Д.А. Мустафина, И.В. Ребро, В.Б. Светличная,
Т.А. Матвеева

МАТЕМАТИКА

III ЧАСТЬ

Учебное пособие

Волжский
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Мустафина Д.А., Ребро И.В.,
Светличная В.Б., Матвеева Т.А.

МАТЕМАТИКА

III ЧАСТЬ

Электронное учебное пособие

2018

УДК 51(07)
ББК 22.1я73
М 34

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент филиала
ГОУВПО «Московский энергетический институт
(технический университет)».
Капля Е.В.,
кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой
«Прикладная математика и информатика» ВГИ (филиал)
Волгоградского государственного университета
Полковников А. А.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Мустафина, Д.А.

Математика. Часть 3 [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д.А. Мустафина, И.В. Ребро, В.Б. Светличная, Т.А. Матвеева ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. - Электрон. текстовые дан. (1 файл: 1,22 МБ). – Волжкий, 2018. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-2893-9

Содержит основные теоретические положения, примеры решения задач, тестовые задания по дисциплине «Математика» и «Математический анализ».

Предназначено для студентов всех формы обучения и всех направлений технического вуза.

Ил. 42, табл. 12, библиограф.: 12 назв.

ISBN 978-5-9948-2893-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1 ВВЕДЕНИЕ В МАТ. АНАЛИЗ

1. 1. Понятие функции

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ *или* $f\colon X \to Y$

Говорят еще, что функция *отображает* множество X на множество У.

Множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$. Множество всех y *из* Y называется *множеством значений* функции и обозначается $E(f)$.

1.2. Способы задания функций

Пусть задана функция $y = f(x)$. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию называют *числовой функцией*. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать $y = f(x)$.

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, *а* y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x).

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Оxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Функции могут быть записаны:

а) в декартовых координатах:

- в явном виде $y = f(x)$;
- в неявном $F(x; y) = 0$;
- в параметрическом виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где t вспомогательный параметр.

б) в полярных координатах.

Полярная система координат задается точкой О – *полюсом*, и лучом p – *полярной осью***.** Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M. Записывают $M(r; \varphi)$, при этом r называется *полярным радиусом***,** φ - *полярным углом***.**

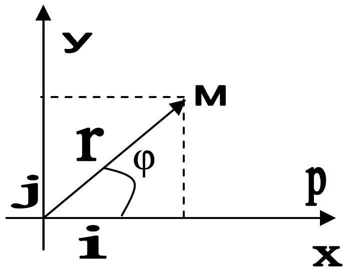


Рис. 1

Для того чтобы установить связь между полярной и декартовой системой координат необходимо совместить начало координат декартовой системы с полюсом, а полярную ось с положительно направленной осью *Ox* (Рис. 1). Тогда координаты точки в двух различных системах координат связываются формулами: $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

1.3. Основные характеристики функции

Функция *y* = *f(x)*, определённая на множестве D, называется *чётной*, если для $\forall x \in D$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$; *нечётной*, если для $\forall x \in D$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$ (график чётной функции симметричен относительно оси О*y*, график нечётной относительно начала координат).

Пусть функция *y* = *f(x)* определена на множестве *D* и пусть $D_1 \subset D$. Если для любых значений $x_1, x_2 \in D_1$ аргументов из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство:

- $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется возрастающей на множестве D_1;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция называется неубывающей на множестве D_1;
- $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей множестве D_1;
- $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется невозрастающей на множестве D_1.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D_1 называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие – *строго монотонными*. Интервалы, в которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

Функцию *y* = *f(x)*, определенную на множестве *D*, называют *ограниченной* на этом множестве, если существует такое число *M* > О, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $\|f(x)\| \leq M$.

Функция *y* = *f(x)*, определенная на множестве *D*, называется *периодической* на этом множестве, если существует такое число *T* > 0, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число *T* называется *периодом* функции.

