в ДУ $y''=f(x,y,y')$ функция $f(x,y,y')$ и ее частные производные f'_y и $f'_{y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0;y_0;y'_0)\in D$ существует единственное решение $y=\varphi(x)$ данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$.

Аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ *n*-го *порядка*, которое в общем виде записывается как $F(x;y;y';y'';\dots;y^{(n)})=0$.

Задача нахождения решения ДУ *n*-го порядка сложнее, чем первого, поэтому ограничимся рассмотрением отдельных видов ДУ высших порядков.

2.10. Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях порядок ДУ может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование. Рассмотрим три типа подобных уравнений.

1. Случай непосредственного интегрирования.

Пусть дано уравнение $y''=f(x)$.

Интегрируя обе части данного уравнения, получим: $y' = \int f(x)dx + C_1$. Далее, интегрируя полученное уравнение, находим $y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$ или $y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2$.

Если $y^{(n)} = f(x)$, то

$$y = \underbrace{\int\int ... \int}_{n} f(x)dx ... dx\, dx + C_1 x^{(n-1)} + C_2 x^{(n-2)} + ... + C_n.$$

Пример 10. Решить уравнение $y'' = \frac{1}{x}$.

Решение.

$$y' = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1, \quad y = \int (\ln|x| + C_1)dx = x\ln|x| - x + C_1 x + C_2.$$

Пример 11. Решить ДУ $y'' = \sin(3x)$ *y(0)=0* $y'(0) = 1$

Решение.

$y' = \int y'' dx = -\frac{\cos(3x)}{3} + C_1$ $\quad y = \int y' dx = -\frac{\sin(3x)}{9} + C_1 x + C_2$. Подставив начальные условия, получаем уравнения $1 = -\frac{1}{3} + C_1$ $\quad 0=C_2$.

Отсюда $C_1 = \frac{4}{3}$, $C_2 = 0$. Получаем $y = -\frac{\sin(3x)}{9} + \frac{4}{3}x$

2. Если дано ДУ $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно искомой функции y.

В этом случае используется замена $y' = z, y'' = z'$.

Пример 12. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' = y'$ при начальных условиях $y|_{x=1} = 0, y'|_{x=1} = -2$.

Решение. Положим $y' = z$, $\quad y'' = z'$. Тогда уравнение примет вид $xz' = z$ – ДУ первого порядка с разделяющимися переменными. Решая полученное уравнение, имеем $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$, отсюда $z = C_1 x$. Т. к. $z = y'$, то $y' = C_1 x$. Интегрируя последнее равенство, находим $y = \int C_1 x dx = \frac{x^2}{2} C_1 + C_2$ – общее решение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y|_{x=1} = 0 \Rightarrow \quad 0 = \frac{1^2}{2} C_1 + C_2$.

$y'|_{x=1} = -2 \Rightarrow \quad -2 = 1 \cdot C_1$.

Решая полученную систему, находим $C_1 = -2$, $C_2 = 1$. Таким образом, окончательно имеем $y = \frac{x^2}{2} - 2$.

3. Если дано ДУ $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее явно независимой переменной x.

Здесь используется замена $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Пример 13. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение. В данном ДУ явно нет *x*. Применив указанную замену, получим $2yp\dfrac{dp}{dy} = (p^2 + 1)$ – ДУ с разделяющимися переменными. Отсюда $p = \pm\sqrt{yC_1 - 1}$, значит $y' = \pm\sqrt{yC_1 - 1}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решая, окончательно получим $yC_1 - 1 = \dfrac{(x - C_2)^2 C_1^2}{4}$ или $y = \dfrac{1}{C_1}\left[\dfrac{(x - C_2)^2 C_1^2}{4} + 1\right]$.

2.11. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где *p*, *q* – заданные числа называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (ЛНДУ) *второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Линейное ДУ второго порядка без правой части $y'' + py' + qy = 0$, соответствующее ЛНДУ, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением* (ЛОДУ).**

Теорема (о структуре общего решения ЛНДУ). Общим решением ЛНДУ является сумма его общего решения y_{oo} соответствующего ЛОДУ и произвольного частного решения $y_{чн}$, то есть $y = y_{чн} + y_{oo}$.

Рассмотрим нахождение общего решения y_{oo} и частного решения $y_{чн}$.

Пусть дано ЛОДУ второго порядка $y'' + py' + qy = 0$. Если k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (для этого необходимо y'' заменить на k^2, y' – на k, y – на 1), то общее решение записывается в одном из следующих трех видов (табл. 1):

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

Таблица 1.

$D = p^2 - 4q$	Корни k_1 и k_2 $\left(k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}\right)$	Общее решение ЛОДУ
1) $D > 0$	действительные и различные ($k_1 \neq k_2$)	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2) $D = 0$	действительные и равные	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

	($k_1 = k_2 = k$)	
3) $D<0$	комплексные $k_{1,2} = a \pm bi$ (a и b – действительные числа)	$y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right)$

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$ и найдем его корни: $D = 49 - 4\cdot 6 = 25$; $k_1 = \frac{7-5}{2} = 1$; $k_2 = \frac{7+5}{2} = 6$. Т.к. k_1 и k_2 – действительные и различные числа, то общее решение записывается в виде: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

Пример 15. Найти общее решение уравнения $9y'' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $9k^2 + 1 = 0$, $k^2 = -\frac{1}{9}$, $k_{1,2} = \pm\frac{1}{3}i$ – комплексно-сопряженные корни, $a = 0$, $\beta = \frac{1}{3}$. Общее решение имеет вид $y = e^{0x}\cdot(C_1 \cos\frac{1}{3}x + C_2 \sin\frac{1}{3}x)$, отсюда $y = C_1 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Пример 16. Найти общее решение уравнения $y'' + 10y' + 25y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + 10k + 25 = 0$. Найдем его корни: $D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -5$. Тогда $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$.

Найдём теперь частное решение неоднородного уравнения

Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P(x)e^{mx}$, где $P(x)$-многочлен.

Тогда неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{чн} = x^k Q(x)e^{mx}$, где $Q(x)$-многочлен той же степени, что и $P(x)$, k-кратность корня характеристического уравнения, равного m (то есть, сколько корней характеристического уравнения равно m).

Неизвестные коэффициенты многочлена $Q(x)$ находим с помощью метода неопределённых коэффициентов.

Это правило верно и при m=0, когда правая часть есть многочлен. В частных случаях $P(x)$ может быть и постоянной величиной (числом).

2) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = a\cdot\cos(nx) + b\cdot\sin(nx)$.

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{чн} = x(A\cdot\cos(nx) + B\sin(nx))$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{чн} = A\cdot\cos(nx) + B\sin(nx)$.

Если a=0 или b=0, решение всё равно следует искать в общем виде.

3) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{mx}\left[P_1\cos(nx) + P_2\sin(nx)\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ –многочлены.

Если числа $m\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{чн} = xe^{mx}(Q_1(x)\cdot\cos(nx) + Q_2(x)\sin(nx))$.

Если числа $m\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то неоднородное уравнение имеет частное решение вида $y_{чн} = e^{mx}(Q_1(x)\cdot\cos(nx) + Q_2(x)\sin(nx))$.

$Q_1(x)$ и $Q_2(x)$-многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$

Замечание. Частное решение ЛНДУ имеет тот же вид, что и специальная правая часть, но если число $\alpha+\beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r, то в частном решении присутствует множитель x^r.

Немногим более сложные виды специальной правой части рекомендуем разобрать самостоятельно.

Пример 17. Решить уравнение $y'' - 4y' - 12y = e^{6x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка со специальной правой частью $f(x) = 1\cdot e^{6x}$ ($P(x) = 1,\ \mathrm{m} = 6$) Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' - 4y' - 12y = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k - 12 = 0$ и найдем его корни: $k_1 = 6$, $k_2 = -2$.

Тогда общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{oo} = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x}$.

Найдем частное решение ЛНДУ. Т.к. $P(x) = 1$, $m = 6$, и число $m = 6$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения (совпадает с $k_1 = 6$), то частное решение будем искать в виде $y_{чн} = \mathrm{A}xe^{6x}$. Для отыскания неопределенного коэффициента А подставим $y_{чн}$ в данное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, предварительно вычислив $y'_{чн} = \mathrm{Ae}^{6x} + 6Axe^{6x}$, $y''_{чн} = 12Ae^{6x} + 36Axe^{6x}$. Получаем равенство

$12Ae^{6x} + 36Axe^{6x} - 4Ae^{6x} - 24xAe^{6x} - 12Axe^{6x} = e^{6x}$, откуда находим $\mathrm{A} = \frac{1}{8}$. Таким образом $y_{чн} = \frac{1}{8}xe^{6x}$.

Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем $y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{8} x e^{6x}$.

Теперь подставим начальные условия в полученное решение, получим

$$y(0) = 1, \quad \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 0 = 1 \ ,$$

$$y' = 6C_1 e^{6x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{8} e^{6x} + \frac{6}{8} x e^{6x},$$

$$y'(0) = 6, \quad \Rightarrow 6C_1 \cdot 1 - 2C_2 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 + 0 = 6.$$

Решив систему, получаем $C_1 = \frac{63}{64}$, $C_2 = \frac{1}{64}$.

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям,

$$y = \frac{63}{64} e^{6x} + \frac{1}{64} e^{-2x} + \frac{1}{8} x e^{6x}.$$

2.12. Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Совокупность соотношений вида: $\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$.

где x- независимая переменная, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – искомые функции, называется ***системой дифференциальных уравнений первого порядка***.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений***.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, … $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ этой области существует единственное решение $y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$ системы дифференциальных уравнений вида, определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (2) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется ***линейной однородной***, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases}$$

Решения системы обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu, где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$.

Подставляя эти значения в систему и перенеся все члены в одну сторону и сократив на e^{kx}, получаем: $\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется ***характеристическим уравнением*** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы:

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы:

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример 18. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6.$$

Решим систему уравнений: $\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Этот пример может быть решен другим способом:

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$.

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 4y.$$

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$;

$x'' - 7x' + 6x = 0 \Rightarrow k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$

Тогда $x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t}$;

$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t}; \;\; y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t}$.

Обозначив $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$.

§3. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3.1. Основные понятия числового ряда

Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – данные числа, называется ***числовым рядом*** ($a_1, a_2, ...$ называются членами ряда, a_n – общий член ряда).

Сумма первых n членов ряда $\mathrm{S}_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется ***частичной суммой***. Числовой ряд называется ***сходящимся,*** если его частичная сумма имеет конечный предел при $n \to \infty$. Величина $\mathrm{S} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$ называется при этом ***суммой ряда***, а число $\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ – ***остатком***.

Если предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$ не существует или стремится к бесконечности, то ряд называется ***расходящимся***.

3.2. Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, k – произвольное число, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = ka_1 + ka_2 + \ldots + ka_n + \ldots$ также сходится и его сумма равна $k\mathrm{S}$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $k \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ расходится.
2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, их суммы равны соответственно $\mathrm{S}_1 \pm \mathrm{S}_2$.