Замечание: обычно за основной период берут наименьшее положительное число *T*, удовлетворяющее равенству *f(x* + Т) = *f(x)*.

1.4. Обратная функция

Пусть задана функция *y* = *f(x) с* областью определения *D* и множеством значений *E*. Если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ *с* областью определения E и множеством D. Такая функция $\varphi(y)$ называется *обратной* к функции $f(x)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Замечание:

1) любая строго монотонная функция имеет обратную;
2) графики взаимообратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и второго координатных углов.

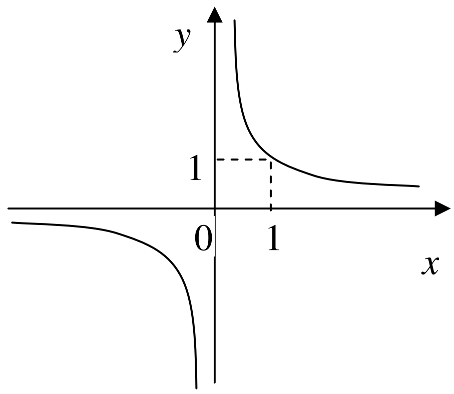
1.5. Сложная функция

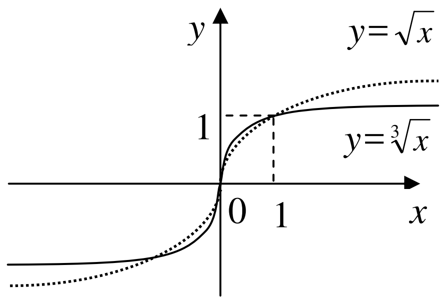
Пусть задана функция $u = y(x)$, отображающая множество X в множество U, и пусть задана функция $y = f(u)$ отображающая множество U в множество Y. Тогда последовательное отображение $X \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{f} Y$ ставит в соответствии каждому элементу $x \in X$ элемент Y такой, что $y = f[\varphi(x)]$.