Следствия.

1. Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

2. Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Сходимость или расходимость ряда не нарушается, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

Основная задача теории числовых рядов – установление сходимости или расходимости – иногда может быть решена непосредственным нахождением суммы ряда, т.е. вычислением предела частичных сумм: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{9k^2+12k-5}$.

Решение. Для преобразования частичных сумм используем разложение дроби на простейшие: $\dfrac{1}{9k^2+12k-5} = \dfrac{\text{A}}{3k-1} + \dfrac{\text{B}}{3k+5}$.

Методом неопределенных коэффициентов нашли значения: $\text{A} = \frac{1}{6}$ и $\text{B} = -\frac{1}{6}$. Следовательно, общий член ряда запишется в виде $\dfrac{1}{9k^2+12k-5} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{1}{3k+5}\right)$.

Тогда частичную сумму можно представить следующим образом:

$$\text{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2+12k-5} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n+2}\right) + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{7}{10} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right].$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} \text{S}_n = \frac{1}{6}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{10} = \frac{7}{60}.$$

Так как сумма ряда существует и равна конечному значению, то данный ряд сходится.

Замечание. При исследовании сходимости рядов непосредственное нахождение предела частичных сумм часто связано с большими трудностями. Поэтому чаще используют тот или иной признак, дающий достаточные условия сходимости или расходимости ряда.

3.3. Признаки сходимости числовых рядов

Знакопостоянным рядом называется ряд вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_i > 0$ или $a_i < 0$, тогда данный числовой ряд также называют соответственно ***знакоположительным*** или ***знакоотрицательным***.

Замечание. Знакоотрицательный ряд получают при помощи простого умножения на -1 элементов знакоположительного ряда.

Знакопеременным рядом называется ряд вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где члены ряда a_i произвольных знаков. Частным случаем знакопеременного ряда является ***знакочередующийся ряд***, вида: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ...$, где $a_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$

Замечание.

1. Исследование знакочередующегося ряда вида $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - ...$ сводится к стандартному путем умножения всех его членов на (-1).
2. Соотношение $0 < S < u_1$ позволяет получить простую и удобную оценку ошибки, которая допускается при замене суммы S данного ряда его частичной суммой S_n. Отброшенный ряд (остаток) представляет собой также знакочередующийся ряд, сумма которого по модулю меньше первого члена этого ряда.

Например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ – знакопеременный ряд, но он не является знакочередующимся.

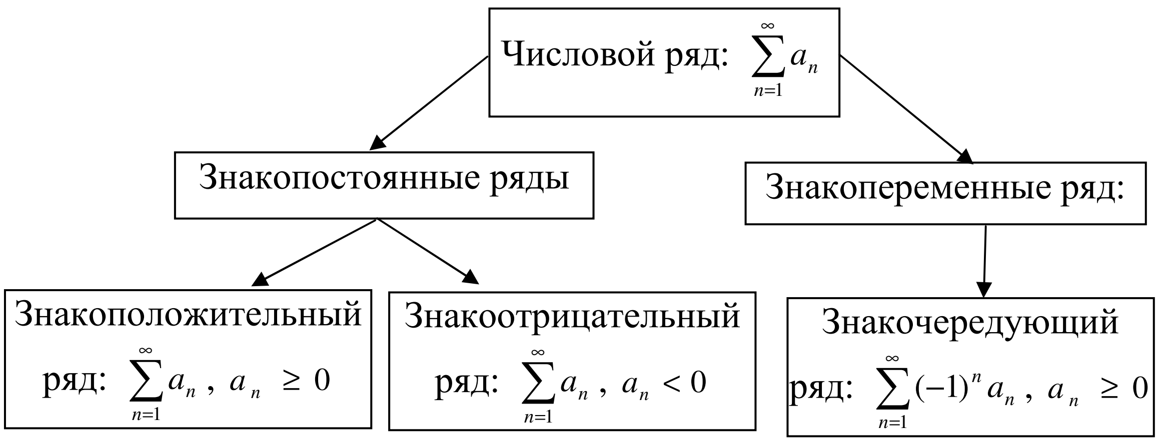

Схема 1. Виды числовых рядов

Необходимый признак сходимости числового ряда. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Достаточный признак расходимости числового ряда. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Достаточные признаки сходимости числового ряда.

Первый признак сравнения. Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, начиная с некоторого номера n для общих членов, выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то ряд с меньшими членами сходится, если сходится ряд с большими членами; если ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Второй признак сравнения. Если для двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = q$, то, при $q \neq 0$, оба ряда ведут себя одинаково в смысле сходимости, т. е. либо оба ряда сходятся, либо оба – расходятся.

Признак Даламбера. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то ряд с неотрицательными членами сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым (требуются дополнительные исследования, т. е. необходимо применить какой-либо другой признак).

Радикальный признак Коши. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то ряд с неотрицательными членами сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым (требуются дополнительные исследования, т. е. необходимо применить какой-либо другой признак).

Интегральный признак Коши. Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условиям $a_{n+1} \leq a_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, а непрерывная убывающая неотрицательная функция вещественной переменной $f(x)$ такова, что при $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ ее значения равны соответствующим членам ряда данного ряда и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$, то ряд и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Замечание. Когда приходится исследовать на сходимость конкретный ряд, то естественно встает вопрос о том, каким из перечисленных признаков воспользоваться. Полезно, прежде всего, проверить выполнение необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Если оно нарушено, то ряд расходится. Если же оно выполнено, то для исследования сходимости следует обратиться к признакам.

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю при $n \to +\infty$, то ряд сходится, иначе говоря, если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \ge 0$ удовлетворяют условиям:

1) $a_{n+1} \le a_n$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Теорема. Если для данного знакопеременного ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ряд $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, сходится, то и данный ряд также сходится.

В этом случае знакопеременный ряд $\sum a_n$ называется ***абсолютно сходящимся.***

Если же знакопеременный ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то данный ряд называется ***условно сходящимся***.

Замечания.

1. Только для знакочередующихся рядов верна оценка остатка ряда: $|R_n| < |a_{n+1}|$, то есть ошибка меньше модуля первого из отброшенных членов.

2. Имеются стандартные ряды:

1) Ряд $1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + ... + \dfrac{1}{n^\alpha} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ называется ***общегармоническим*** рядом или рядом ***Дирихле,*** где ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le1$. Если $\alpha=1$, то имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который называется ***гармоническим рядом,*** и он расходится.

2) Ряд $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ называется рядом геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a, где ряд сходится при $|q| < 1$ и ряд расходится при $|q| \ge 1$.

3) При исследовании некоторых задач на сходимость числовых рядов удобно при применении признаков сравнения использовать следствия первого и второго замечательных пределов: применительно к рядам считаем, что $\alpha(n)$ бесконечно малая величина, т. е. $\alpha(n) \to 0$ при $n \to +\infty$. В таблице 2 приведены основные эквивалентности, которые потребуется нам при исследовании на сходимость некоторых рядов.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Таблица 2.

$\sin(\alpha) \sim \alpha$	$\mathrm{tg}(\alpha) \sim \alpha$	$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha$
$\arcsin(\alpha) \sim \alpha$	$\mathrm{arctg}(\alpha) \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$1-\cos(\alpha) \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$	$\mathrm{ctg}(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$	$\log_b(1+\alpha) \sim \dfrac{\alpha}{\ln(b)}$
$\frac{\pi}{2} - \arccos(\alpha) \sim \alpha$	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$	$b^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \ln(b)$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$

Решение. Используем I признак сравнения. Так как $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Решение. Используем I признак сравнения. Так как $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$.

Решение. Применим предельный признак сравнения, возьмем $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится, так как является гармоническим рядом. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}} = /\,по\,таблице\,эквивалентности\,/ = \frac{\pi}{5} \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Пример 5. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. Используем признак Даламбера.
Для этого определим $u_n = \frac{n}{2^n}$ *и* $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 6. Определить сходимость ряда $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

Решение. Используем признак Даламбера.
Для этого определим $u_n = \frac{1}{n!}$ *и* $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 7. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$.

Решение. Используем радикальный признак Коши.
Для этого определим $u_n = \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5} \right)^n$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 8. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$.

Решение. Используем радикальный признак Коши. Для этого $u_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$. Таким образом, радикальный признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0$, следовательно, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Решение. Используем интегральный признак Коши.
$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| \Big|_2^{\infty} = \infty$, следовательно, ряд расходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$.

Решение. Выясним, сходится ли данный ряд, применяя признак Лейбница:

1) проверим, выполняется ли неравенство $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ для абсолютных величин членов ряда. $u_1 = \frac{1}{1}$, $u_2 = \frac{1}{3}$, $u_3 = \frac{1}{5}, ...$, следовательно, неравенство выполняется.

2) найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$, следовательно, условие выполнено.

Значит, по признаку Лейбница, исходный ряд сходится.

Исследуем на сходимость ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. Возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится, и используем 2 признак сравнения: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} \div \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$. Следовательно, ряд из абсолютных величин расходится.

Таким образом, получаем, что исходный знакочередующийся ряд сходится условно.

Пример 11. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. Это знакочередующийся гармонический ряд. Сначала исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический расходящийся ряд. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Поэтому исследуем исходный ряд по признаку Лейбница на условную сходимость.

Условия для $a_n = \frac{1}{n} \ge 0$: 1) $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$, 2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ выполняются, следовательно, данный ряд сходится условно.

Пример 12. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. К общему члену получившегося знакоположительного ряда можно применить эквивалентность $\sin\alpha \sim \alpha$, так как $\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогда $\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right) \sim \left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^3$ при $n \to +\infty$. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^3}{8n^{3/2}} = \ = \frac{\pi^3}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (это обобщенный гармонический ряд, $q = \frac{3}{2} > 1$) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 13. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$.

Решение. Данный ряд – знакочередующийся. Составим ряд из абсолютных величин. По виду общего члена полученного ряда делаем выбор достаточного признака сходимости. Применим признак Коши. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n = 2 > 1$. Т. к. ряд, составленный из абсолютных величин, расходится по признаку Коши, то и данный ряд также расходится.

Можно было исследовать этот ряд с помощью необходимого признака сходимости. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{1}\right)^n = +\infty$, то исходный ряд расходится (не выполняется второе условие признака Лейбница).

§4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

4.1. Основные понятия функционального ряда

Перейдём теперь к рассмотрению рядов, членами которых являются не числа, а функции: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (1)

Такие ряды называются ***функциональными рядами,*** $u_n(x)$ называется ***общим членом функционального ряда.*** Предполагается, что все функции $u_n(x)$ определены и непрерывны в одном и том же интервале, конечном или бесконечном.

Ряд (1) может для одних значений x сходиться, для других – расходиться. Значение $x = x_0$, при котором числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$ сходится, называется ***точкой сходимости ряда*** (1). Множество всех точек сходимости ряда называется

областью сходимости ряда, говорят, что ***ряд сходится в этой области***. Областью сходимости ряда обычно бывает какой-нибудь интервал оси *0x*.