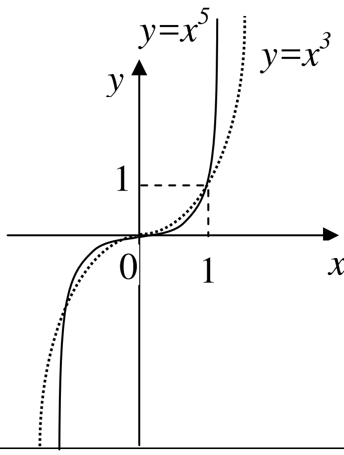
1.6. Основные элементарные функции

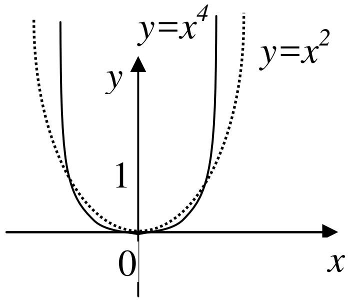
Таблица 1

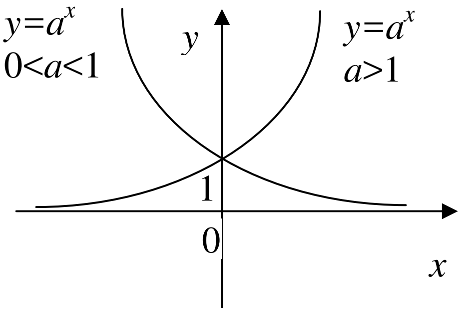
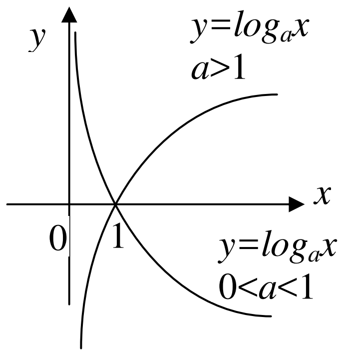
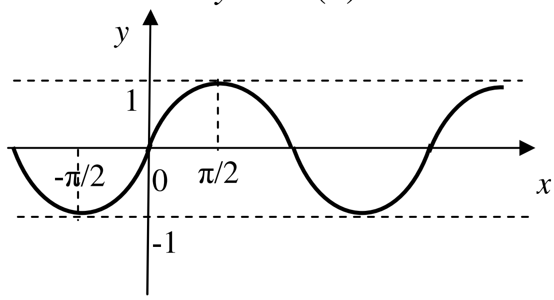
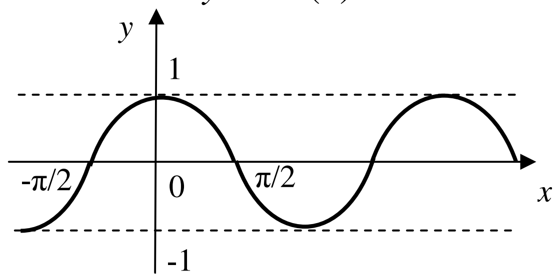
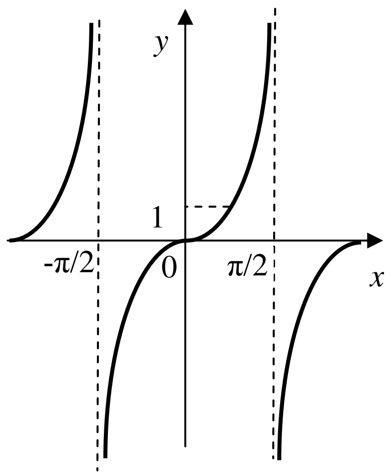
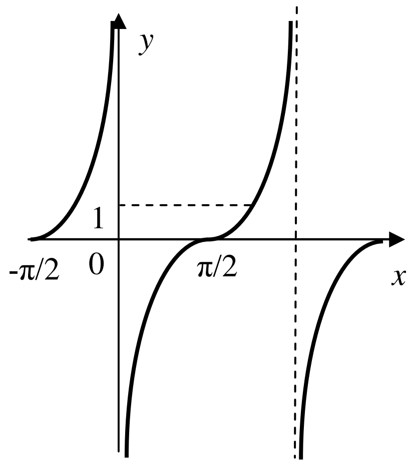
Степенная функция $y = x^n$

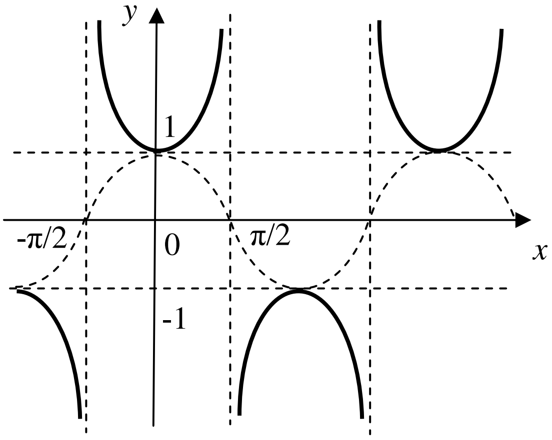
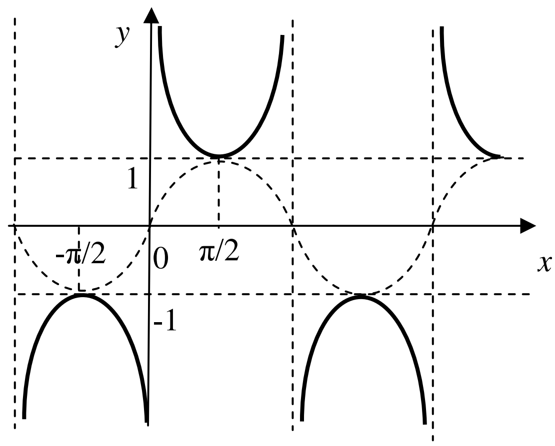