Например. Ряд $1+x+x^2+...+x^n+...$ сходится в интервале (-1;1), так как при любом значении *x* из этого интервала соответствующий числовой ряд представляет собой бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. При $|x|\geq 1$ этот ряд расходится.

Сумма ряда является некоторой функцией от *x*, определённой в области сходимости ряда, обозначим её через $S(x)$:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...$$

Так, в предыдущем примере сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$, разумеется, эта функция является суммой ряда только в интервале (-1;1) – области сходимости функционального ряда.

Сумму *n первых* членов ряда назовём ***n-ой частичной суммой ряда*** и обозначим $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)$, $n=1,2,...$. ***Остатком ряда*** назовём разность между суммой ряда и его n-ой частичной суммой, обозначим остаток ряда $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется ***сходящимся*** в точке $x=x_0$, если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$. Число $S(x_0)$ называется ***суммой ряда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в точке x_0.

Пример 14. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$.

Решение. Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\left|\frac{\cos(x)}{1^2}\right|+\left|\frac{\cos(2x)}{2^2}\right|+...+\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|+...$$

Так как при любом $x\in(-\infty;+\infty)$ имеет место соотношение $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщённый гармонический ряд (*p*=2>1), то по второму признаку сравнения ряд из абсолютных величин сходится при всех *x*. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно при всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

4.2. Сходимость степенных рядов

Среди функциональных рядов в математике и ее приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x.

Степенным рядом называется функциональный ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \tag{2}$$

члены, которого есть произведения постоянных $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ на степенные функции с целыми показателями степеней от разности $(x$-$x_0)$. Действительные числа $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ называются ***коэффициентами ряда***.

В частности, при x_0=0, будем иметь степенной ряд, разложенный по степеням x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... \tag{3}$$

Далее будем изучать именно такие степенные ряды, потому что всякий степенной ряд подстановкой $t = x - x_0$ приводится к ряду (3).

Теорема (Абеля).

1) Если степенной ряд $a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ сходится в точке $t = t_0 \neq 0$, то он сходится (и притом абсолютно) в интервале $(-|t_0|;|t_0|)$, т.е. при всяком значении t, удовлетворяющем неравенству $|t| < |t_0|$;

2) если ряд расходится при некотором значении t_0', то он расходится при всяком t, для которого $|t| > |t_0'|$, т.е. в интервале $(-\infty;-|t_0'|) \cup (|t_0'|;+\infty)$.

Из теоремы Абеля следует, что для каждого степенного ряда (3), имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое действительное неотрицательное число R, что для всех x, по модулю меньших R $(|x| < R)$, ряд абсолютно сходится, а для всех x, по модулю больших R $(|x| > R)$, ряд расходится (рис. 13).

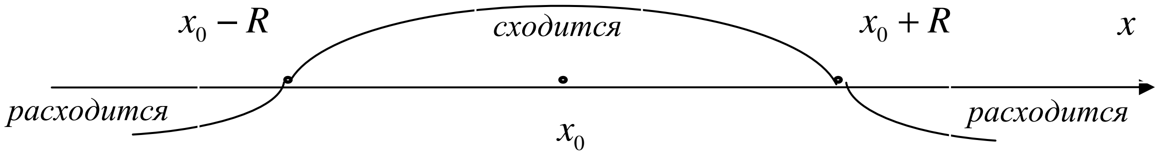

Рисунок 13

Сходимость ряда в граничных точках x=R и x=-R необходимо проверять дополнительно, подставив эти значения в исходный функциональный ряд.

Интервал $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ называется ***интервалом сходимости,*** а число R $\left(0 \le R \le \infty\right)$ – ***радиусом сходимости*** степенного ряда (2).

Условимся для рядов, расходящихся при всех x, кроме x=x_0, считать R=0 (ряд всегда сходится в точке x_0), а для рядов, сходящихся при всех x, считать $R = \infty$.

Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ нет равных нулю, то есть ряд содержит все целые положительные степени разности $(x - x_0)$, то радиус сходимости степенного ряда может быть найден по формулам:

а) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (из признака Даламбера),

б) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (из признака Коши).

Замечание. Если степенной ряд содержит не все степени x, то интервал сходимости ряда находят, непосредственно, применяя признак Даламбера или признак Коши к функциональному ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Пример 15. Найти область сходимости степенного ряда $x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + ...$

Решение.

Найдем радиус сходимости по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Так как $R = \infty$, то данный степенной ряд сходится при любом значении x.

Пример 16. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{\text{n}=0}^{\infty}(n+2)!\,(x-3)^n$.

Решение.

Составим степенной ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{\text{n}=0}^{\infty}(n+2)!|x-3|^n$ и исследуем сходимость по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+3)!}{(n+2)!}\cdot\frac{|x-3|^{n+1}}{|x-3|^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+3)|x-3| = \infty > 1.$$

Так как $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то R=0. Следовательно, данный степенной ряд расходится во всех точках, кроме точки $x = 3$.

Пример 17. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3^n}$.

Решение.

Найдем радиус сходимости: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^n+3^n}}{\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left((2/3)^{n+1}+1\right)}{3^n\left((2/3)^n+1\right)} = \frac{3\cdot\left(\lim_{n\to\infty}(2/3)^{n+1}+1\right)}{\lim_{n\to\infty}(2/3)^n+1} = 3\cdot\frac{(0+1)}{0+1} = 3.$$

На основании т. Абеля интервал сходимости определяется неравенством $|x-1|<3$, то есть $x\in(-2;4)$.

Исследуем сходимость степенного ряда в граничных точках интервала.

- Если $x=-2$, то получаем числовой знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^n+3^n} = -\frac{3}{5}+\frac{9}{13}-\frac{27}{35}+\ldots.$$

Этот ряд расходится, так как общий член не стремится к нулю (нарушается необходимое условие сходимости).

- Если $x=4$, то получаем числовой ряд с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n} = \frac{3}{5}+\frac{9}{13}+\frac{27}{35}+\frac{81}{97}+\ldots,$$

который расходится, так как общий член не стремится к нулю.

Получаем область сходимости функционального ряда $x\in(-2;4)$.

Пример 18. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение.

Составим степенной ряд из абсолютных величин членов данного ряда и для полученного положительного ряда воспользуемся признаком Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} : \frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{|x+1|^n} = \frac{|x+1|}{2} < 1$.

Получаем, что данный степенной ряд сходится абсолютно при $|x+1|<2$, то есть $-3<x<1$.

Проверим сходимость ряда в граничных точках.

- При x=-3 получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница, так как: 1) $a_n < a_{n+1}$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}$, 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

- При x=1 получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, он расходится.

Таким образом, степенной ряд сходится при $-3\le x<1$.

Пример 19. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n^n\,(x+3\,)^n$.

Решение.

Составим степенной ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем сходимость полученного ряда по признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n|x-3|^n}=\lim_{n\to\infty}n|x+3|=\infty>1,$$

получаем, что данный степенной ряд расходится во всех точках, кроме точки $x=-3$, так как R=0.

Пример 20. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}$.

Решение.

Составим степенной ряд из абсолютных величин членов данного ряда и исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1}}{(n^2+2n+1)5^{n+1}}:\frac{|x+3|^n}{n^2 5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|^{n+1}}{|x+3|^n}\cdot\frac{5^n}{5^{n+1}}\cdot\frac{n^2}{n^2+2n+2}=\frac{|x+3|}{5}<1$$

Получаем интервал сходимости $|x+3|<5$, то есть $x\in(-8;2)$.

Проверим сходимость степенного ряда в граничных точках.

- При $x=-8$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}$, который сходится по признаку Лейбница, так как: 1) $\frac{1}{n^2+2n+2}\le\frac{1}{n^2+1}$, 2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$
- При $x=2$ получаем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, который сходится ($p=2>1$)

Получаем область сходимости степенного ряда $x\in(-8;2)$.

4.3. Свойства степенных рядов внутри интервала сходимости

Сформулируем без доказательства основные свойства степенных рядов. Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, интервал сходимости которого $(x_0-R;x_0+R)$.

Свойство 1. Внутри интервала сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ сумма степенного ряда (2) является непрерывной и бесконечно дифференцируемой функцией.

Свойство 2. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости полученных рядов равен наименьшему из чисел R_1 и R_2.

Действия со степенными рядами:

1. Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n .$$

2. Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, где коэффициенты c_n находятся по формуле $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

3. Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n$, где для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение рядов

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, полученное из записанного выше равенства, и решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= q_0 b_0 \\ a_1 &= q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 &= q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \ldots + q_n b_0 \end{aligned}$$

4. (Интегрирование степенных рядов). Степенной ряд можно почленно интегрировать по промежутку $[a; x]$, целиком лежащему в интервале сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$:

$$\int_a^x S(x)dx = \int_a^x (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots)dx =$$

$$= a_0\int_a^x dx + a_1\int_a^x (x-x_0)dx + a_2\int_a^x (x-x_0)^2\,dx + \ldots + a_n\int_a^x (x-x_0)^n\,dx + \ldots = a_0 x\Big|_a^x + a_1\left.\frac{(x-x_0)^2}{2}\right|_a^x +$$

$$+ a_2\left.\frac{(x-x_0)^3}{3}\right|_a^x + \ldots + a_n\left.\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right|_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} - \frac{(a-x_0)^{n+1}}{n+1}\right).$$ Радиус сходимости полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда.

5. (Дифференцирование степенных рядов). Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости:

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}.$$

$$S''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$S'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^3}{dx^3}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$

При этом радиус сходимости ряда из производных равен радиусу сходимости исходного ряда.

Замечание. Степенной ряд в своем интервале сходимости ведет себя по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования так же, как и многочлен с конечным числом членов.

Пример 21. Найти сумму ряда $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ $(|x|<1)$, продифференцировав почленно ряд $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ $(|x|<1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(S = \dfrac{b_1}{1-q}\right)$, получаем

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Остается продифференцировать полученное равенство:

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ответ: $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ при $|x|<1$.

Пример 22. Найдите область сходимости и сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

Решение. Интервалом сходимости этого ряда является $[-1;1)$ (проверьте это самостоятельно). Обозначим сумму ряда $S(x)$.

Продифференцируем почленно:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Проинтегрируем равенство $S'(x)=\dfrac{1}{1-x}$ в пределах от 0 до x при $x\in[-1;1)$: $\quad S(x)-S(0)=\int\limits_0^x S'(x)\,dx=\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1-x}=-\ln|1-x|$,

а поскольку $S(0)=0$ и $1-x>0$ при $x\in[-1;1)$, то окончательно получим, что сумма ряда $S(x)=-\ln(1-x)$.

Заметим, что при $x=-1$ исходный ряд сходится условно, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+...+(-1)^n\dfrac{1}{n}+...=-\ln 2$,

причем порядок членов ряда менять нельзя.

При $x=1$ имеем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

Следовательно, $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+...=-\ln(1-x)$ при $x\in[-1;1)$.

Получаем $x\in[-1;1)$ – область сходимости ряда, где сумма ряда $S(x)=-\ln(1-x)$.

4.4. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена

Задача разложения функций в степенные ряды состоит в том, чтобы по заданной функции $f(x)$ найти сходящийся степенной ряд, сумма $S(x)$ которого в области сходимости ряда равнялась бы значению функции $f(x)$.

Для всякой функции $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)-$ого порядка включительно, в окрестности точки $x=a$ справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (4)$$

где $R_n(x)$ - остаточный член ряда Тейлора.

Теорема. Если функция $f(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего точку a, имеет (n+1)-ю производную $f^{(m+1)}(x)$, то остаточный член $R_n(x)$ для любой точки этого интервала может быть записан в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),\ a<\xi<x. \qquad (5)$$

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x=a$, то в формуле Тейлора число n можно брать сколь угодно большим.

Сходимость ряда Тейлора к функции $f(x)$ означает, что в рассматриваемой окрестности остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

Тогда, переходя в формуле (4) к пределу при $n\to\infty$, получим справа бесконечный ряд, который называется ***рядом Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots. \qquad (6)$$

Теорема. (Необходимое и достаточное условие представления функции рядом Тейлора). Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке $x=a$ функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке x его интервала сходимости $(a-R;a+R)$ выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0. \qquad (7)$$

Таким образом, ряд Тейлора (6) совпадает на интервале сходимости $(a-R;a+R)$ с данной функцией $f(x)$ только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)\neq 0$, то ряд либо расходится, либо сходится к другой функции.

Если в ряде Тейлора положить $a=0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют ***рядом Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots. \qquad (8)$$

Если для какой–нибудь функции формально написан ряд Тейлора, то чтобы доказать, что написанный ряд представляет данную функцию, нужно либо доказать, что остаточный член стремится к нулю, либо каким–нибудь иным способом убедиться, что написанный ряд сходится к данной функции.

Теорема. Если в некотором интервале, окружающем точку a, абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом, то функция $f(x)$ в этом интервале раскладывается в ряд Тейлора.

4.5. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

Замечание. При помощи разложения функций в степенные ряды можно: интегрировать дифференциальные уравнения, вычислять предел, определенный интеграл и т.п.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд используют ряд Маклорена (8). Где для разложения в ряд Маклорена необходимо:

- найти производные $f'(x),\ f''(x), ...,\ f^{(n)}(x), ...$;
- вычислить значения производных в точке $x=0$;
- написать ряд (8) для заданной функции и найти его интервал сходимости;
- найти интервал $(-R;R)$, в котором остаточный член ряда Маклорена $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и ряд Маклорена совпадают.

Пример 23. Найдём разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Маклорена.

Решение. Найдём производные функции

$$f'(x)=\left(e^x\right)'=e^x,\quad f''(x)=e^x, ...,\ f^{(n)}(x)=e^x, ...$$

Вычислим коэффициенты ряда Маклорена этой функции:

$$f(0)=e^x\Big|_{x=0}=e^0=1,\quad \frac{f'(0)}{1!}=\frac{1}{1!}\cdot e^x\Big|_{x=0}=\frac{1}{1!},\quad \frac{f''(0)}{2!}=\frac{1}{2!},\ldots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Составим ряд Маклорена: $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Найдем радиус сходимости данного ряда

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ абсолютно сходится при всех значениях x.

Покажем теперь, что при любом значении x сумма этого ряда равна e^x.

Рассмотрим интервал [-*N*;*N*], где *N*-любое фиксированное число. Для всех значений x из этого интервала все производные меньше числа M ($e^x<e^N=M$). Следовательно, по предыдущей теореме, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. По предположению *N*-любое число, следовательно, функция e^x раскладывается в ряд Маклорена при любых значениях x.

Таким образом, функция e^x раскладывается в ряд Маклорена при всех действительных числовых значениях своего аргумента и имеет вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad \text{при}\quad x\in(-\infty;\infty).$$

Аналогично можно получить следующие формулы.

Разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

1. $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$

2. $\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$

3. $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{(2n)!}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$

4. $sh(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$

5. $ch(t) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ при $t \in (-\infty, +\infty)$

6. ***Биномиальный ряд***

$$(1+t)^m = 1 + \frac{m}{1!} \cdot t + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot t^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot t^n + \ldots,$$

$t \in [-1, 1]$ при $m \geq 0$;

$t \in (-1, 1]$при $-1 < m < 0$;

$t \in (-1, 1)$ при $m \leq -1$

7. $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ при $t \in (-1, 1)$

8. $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$ при $t \in (-1, 1)$

9. $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^n}{n}$ при $t \in (-1, 1]$

10. $\ln(t+1) = \ln t + 2 \cdot \left(\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}} + \ldots \right)$ при $t \in (0, +\infty)$

11. $arctg(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n+1}}{2n+1}$ при $t \in [-1, 1]$

12. $\arcsin t = t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{t^7}{7} + \ldots$ при $t \in [-1, 1]$

Пример 24. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = 3^x$.

Решение. Так как $3^x = e^{\ln 3^x} = e^{x \ln 3}$. Получаем:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!} x + \frac{\ln^2 3}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 3}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\ln^n 3}{n!} x^n + \ldots, x \in (-\infty; \infty)$$

Пример 25. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(4 - x)$.

Решение. Так как $\ln(4-x) = \ln 4\left(1 - \frac{x}{4}\right) = \ln 4 + \ln\left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)$, то

$$\ln(4-x) = \ln 4 + \left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x}{4}\right)^3}{3} - \ldots = \ln 4 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4^3}\frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{1}{4^n}\frac{x^n}{n} - \ldots$$

если $-1 < -\frac{x}{4} \le 1 \Rightarrow -4 \le x < 4.$

Пример 26. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение. Так как $\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3\left(1 - \frac{x}{3}\right)} = \frac{2}{3}\frac{1}{1 - \frac{x}{3}}$, заменив x на $\frac{x}{3}$, получаем

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{3}\right)^n\right), \text{ где } -1 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow -3 < x < 3.$$

Пример 27. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0{,}0001$.

Решение. В формуле (10) для определения $\ln(t+1)$ и неравенстве для оценки R_n полагаем $t = 2$:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right] = 0{,}69315 + 0{,}4 + 0{,}00533 + 0{,}000128 +$$
$$+ 0.0000037 + \ldots$$

Пятое и последующие слагаемые меньше требуемой точности, поэтому достаточно взять четыре слагаемых.

Для определения $\ln 3$ получаем приближенное равенство

$$\ln 3 \approx 0{,}69315 + 0{,}4 + 0{,}00533 + 0{,}000128 = 1.0981$$

Чтобы получить десятичные логарифмы чисел, можно воспользоваться соотношением $\lg N = M \cdot \ln N$, *где* $M = 0{,}434294$.

Пример 28. Вычислить $\sin(10^0)$ с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

Решение. Воспользуемся формулой ряда Тейлора для синуса

$$\sin(10^0) = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7 + \ldots = 0.174533 - 0.000886 + 0.0000013 + \ldots$$

Так как третье слагаемое $\frac{1}{120!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5$ меньше точности $\varepsilon = 0{,}00001$, достаточно взять два слагаемых ряда. Получаем $\sin(10^0) = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0{,}17365$

Пример 29. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}00001$.

Решение. Воспользуемся формулой ряда Тейлора для экспоненты

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{32} + \frac{1}{720}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5040}\cdot\frac{1}{128} + \ldots =$$

$= 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}020833333 + 0{,}002604 + 0{,}0002604 + 0.0000217 + 0{,}00000155 + \ldots$

Нам достаточно взять семь слагаемых (следующие меньше требуемой точности). Получили $\sqrt{e} \approx 1{,}64872$

Замечание. Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд, но способ разложения при помощи вышеуказанных формул является самым удобным, так как позволяет быстро найти область сходимости ряда к данной функции.

Пример 30. Разложить функцию $f(x) = \ln(1 - 12x^2 - x)$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Для того чтобы воспользоваться известным разложением в ряд Тейлора логарифмической функции

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^n}{n} + \ldots, \quad -1 < t \le 1,$$

разложим квадратный трехчлен на произведение линейных множителей.

Предварительно найдем корни: $1 - 12x^2 - x = 0$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

Имеем $1 - 12x^2 - x = -12\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (3x+1)(1-4x)$.

Таким образом,

$f(x) = \ln(1 - 12x^2 - x) = \ln(3x+1)(1-4x) = \ln(1+3x) + \ln(1-4x)$.

Разложим каждое слагаемое в ряд Тейлора с помощью формулы разложения для логарифмической функции. В первом случае, полагая $t = 3x$, будем иметь

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{3^2x^2}{2} + \frac{3^3x^3}{3} - \frac{3^4x^4}{4} + \ldots, \text{ где } -1 < 3x \le 1, \text{ или } -\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3}.$$

Во втором случае, полагая $t = -4x$, будем иметь

$$\ln(1-4x) = -4x - \frac{4^2x^2}{2} - \frac{4^3x^3}{3} - \frac{4^4x^4}{4} - \ldots, \text{ где } -1 < -4x \le 1, \text{ или } -\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}.$$

В итоге получаем

$$f(x) = \ln(1 - 12x^2 - x) = \ln(1+3x) + \ln(1-4x) =$$

$$= \left(3x - \frac{3^2x^2}{2} + \frac{3^3x^3}{3} - \frac{3^4x^4}{4} + \ldots\right) + \left(-4x - \frac{4^2x^2}{2} - \frac{4^3x^3}{3} - \frac{4^4x^4}{4} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{(3-4)}{1}x - \frac{(3^2+4^2)}{2}x^2 + \frac{(3^3-4^3)}{3}x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(3^n + (-4)^n)}{n}x^n + \ldots.$$

Полученный ряд будет сходиться к исходной функции в области, которая является пересечением областей сходимости слагаемых рядов

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4} \end{cases} \text{ или } -\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}.$$

Ответ: при $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}$ $\quad \ln(1-12x^2-x) =$

$$= \frac{(3-4)}{1}x - \frac{(3^2+4^2)}{2}x^2 + \frac{(3^3-4^3)}{3}x^3 - ... + (-1)^{n+1}\frac{(3^n+(-4)^n)}{n}x^n + ...$$

Пример 31. Вычислить приближенно определенный интеграл $\int\limits_0^{0,1}\cos(100x^2)dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена.

$$\cos(100x^2) = 1 - \frac{(100x^2)^2}{2!} + \frac{(100x^2)^4}{4!} - ... = 1 - \frac{1000x^4}{2} + \frac{100000000x^8}{24} - ...$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int\limits_0^{0,1}\cos(100x^2)dx == \left(x - \frac{1000x^5}{10} + \frac{100000000x^9}{24\cdot 9} - ... \right)\Bigg|_0^{0,1} = 0{,}1 - 0{,}01 + \frac{1}{2160} - ...$$

Так как третье слагаемое будет уже меньше требуемой точности, то достаточно взять только два слагаемых.