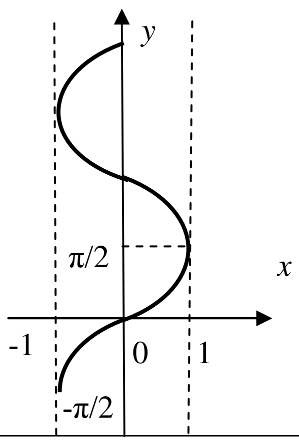
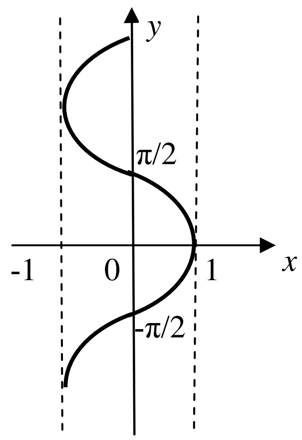


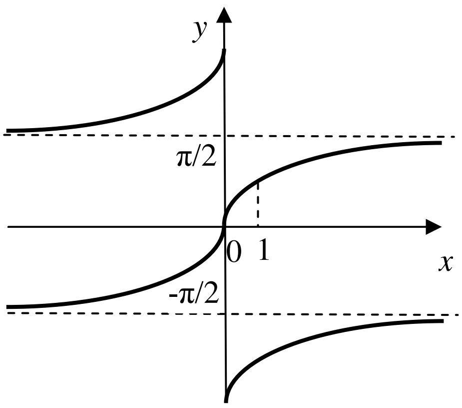
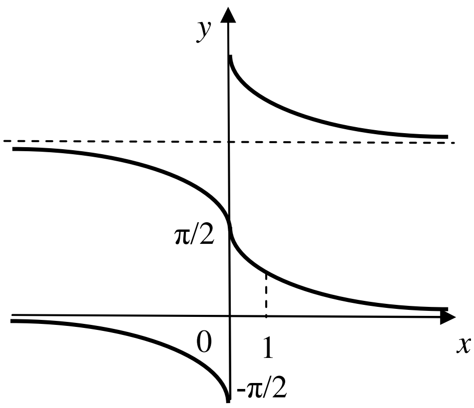


Показательная функция $y = a^x, a \neq 1$	Логарифмическая функция $y = \log_a x, a \neq 1,$
	
Тригонометрические функции	
Синус $y = \sin(x)$ 	Косинус $y = \cos(x)$ 
Тангенс $y = tg(x)$ 	Котангенс $y = ctg(x)$ 

Секанс	Косеканс
$y = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$	$y = \cos ec(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$
	

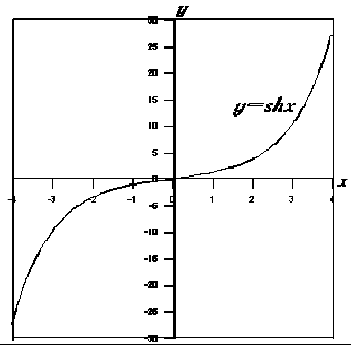
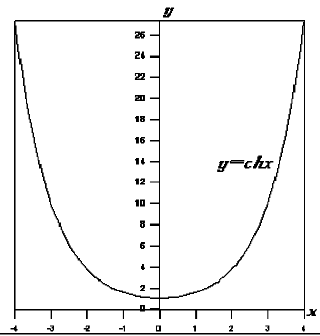
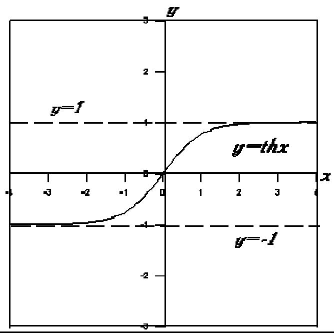
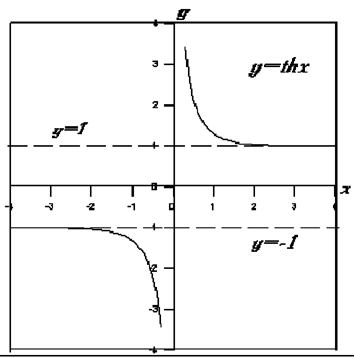
Обратные тригонометрические функции