Получим $\int\limits_0^{0,1}\cos(100x^2)dx \approx 0{,}1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

Пример 32. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,4}\frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$ с точностью до $0{,}001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд по степеням x, для чего воспользуемся разложением логарифмической функции в ряд Тейлора $\ln(1+\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} - ... + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n\cdot 2^n} + ...$,

причем ряд сходится при $-2 < x \le 2$. Промежуток интегрирования содержится в интервале сходимости ряда: $[0;\,0{,}4] \subset [-2;2]$.

$$\int\limits_0^{0,4}\frac{\ln(1+x/2)}{x}dx = \int\limits_0^{0,4}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} - ... + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n\cdot 2^n} + ...\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,4}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\cdot 2^2} + \frac{x^2}{3\cdot 2^3} - ... + \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}}{n\cdot 2^n} + ...\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2^3\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{3} - ...\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^2\cdot 5^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^3} - \frac{1}{4^2\cdot 5^4} + ...$$

Интеграл равен сумме сходящегося знакочередующегося числового ряда.

$$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx \approx \frac{1}{5}-\frac{1}{2^2\cdot 5^2}+\frac{1}{1125}-\ldots=\frac{1}{5}-\frac{1}{100}+0{,}0008+\ldots=$$

Таким образом, чтобы вычислить интеграл с заданной точностью, достаточно посчитать сумму первых двух членов ряда (третье и остальные слагаемые меньше требуемой точности): $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx=\frac{1}{5}-\frac{1}{100}=0{,}19$.

Получаем $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx \approx 0{,}190$.

4.6. Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Метод неопределённых коэффициентов

Этот метод наиболее удобен для решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пусть требуется решить уравнение

$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$,

с начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

где $y(x)$ - искомая функция, $p_k(x)$, $f(x)$ - известные функции.

Предполагая, что все коэффициенты $p_k(x)$ и правая часть $f(x)$ раскладываются в ряды по степеням $(x\text{-}x_0)$, сходящиеся в некотором интервале $(x_0-R;x_0+R)$, искомое решение $y(x)$ ищем в виде степенного ряда:

$y=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+\ldots$

с неопределёнными коэффициентами.

Первые коэффициенты находим из начальных условий.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем степенной ряд столько раз, каков порядок уравнения и подставляем выражения для функции $y(x)$ и её производных, коэффициентов $p_k(x)$ в исходное дифференциальное уравнение. Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате получим систему уравнений, из которой последовательно находим неизвестные коэффициенты c_n.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Пример 33. Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Решение уравнения будем искать в виде ряда, разложенного по степеням x:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots .$$

Дважды дифференцируем ряд

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots .$$

$$y'' = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + 5\cdot 4c_5 x^3 + \dots + n\cdot(n-1)c_n x^{n-2} + \dots .$$

Из начальных условий находим $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Подставляя полученные разложения $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ в исходное уравнение, получаем:

$$2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + 5\cdot 4c_5 x^3 + \dots + (n+3)(n+2)c_{n+3} x^{n+1} + \dots =$$
$$= c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \dots + c_n x^{n+1} + \dots .$$

Откуда следует:

$$2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$
$$3\cdot 2c_3 - c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0,$$
$$4\cdot 3c_4 - c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_4 = \frac{1}{4\cdot 3},$$
$$5\cdot 4c_5 - c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_5 = 0,$$
$$6\cdot 5c_6 - c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_6 = 0,$$
$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$
$$3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3n\cdot(3n+1)c_{3n+1} = c_n \quad \Rightarrow \quad c_{3n+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3n(3n+1)}.$$

Таким образом,

$$c_0 = 0; \quad c_1 = 1; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = 0; \quad c_4 = \frac{1}{3\cdot 4}; \quad c_5 = 0;$$
$$c_6 = 0; \quad c_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}; \ c_8 = 0; \ c_9 = 0; \dots$$

Получаем $y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7!}x^7 + \dots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3n(3n+1)}x^{3n+1} + \dots .$

С помощью признака Даламбера легко убедиться в том, что этот ряд сходится на всей оси $0x$ и, следовательно, представляет искомое решение при всех x.

Метод последовательного дифференцирования

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Решение $y(x)$ дифференциального уравнения ищем в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Первые коэффициенты находим из начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Подставляя в уравнение значения $x = x_0$ $y = y_0$, $y' = y'_0$, находим третий коэффициент. Следующие коэффициенты находим путём последовательного дифференцирования уравнения по переменной x и вычисления значений производных при $x = x_0$. Найденные значения производных подставляем в ряд Тейлора. Ряд Тейлора представляет собой искомое частное решение уравнения. Частичная сумма этого ряда будет приближённым решением дифференциального уравнения.

Рассмотренный способ применим и для построения общего решения уравнения, если y_0, y'_0 рассматривать как произвольные константы C_1, C_2.

Пример 34. Методом последовательного дифференцирования найти три первых члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения $y' = x \cdot y^2 + 1$, при $y(1) = 0$.

Решение. Будем искать решение дифференциального уравнения в виде

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \dots .$$

Из начального условия $y(1) = 0$. Подставив $x = 1, y = 0$ в исходное уравнение, находим $y'(1) = 1 \cdot 0^2 + 1 = 1$. Для нахождения следующих коэффициентов дифференцируем исходное дифференциальное уравнение

$$y'' = y^2 + 2xyy', \qquad y''(1) = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0;$$

$$y''' = 4yy' + 2\left(xy'^2 + xyy''\right), \qquad y'''(1) = 4 \cdot 0 \cdot 1 + 2\left(1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0 \cdot 0\right) = 2;$$

$$y^{(4)} = 6y'^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 6xyy''', \quad y^{(4)}(1) = 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 2 = 6;$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим:

$$y = 1(x-1) + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots .$$

Таким образом, решение нашего уравнения есть ряд:

$$y = (x-1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots$$

§5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

При изучении разнообразных периодических процессов, то есть процессов, которые повторяются через определённый промежуток времени (они встречаются в радиотехнике, электронике, теории упругости, теории и практике математического регулирования, медицине и т.д.), целесообразно раскладывать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

5.1. Основные понятия

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд $\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...$, или, короче, $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, членами которого являются синусы и косинусы от целых кратных значений аргумента *x*. Действительные числа a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ называются ***коэффициентами тригонометрического ряда.***

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

-общий случай - на отрезке $[-l,l]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right),$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\ n=1,2,...$$

Следствия.

1. Если $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$ **четная функция**, то:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right),$$

где $a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx,\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\quad n=0,1,2,...$

2. Если $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$ **нечетная функция**, то:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right),\quad \text{где } b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx,\quad n=1,2,...$$

- частный случай - на отрезке $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right], \tag{1}$$

$$\text{где } a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\ a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(kx)dx;\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(kx)dx \tag{2}$$

Следствия.

1. Если $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ **четная функция**, то:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx),$$

где $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$; $b_n = 0$, $(n = 1,2,...)$

2. Если $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ **нечетная функция**, то:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

где $a_0 = 0$; $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$ $(n = 1,2,...)$

Замечания.

1. В силу периодичности исходной функции и суммы ряда Фурье указанное разложение может быть получено во всей области определения функции. Если ряд Фурье сходится, то его сумму обозначим $S(x)$.
2. Из определения ряда Фурье отнюдь не следует, что функция $f(x)$ должна разлагаться в свой ряд Фурье. Ряд Фурье может расходиться для всех x, а может сходиться, но не к функции $f(x)$; существуют ряды Фурье, которые не сходятся ни для одного x.
3. Если функция $f(x)$ с периодом 2π на отрезке $[0;2\pi]$ удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее имеет место разложение (1), где коэффициенты вычисляются по формулам ($n = 1,2,3,...$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx. \quad (3)$$

($\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ и $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ равны в силу свойства периодической функции).

5.2. Теорема о разложимости функций в ряд Фурье

Выясним условия, при которых ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой как раз функцию $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***гладкой*** в интервале $(a;b)$, если в этом интервале она непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***кусочно-гладкой*** в интервале $(a;b)$, если этот интервал можно разбить на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых $f(x)$ - гладкая функция.

В силу данных определений кусочно-гладкая в интервале $(a;b)$ функция может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода.

Сформулируем теперь основную теорему о возможности разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье (в ней указаны).

Теорема ***(достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье).*** Если функция $f(x)$ кусочно-гладкая в интервале $(-\pi;\pi)$, то её ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна.

В точке разрыва функции ряд сходится к среднему арифметическому предельных значений слева и справа

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2},$$

где x_0-точка разрыва первого рода.

В обеих граничных точках интервала сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при стремлении независимой переменной к этим точкам изнутри интервала

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}.$$

Условия основной теоремы могут быть несколько иными.

Теорема (Теорема Дирихле, достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье). Пусть 2π - периодическая функция $f(x)$ отрезке $[-\pi;\pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точках непрерывности функции сумма ряда совпадает с самой функцией: $f(x)=S(x)$;
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то есть среднему арифметическому предельных значений слева и справа;
3. В точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ (на концах отрезка) сумма ряда равна

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Замечание. Условиям Дирихле удовлетворяют большинство функций, которые встречаются в математике и ее приложениях. Существуют функции, не удовлетворяющие условиям Дирихле, но при этом разложимые в ряд Фурье, то есть теорема Дирихле дает лишь достаточное условие разложимости, но оно не является необходимым.

Пример 35. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $(-\pi;\pi)$.