Арксинус	Арккосинус
$y = \arcsin(x)$	$y = \arccos(x)$
	

Арктангенс	Арккотангенс
$y = arctg(x)$	$y = arcctg(x)$
	

1.7. Гиперболические функции

Таблица 2

гиперболический синус	$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	
гиперболический косинус	$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	
гиперболический тангенс	$thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
гиперболический котангенс	$cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, где $x \neq 0$	

Основные гиперболические тождества

$ch^2 x - sh^2 x = 1$;

$ch^2 x + sh^2 x = ch(2x)$;

$sh(2x) = 2shx \cdot chx$;

$thx \cdot cthx = 1, x \neq 0$;

$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm shy \cdot chx$;

$ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy$

§2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

2.1. Предел функции, геометрическое истолкование предела, односторонние пределы

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть независимая переменная неограниченно приближается к некоторому числу a $(x \to a)$.

Если значения функции при этом неограниченно приближаются к некоторому постоянному числу A, то говорят, что функция $y = f(x)$ имеет предел A при $x \to a$.

Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех $x(x \neq a)$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Замечание: в качестве ε в определении предела берут малые числа.

Пример 1. Пользуясь определением предела функции доказать, что $f(x) = 3x + 2$ имеет в точке $x = 1$ предел, равный 5.

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = 0{,}01$.

Задача состоит в том, чтобы по $\varepsilon > 0$, найти такое $\delta > 0$, при котором из неравенства $|x-1| < \delta$ следовало бы неравенство $|(3x+2) - 5| < \varepsilon$.

Последнее означает $|3(x-1)| < \varepsilon$, или $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, т.е. $|x-1| < \dfrac{1}{300}$.

Следовательно, $\delta = \dfrac{1}{300}$. Таким образом, для заданного $\varepsilon = 0{,}01$ нашлось $\delta = \dfrac{1}{300}$ такое, что из неравенства $|x-1| < \dfrac{1}{300}$ следует неравенство $|(3x+2) - 5| < 0{,}01$, т.е. по определению $\lim\limits_{x \to 1}(3x+2) = 5$.

Геометрическая интерпретация передела функции в точке

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. В точке $x = a$ значение функции $f(a) = A$. Возьмем ε - окрестность точки А и проведем прямые $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$. Опустим перпендикуляры из точек пересечения этих прямых с кривой на ось ох и, выбрав за δ меньшее из расстояний от точки *x=a* до оснований этих перпендикуляров, построим δ - окрестность точки *a*. Как только значения *x* попадают в δ - окрестность точки а, то значения функции попадают в ε - окрестность точки А (Рис. 2).

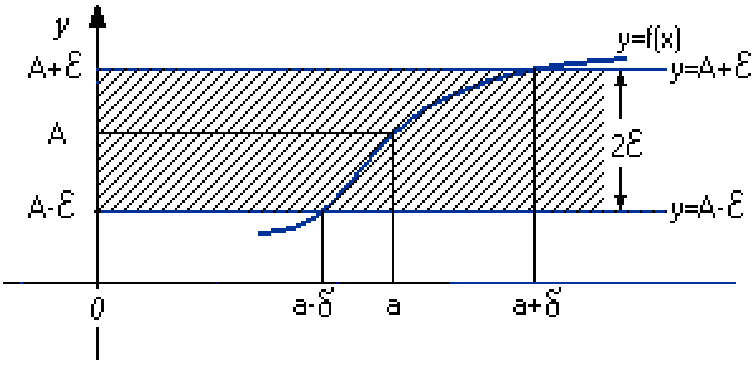


Рис. 2

Для всех x из δ - окрестности точки a, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

Если $f(x) \to A_1$, при $x \to a$ так, что x все время остается меньше a, то A_1 называют пределом функции в точке а слева и обозначают

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A_1.$$

Аналогично определяют предел функции $f(x)$ в точке справа

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = A_2.$$

Если существуют пределы слева и справа A_1 и A_2, причем $A_1 = A_2 = A$, то А и будет пределом функции в точке а. И, наоборот, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $A_1 = A_2 = A$.