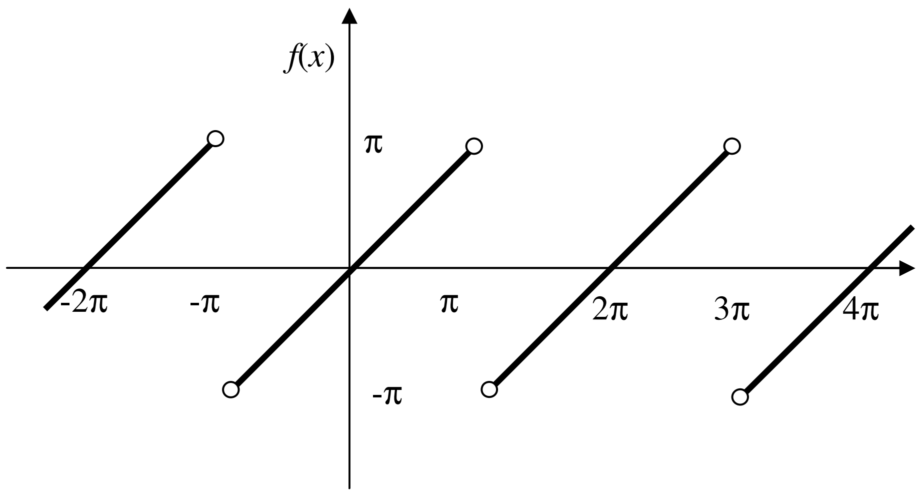

Рисунок 14

Решение. Данная функция определена на всей оси, непрерывная и гладкая на отрезке $[-\pi;\pi]$, значит, она удовлетворяет условиям разложимости в ряд Фурье. Так как заданная функция является нечетной, то коэффициенты Фурье находим по формулам:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n=1,2,...)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x; & dv=\sin(nx)dx \\ du=dx; & v=-\dfrac{\cos\,(nx)}{n}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{2}{n}\cos(\pi n)=\frac{(-1)^{n+1}2}{n}$$

Таким образом, ряд Фурье примет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx).$$

Так как ряд Фурье совпадает с функцией $f(x)$ в точках непрерывности, и, учитывая периодичность функции и ряда Фурье, получаем

$$S(x)=f(x)=x \text{ при } x\in(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k),\ k\in \mathrm{Z}.$$

В точках $x_k=\pm\pi+2\pi k$ $(k\in \mathrm{Z})$ сумма ряда равна

$$S(x_k)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

Ниже приведен график суммы $S(x)$ ряда Фурье. Эта сумма является периодической функцией $(T=2\pi)$ и совпадает с $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$

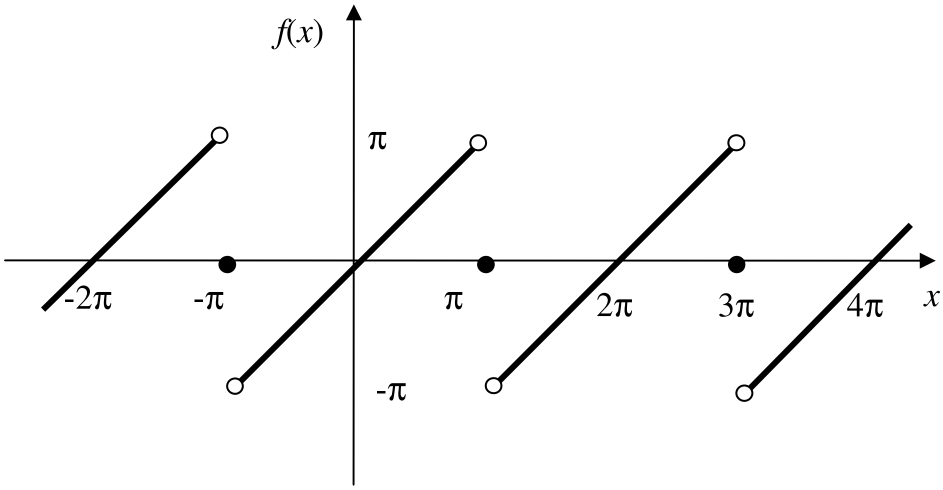

Рисунок 15

Ответ: $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin(nx),\quad x\in\left(-\pi+2\pi k;\pi+2\pi k\right),\ k\in Z.$

Пример 36. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ с периодом $T=2$ на отрезке $(-1;1)$.

Решение. Так как функция чётная, то коэффициент $b_n=0 \qquad (n=1,2,...)$.

Вычислим: $a_0=2\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ и $a_n=2\int\limits_0^1 f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n=0,1,2,...)$

$$a_0=2\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$a_n=2\int\limits_0^1 x^2\cos(\pi nx)\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2; & dv=\cos(\pi nx)dx \\ du=2xdx; & v=\dfrac{\sin(\pi nx)}{\pi n}\end{array}\right|=$$

$$=2\left(\frac{x^2\sin(\pi nx)}{\pi n}\Big|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^1 x\sin(\pi nx)\,dx\right)=\left|\begin{array}{ll} u=x; & dv=\sin(\pi nx)\,dx \\ du=dx; & v=-\dfrac{\cos(\pi nx)}{\pi n}\end{array}\right|=$$

$$=2\left(0-\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{x\cos(\pi nx)}{\pi n}\Big|_0^1+\int\limits_0^1\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n}dx\right]\right)=$$

$$=\frac{4\cos(\pi n)}{(\pi n)^2}-\frac{4}{(\pi n)^3}\sin(\pi nx)\Big|_0^1=\frac{4\cos(\pi n)}{(\pi n)^2}=4\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2}$$

Таким образом, ряд Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\pi nx)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{(\pi n)^2}\cos(\pi nx).$$

Так как ряд Фурье совпадает с функцией $f(x)$ в точках непрерывности, и, учитывая периодичность функции и ряда Фурье, получаем

$$S(x)=f(x)=x^2 \text{ при } x\in[-1+2k;1+2k), \quad \text{k - целое}.$$

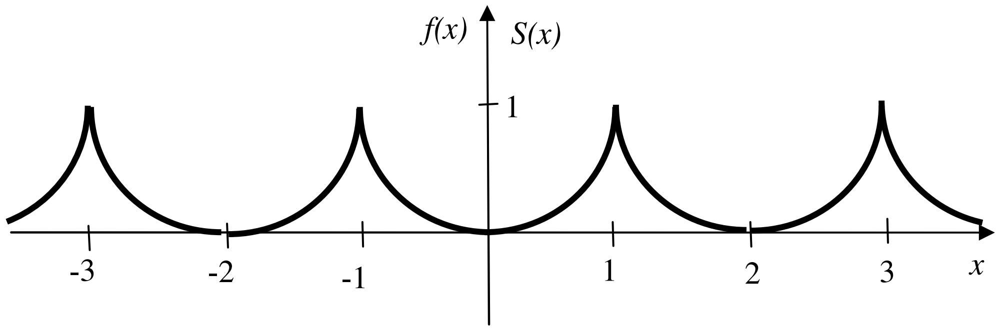

Рисунок 16

Ответ: $x^2=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{(\pi n)^2}\cos(\pi\cdot nx), \quad x\in[-1+2k;1+2k), \quad \text{k - целое}.$

§6. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Пусть $f(t)$ - действительная функция действительного переменного t.

Функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет условиям:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t\le 0$;

2) существуют такие постоянные M и s_0, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$ (число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$);

3) $f(t)$-кусочно-непрерывна при $t\ge 0$, то есть она непрерывна или имеет точки разрыва первого рода, причём на каждом любом конечном промежутке таких точек конечное число.

Условия 1-3 выполняются для большинства функций, описывающих различные физические процессы.

Изображением оригинала (преобразованием Лапласа) функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=s+i\cdot\sigma$, определяемая интегралом:

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt \qquad (1)$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют ***преобразованием Лапласа***. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и $F(p)$ записывается в виде $F(p)\leftrightarrow f(t)$ или $f(t)\leftrightarrow F(p)$.

Свойства преобразования Лапласа.

1) *Линейность.* $C_1\cdot f_1(t)+C_2\cdot f_2(t)\leftrightarrow C_1\cdot F_1(p)+C_2\cdot F_2(p)$ (2)

Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений.

2) *Подобие.* $f(\lambda\cdot t)\leftrightarrow \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right),\quad \lambda>0$ (3)

Умножение аргумента оригинала на положительное число λ приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

3) *Смещение.* Умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздыванию изображения на α, то есть $e^{at}f(t)\leftrightarrow F(p-a)$ (4)

α - некоторая постоянная (действительная или комплексная величина).

4) *Запаздывание.* Запаздыванию оригинала на $\tau>0$ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$, то есть $f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$ (5)

(при $t<\tau$ в силу первого условия, налагаемого на оригинал, $f(t-\tau)\equiv 0$).

5) *Дифференцирование оригинала.* Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)(k=1,2,\dots,n)$ являются оригиналами, то для любого $k=1,2,\dots,n$

$$f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0),$$

$$f''(t)\leftrightarrow p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f'''(t)\leftrightarrow p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0),$$

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(0) \qquad (6)$$

6) *Интегрирование оригинала.* Интегрированию оригинала соответствует деление изображения на p, то есть $\int_0^t f(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{F(p)}{p}$ (7)

7) *Дифференцирование изображения.* Дифференцирование изображения соответствует умножение его оригинала на $-t$

$$-t\cdot f(t)\leftrightarrow F'(p),$$

$$t^2\cdot f(t)\leftrightarrow F''(p),$$

$$(-1)^n t^n\cdot f(t)\leftrightarrow F^{(n)}(p). \qquad (8)$$

8) *Интегрирование изображения.* Интегрированию изображения соответствует деление его оригинала на t

$$\frac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int_p^{+\infty}F(z)dz \qquad (9)$$

9) *Умножение изображений.*

$$F_1(p)\cdot F_2(p)\leftrightarrow\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t)$$

Пример 37. Выяснить, какие из данных функций являются оригиналами: а) $f(t)=\begin{cases}0, t<0\\ e^{(3+4i)t}, t\geq 0\end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{1}{t-4}, t\geq 0\end{cases}$

Решение. а) функция $f(t)$ является оригиналом, так как удовлетворяет всем требования, предъявляемым к оригиналу: при $t<0$ обращается в нуль, непрерывна, а для $t\geq 0$ $\left|f(t)\right|=\left|e^{(3+4i)t}\right|=e^{3t}\left|\cos 4t+i\sin 4t\right|=e^{3t}\leq Me^{s_0t}$ при $M\geq 1, s_0=3$;

б) функция $f(t)$ не является оригиналом, т.к. в точке $t=4$, принадлежащей промежутку $[0,+\infty)$, она имеет разрыв второго рода.

Пример 38. Найти изображение функций-оригиналов, используя определение:

а) $f(t)=\eta(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t\geq 0\\ 0 \text{ при } t<0\end{cases}$ - единичная функция Хевисойда;

б) $f(t)=e^{5t}$.

Решение.

а) График единичной функции изображен на рисунке 17.

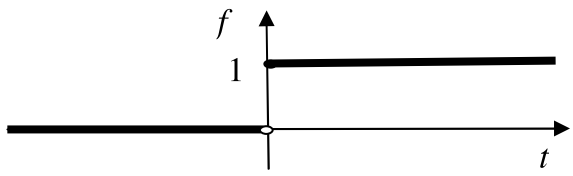

Рисунок 17.

Для функции $f(t)=\eta(t)$ имеем

$$F(p)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}.$$

б)Для функции $f(t)=e^{5t}$ имеем

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot e^{5t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-5)t}dt=-\frac{1}{p-5}e^{-(p-5)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-5}.$$

Пример 39. Найти изображения следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления.

а) $\mathrm{sh}(2t)$; б) $t\,\mathrm{sh}(2t)$; в) $\cos(3t)$; г) $e^t\cdot\cos(3t)$.

Решение.

а) Имеем $f(t)=\mathrm{sh}(2t)=\dfrac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}$. Используя теорему смещения, получаем $e^{2t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-2}$, $e^{-2t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p+2}$. Учитывая свойство линейности (2), запишем

$$sh(2t)=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}\right)=\frac{2}{p^2-4},$$

б) для функции $f(t)=t\,\mathrm{sh}(2t)$ используем теорему о дифференцировании изображения;

если $sh(2t)\leftrightarrow\dfrac{2}{p^2-4}$, то $t\cdot sh(2t)\leftrightarrow\left(\dfrac{2}{p^2-4}\right)'=\dfrac{4p}{(p^2-4)^2}$,

в) имеем $\cos(3t)=\dfrac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}$.

Применяя теорему смещения к e^{i3t} и e^{-i3t}, используя свойство линейности (2), получаем $\cos(3t)=\dfrac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-3i}+\dfrac{1}{p+3i}\right)=\dfrac{p}{p^2+9}$,

г) для функции $f(t)=e^t\cdot\cos(3t)$ воспользуемся результатом предыдущего примера и теоремой смещения (4):

если $f(t)=\cos(3t)\leftrightarrow\dfrac{p}{p^2+9}$, то $f(t)\cdot e^t=\cos(3t)\cdot e^t\leftrightarrow\dfrac{p-1}{(p-1)^2+9}$.

Ниже приводится таблица.

Основные операционные соотношения

Таблица 3.

	f(t)	F(p)		f(t)	F(p)
1	$1=\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$	4	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
5	e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	6	a^t	$\dfrac{1}{p-\ln a}$
7	$\sin(t)$	$\dfrac{1}{p^2+1}$	8	$\cos(t)$	$\dfrac{p}{p^2+1}$
9	$sh(t)$	$\dfrac{1}{p^2-1}$	10	$ch(t)$	$\dfrac{p}{p^2-1}$
11	$\sin(kt)$	$\dfrac{k}{p^2+k^2}$	12	$\cos(kt)$	$\dfrac{p}{p^2+k^2}$
13	$sh(kt)$	$\dfrac{k}{p^2-k^2}$	14	$ch(kt)$	$\dfrac{p}{p^2-k^2}$

Продолжение таблицы 3.

15	$e^{at}t$	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	16	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
17	$e^{at}\cos(kt)$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+k^2}$	18	$e^{at}\sin(kt)$	$\dfrac{k}{(p-a)^2+k^2}$
19	$e^{at}ch(kt)$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-k^2}$	20	$e^{at}sh(kt)$	$\dfrac{k}{(p-a)^2-k^2}$
21	$t\cdot\cos(kt)$	$\dfrac{p^2-k^2}{(p^2+k^2)^2}$	22	$t\cdot\sin(kt)$	$\dfrac{2pk}{(p^2+k^2)^2}$

23	$t \cdot ch(kt)$	$\dfrac{p^2+k^2}{(p^2-k^2)^2}$	24	$t \cdot sh(kt)$	$\dfrac{2pk}{(p^2-k^2)^2}$
25	y'	$pY(p)-y(0)$	26	y''	$p^2Y(p)-py(0)-y$

Пример 40. Найти изображение следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления и таблицу.

а) $f(t)=3-5t^2+2\sin(4t)-3e^{-6t}$;

б) $f(t)=\cos^2(3t)$; в) $f(t)=te^{5t}$.

Решение. а) используя свойство линейности и таблицу, получим:

$$F(p)=\frac{3}{p}-5\frac{2!}{p^3}+2\frac{4}{p^2+16}-3\frac{1}{p+6}=\frac{3}{p}-\frac{10}{p^3}+\frac{8}{p^2+16}-\frac{3}{p+6},$$

б) применив формулу понижения степени и используя свойство линейности, получим:

$$\cos^2(3t)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(6t)\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+36}\right),$$

в) учитывая соотношение $t\leftrightarrow\dfrac{1}{p^2}$ и теорему смещения, получим $te^{5t}\leftrightarrow\dfrac{1}{(p-5)^2}$.

Пример 41. Найти изображение для функции-оригинала, представленного графически (рисунок 18).

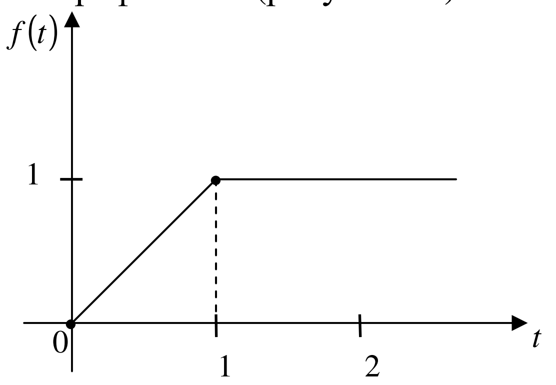

Рисунок 18.

Решение. Имеем

$$f(t)=\begin{cases}t, 0\le t\le 1\\ 1, t>1\end{cases}.$$

Это эквивалентно записи

$$f(t)=t\eta(t)-t\eta(t-1)+\eta(t-1)=t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)$$

Используя теорему запаздывания, таблицу и свойство линейности, получим

$$t\eta(t)-(t-1)\eta(t-1)\leftrightarrow\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

Пример 42. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ при помощи разложения на простейшие дроби.

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*. Так как

$$1\equiv A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+Cp^2(p-1)+Dp(p-1),$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему

$$\begin{cases}A+B+C=0\\-A-C+D=0\\4A+4B-D=0\\-4A=1\end{cases}.$$

Решив её, получим

$$A=-\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{5},\ C=\frac{1}{20},\ D=-\frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$F(p)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(p-1)}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{p^2+4}-\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4}\leftrightarrow-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos(2t)-\frac{1}{10}\sin(2t).$$

Пример 43. Найти свертку функций $\sin t$ и $\cos t$.

Решение. Имеем

$$\sin t*\cos t=\int_0^t\sin(t-\tau)\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin(t-2\tau)+\sin(t)]d\tau=\frac{1}{2}\tau\sin(t)\Big|_0^t+$$

$$+\frac{1}{4}\cos(t-2\tau)\Big|_0^t=\frac{1}{2}t\sin(t).$$

Пример 44. Восстановить оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$ при помощи свертки.

Решение. Представим $F(p)$ как произведение двух функций и используя теорему умножения, запишем

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\leftrightarrow\sin(t)*\cos(t)=\frac{1}{2}t\cdot\sin(t).$$

6.2. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем

Рассмотрим применение правил и теорем операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем при заданных начальных условиях. Предлагаем, что искомое решение, его производные и правая часть дифференциального уравнения являются оригиналами.

Схема решения дифференциального уравнения.

1. Искомая функция, ее производные, входящие в данное уравнение, правая часть уравнения заменяются их изображениями. В результате получается операторное уравнение.
2. Решаем операторное уравнение относительно изображения искомой функции.
3. Переходим от изображения искомой функции к оригиналу.

Схема решения систем дифференциальных уравнений такая же.

Пример 45. Решить дифференциальное уравнение

$y'' + y' - 12y = 3$, если $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Решение. Пусть $y = y(t)$ - искомое решение.

$y(t) \leftrightarrow Y(p)$,

$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$,

$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p$,

$3 \leftrightarrow \dfrac{3}{p}$.

Запишем операторное уравнение: $p^2Y(p) - p + pY(p) - 1 - 12Y(p) = \dfrac{3}{p}$

или $Y(p) = \dfrac{3 + p + p^2}{p^3 + p^2 - 12p} = \dfrac{3 + p + p^2}{p(p+4)(p-3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+4} + \dfrac{C}{p-3}$,

$3 + p + p^2 = A(p+4)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+4)$.

Находим *A*, *B*, *C*. $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{5}{28}$, $C = \dfrac{5}{7}$.

Итак, $Y(p) = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{p} + \dfrac{5}{28} \cdot \dfrac{1}{p+4} + \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{1}{p-3} \leftrightarrow -\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{28}e^{-4t} + \dfrac{5}{7}e^{3t}$.

Ответ. $y(t) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{28}e^{-4t} + \dfrac{5}{7}e^{3t}$

Пример 46. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' + 5y' - 4x = 0, \\ y'' - 5x' - 4y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$

Решение. Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$, $y(t) \leftrightarrow Y(p)$. Тогда

$x'(t) \leftrightarrow pX(p)$, $y'(t) \leftrightarrow pY(p)$, $x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - 1$, $y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p)$.

Преобразованная система имеет вид $\begin{cases} (p^2 - 4)X(p) + 5pY(p) = 1 \\ -5pX(p) + (p^2 - 4)Y(p) = 0 \end{cases}$

Определяем $X(p)$, $Y(p)$ по правилу Крамера

$X(p) = \dfrac{p^2 - 4}{(p^2+1)(p^2+16)}$; $Y(p) = \dfrac{5p}{(p^2+1)(p^2+16)}$.

$$X(p)=\frac{p^2-4}{(p^2+1)(p^2+16)}=\frac{A_1p+B_1}{p^2+1}+\frac{A_2p+B_2}{p^2+16}$$

Вычислив A_1, A_2, B_1, B_2, получим $A_1=A_2=0$, $B_1=-\frac{1}{3}$, $B_2=\frac{4}{3}$

Итак, $X(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{p^2+16}\leftrightarrow\frac{1}{3}\left(-\sin(t)+\sin(4t)\right)$,

$x(t)=\frac{1}{3}\left(-\sin(t)+\sin(4t)\right)$

$$Y(p)=\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+16)}=\frac{M_1p+N_1}{p^2+1}+\frac{M_2p+N_2}{p^2+16}$$

Вычислив M_1, M_2, N_1, N_2, получим $M_1=\frac{1}{3}$, $M_2=-\frac{1}{3}$, $N_1=N_2=0$.

Тогда $Y(p)=\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p}{p^2+16}\leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\cos(t)-\cos(4t)\right)$,

$y(t)=\frac{1}{3}\left(\cos(t)-\cos(4t)\right)$.

Итак, $x(t)=\frac{1}{3}\left(-\sin(t)+\sin(4t)\right)$, $y(t)=\frac{1}{3}\left(\cos(t)-\cos(4t)\right)$.

Тестовые вопросы по математическому анализу

Тема "Теория функции комплексного переменного"

1. Интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{|z-1|=2}\frac{5dz}{(z-5)^3(z-4)}$ равен . . .

а)0; б) $3\pi\cdot i$;

в)5; г) $\frac{\pi\cdot i}{3}$.

2. Аргумент комплексного числа $2+2i$ равен…

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$;

в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$.

3.Частное $\frac{z}{\bar{z}}$ от деления двух комплексно сопряженных чисел, где $z=3-3i$, равно…

а) $-18i$; б) i;

в) $-i$; г) $18i$.

4. Если $z_1=1-i$, $z_2=2+i$, то $z_1\cdot z_2$ равно…

а) $1-i$; б) $3+3i$;

в) $2-3i$; г) $3-i$.

5. Значение функции $f(z) = z^2 + i$ в точке $z_0 = 1 + i$ равно…

а) $2 + 3i$; б) $3 + 2i$;

в) $3i$; г) $2i$.

Тема "Дифференциальные уравнения"

6. Если одним из частных решений дифференциального уравнения $y'' - 4y = -12x + 8$ является функция $\dot{y} = 3x - 2$, то общее решение уравнения имеет вид…

а) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 3x - 2$; б) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 12x - 8$;

в) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 8 - 12x$; г) $C_1 e^{4x} + C_2 + 3x - 2$.

7.Частное решение дифференциального уравнения $ctgx \cdot y' = 2 - y$ при $y(0) = 1$ имеет вид…

а) $-3 + 2\cos x$; б) $2 - \cos x$;

в) $2 - 3\cos x$; г) $-2 + \cos x$.

8. Из данных дифференциальных уравнений уравнением Бернулли является…

а) $y' - y \cdot tg(x) = -\frac{2}{3} y^4 \cdot \sin(x)$; б) $y' = 3e^{3y}$;

в) $y' = (2y + 1) \cdot ctg(x)$; г) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$.

9. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = xdx$ имеет вид…

а) $\frac{-1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$; б) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$;

в) $\frac{-1}{y} = x^2 + C$; г) $y = \frac{x^2}{2} + C$.

10. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$, тогда его общее решение имеет вид…

а) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$; б) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$;

в) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$; г) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

11. Из данных дифференциальных уравнений линейным уравнением первого порядка является...

а) $y' = 3e^{3y}$; б) $x \cdot y' + y = 2y^2 \cdot \ln(x)$;

в) $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$; г) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$.

12. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция…

а) $y = Ax + B$; б) $y = Ax^2 + Bx$;

в) $y = e^{2x}(Ax + B)$; г) $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$.

13. Порядок дифференциального уравнения $3y''-y'+6y=x^5$ равен…

а) 5; б) 1; в) 2; г) 6.

14. Общий интеграл дифференциального уравнения $-\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$ имеет вид…

а) $\frac{-1}{y}=\frac{x^2}{2}+C$; б) $y=\frac{C}{x}$;

в) $\frac{-1}{y}=x^2+C$; г) $y=\frac{x}{2}+C$.

Тема ”Числовые и функциональные ряды”

15. Для ряда $cos\frac{\pi}{10}+cos\frac{\pi}{20}+cos\frac{\pi}{30}+...$ общий член равен:

а) $cos\frac{\pi}{2^n}$; б) $cos\frac{\pi n}{2}$;

в) $cos\frac{\pi}{10^n}$; г) $cos\frac{\pi}{10n}$.

16. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$:

а) первый сходится, второй расходится;
б) оба сходятся;
в) оба расходятся;
г) первый – расходится, второй сходится.

17. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$ сходится в промежутке:

а) $-\infty<x<\infty$; б) $-1\le x\le 1$;

в) $-1<x<1$; г) $0<x<2$.

18. Ряд Маклорена для функции $y=e^{-2x}$ имеет вид

а) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2x^n}{n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n x^n}{n!}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$.

19. Коэффициент Фурье a_1 для функции $f(x)=x$ $(-\pi<x\le\pi)$, $T=2\pi$ равен

а) –1; б) 0; в) 1; г) ∞.

Тема ”Операционное исчисление”

20. Найти оригинал для функции $F(p)=e^{-3p}\cdot\frac{p}{p^2+1}$, если $\cos t\leftrightarrow\frac{p}{p^2+1}$:

а) $\cos(3t)$; б) $\cos(t)+3$;

в) $\cos(t)-3$; г) $\cos(t-3)$.

21. Найти изображение для функции $f(t)=e^{2t}\cdot\sin t$, если $\sin t\leftrightarrow\frac{1}{p^2+1}$:

а) $e^{2t}\dfrac{p}{p^2+1}$; б) $e^{p-2}\dfrac{p}{p^2+1}$;

в) $\dfrac{1}{(p-2)^2+1}$; г) $e^{-p}\dfrac{p}{p^2+1}$.

22. Найти изображение для выражения $x''-3x+5$ с начальными условиями: $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

а) $(p^2-3)X(p)-p+\dfrac{5}{p}$; б) $(p+3)X(p)-p+\dfrac{1}{p}$;

в) $(p^2-3)X(p)+p+\dfrac{5}{p}$; г) $(p^2-3)X(p)-p+5$.

Ответы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
а	*г*	*в*	*г*	*в*	*а*	*б*	*а*	*а*	*б*	*г*

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
а	*в*	*б*	*г*	*г*	*б*	*в*	*б*	*г*	*в*	*а*

Вопросы по математическому анализу

Комплексные числа

1. Дайте определение комплексного числа. Что называется действительной и мнимой частями комплексного числа?
2. Напишите формулы сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
3. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.
4. Напишите формулу Эйлера показательной формы записи комплексного числа.
5. Какая запись комплексного числа называется алгебраической? Тригонометрической? Показательной?
6. Напишите формулу Муавра возведения в степень комплексного числа.
7. Напишите формулы умножения, возведения в степень, деления, извлечения корня для комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
8. Дайте определение предела функции комплексного переменного в точке.
9. Запишите формулы основных элементарных функций комплексного переменного.
10. Запишите условие Коши-Римана аналитичности функции комплексного переменного в декартовых координатах.
11. Запишите условие Коши-Римана аналитичности функции комплексного переменного в полярных координатах.
12. Дайте определение дифференциала функции комплексного переменного.
13. Дайте определение интеграла по кривой от функции комплексного переменного.
14. Сформулируйте теорему Коши об интегрировании аналилитичной функции для односвязной области.
15. Сформулируйте теорему Коши об интегрировании аналилитичной функции для многосвязной области.
16. Классифицируйте особые точки.
17. Дайте определение вычета функции, приведите формулы для его вычисления.
18. Сформулируйте основную теорему о вычетах.

Дифференциальные уравнения

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка и приведите пример.
2. Дайте определение решения дифференциального уравнения первого порядка.
3. Что называется порядком дифференциального уравнения?

4. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения первого порядка. Дайте определение общего интеграла дифференциального уравнения первого порядка.
5. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
6. Сформулируйте теорему Коши существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
7. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.
8. Что называется полем направлений? Дайте определение изоклины. Как с помощью изоклин найти решение дифференциального уравнения?
9. Дайте определение уравнений с разделяющимися переменными и укажите метод их решения, приведите пример.
10. Дайте определение однородных уравнений и укажите метод их решения, приведите пример.
11. Дайте определение уравнений, приводящихся к однородным, и укажите метод их решения, приведите пример.
12. Дайте определение линейных уравнений первого порядка и укажите метод их решения, приведите пример.
13. Дайте определение уравнений Бернулли и укажите метод их решения, приведите пример.
14. Дайте определение уравнений в полных дифференциалах и укажите метод их решения, приведите пример.
15. Дайте определение дифференциальных уравнений второго порядка, приведите пример.
16. Дайте определение решения дифференциального уравнения второго порядка.
17. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка, общего интеграла.
18. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения второго порядка, частного интеграла.
19. Сформулируйте теорему Коши существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка
20. Перечислите типы уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка, и укажите методы их решения.
21. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка и приведите пример.
22. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка и приведите пример.
23. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
24. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и укажите метод их решения.

25. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
26. Укажите метод интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Числовые и функциональные ряды

1. Дайте определение числового ряда, члена ряда, общего члена ряда.
2. Дайте определение n-ой частичной суммы ряда, суммы ряда.
3. Какой ряд называют сходящимся? Расходящимся?
4. Перечислите свойства числовых рядов.
5. Исследовать на сходимость ряд геометрической прогрессии, привести пример.
6. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда и достаточное условие расходимости числового ряда, приведите пример.
7. Дайте определение гармонического ряда и исследуйте его на сходимость.
8. Сформулируйте достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши, приведите примеры их применения
9. Исследовать на сходимость ряд Дирихле (обобщённый гармонический ряд).
10. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
11. Сформулируйте общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.
12. Дайте определения абсолютно и условно сходящихся числовых рядов, приведите пример.
13. Дайте определение функционального ряда, приведите пример.
14. Дайте определение степенного ряда, приведите пример.
15. Сформулируйте теорему Абеля об области сходимости степенного ряда.
16. Дайте определение интервала сходимости и радиуса сходимости степенного ряда. Как их найти?
17. Сформулируйте свойства степенных рядов.
18. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
19. Напишите разложение в ряд Маклорена функций e^x,$sin(x)$, $cos(x)$, $(1+x)^n$, $ln(1+x)$, $arctg(x)$.
20. Укажите методы приближённого вычисления значений функции, приближённого вычисления определённых интегралов, приближённого решения дифференциальных уравнений и приведите примеры.

Операционное исчисление

1. Перечислите свойства функции-оригинала.
2. Дайте определение изображения функции.
3. Перечислите свойства преобразования Лапласа.
4. Перечислите приложения операционного исчисления

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агишева Д. К. , Короткова Н. Н. , Мустафина Д. А. Математика. II часть. Учеб. пособие / ВолгГТУ, ВПИ (филиал), Волгоград, 2003. –94 с.
2. Афонасенков О. В. **,** Матвеева Т. А. Функциональные ряды, ряды и интеграл Фурье: Учеб. пособие / ВолгГТУ. – Волгоград, 2008. – 96 с.
3. Баврин И. И., Матросов В. Л. Общий курс высшей математики: Учеб. для студентов физ.-мат. спец. пед. вузов. – М.: Просвещение, 1995. – 464 с.
4. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1966. – 736 с.
5. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с.
6. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения. – Мн.: ТетраСистемс, 1998. – 416 с.
7. Гусак А. А. Высшая математика, т. 2. – Мн.: ТетраСистемс, 1998.
8. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.: Учеб. пособие для студентов втузов – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 416 с.
9. Заварзина И. Ф., Кулакова Р. Д. Комплексные числа и операционное исчисление : Метод.указания / МАТИ **.-** Москва, 2004.-31с.
10. Зайцев И. А. Высшая математика. Учеб. для с/х вузов. – 2-е изд., испр. и доп. –М.: Высш. шк., 1998. – 409 с.
11. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учеб. пособие для студентов втузов – 3-е изд., доп. – М.: Высш. шк., 1964. – 480 с.
12. Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач повысшей математике. 1 курс. – М.: Рольф, 2001. – 576 с.
13. Матвеева Т. А. , Светличная В. Б. , Короткова Н. Н. Числовые ряды. Учеб. пособие / ВолгГТУ. – Волгоград, 2004. – 45 с.
14. Мироненко Е. С. Высшая математика: Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерных специальностей вузов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000. – 110 с.
15. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. – М.: Рольф, 2000. – 288 с.
16. Ребро И. В., Кузьмин С. Ю., Короткова Н. Н., Мустафина Д. А. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие / ВолгГТУ. – Волгоград, 2006. – 64 с.
17. Шмелев П. А. теория рядов в задачах и упражнениях: Учеб. пособие для студентов втузов. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Электронное учебное издание

Ирина Викторовна **Ребро**
Джамиля Алиевна **Мустафина**
Виктория Борисовна **Светличная**
Татьяна Александровна **Матвеева**

МАТЕМАТИКА.
ЧАСТЬ IV

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2018 г. Поз. № 40.
Подписано к использованию 17.04.2018. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 5,88.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.