Пример 2. $y = arctg\,\dfrac{1}{x-1}$.

Найдем пределы слева и справа при $x \to 1$.

$$\lim_{x \to 1-0} arctg\,\frac{1}{x-1} = \left[arctg\,\frac{1}{1-0-1} = arctg\,\frac{1}{(-0)} = arctg(-\infty) \right] = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 1+0} arctg\,\frac{1}{x-1} = \left[arctg\,\frac{1}{1+0-1} = arctg\,\frac{1}{(+0)} = arctg(+\infty) \right] = \frac{\pi}{2}$$

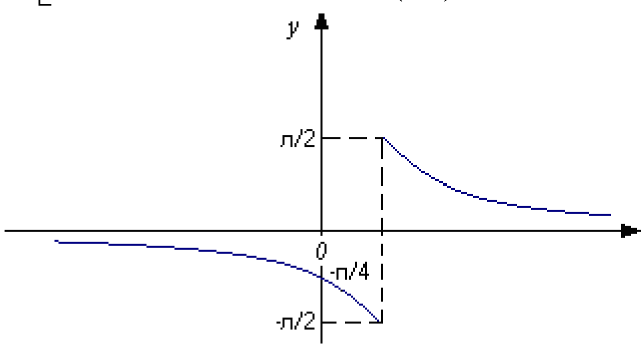


Рис. 3

2.2. Бесконечно большие величины (функции). Ограниченные функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to a$, если для любого положительного числа М можно подобрать такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x-a| < \delta, x \neq a$ будет вытекать неравенство $|f(x)| > M$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

2.3. Бесконечно малые величины. Их свойства

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \to a$; если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое δ, зависящее от ε, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Основные теоремы бесконечно малых величин:

1) Если функция $f(x)$ является бесконечно большой величиной, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая величина; если функция $f(x)$ - бесконечно малая величина, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая.
2) Сумма конечного числа бесконечно малых величин – величина бесконечно малая.
3) Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
4) Произведение постоянной величины на бесконечно малую величину есть величина бесконечно малая.
5) Частное от деления бесконечно малой величины на величину, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

2.4. Теоремы о пределах. Приемы вычисления пределов

Рассмотрим некоторые теоремы о правилах предельного перехода, которые облегчают нахождение пределов:
1) Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы постоянной величины A и величины бесконечно малой $\alpha(x)$, то постоянная величина A - предел функции.
2) Если функция $f(x)$ имеет предел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции.
3) Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.

4) Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.
5) Постоянный множитель можно выносить за знак предела.
6) Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1^2+3\cdot 1+2}{1^2-2\cdot 1+5}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

Непосредственное применение теории о пределах, однако, не всегда приводит к цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто, прежде чем применять эти теоремы, необходимо преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Как это делается покажем на конкретных примерах.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{(x-2)\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\lim_{x\to 4}\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}.$$

Отыскание предела этой дроби сводится, как говорят, к раскрытию неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$, для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

Решение. Здесь непосредственно применить теорему о пределе дроби нельзя, так как ни числитель, ни знаменатель дроби не имеют конечного предела при $x\to\infty$, одновременно стремясь к бесконечности. В этом случае говорят, что дробь представляет неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для того, чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2 (старшую степень); дробь от этого не изменит своей величины, а, следовательно, и своего предела. После этого преобразования предел уже найти легко:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{5}{6}$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+6}{3x^2+4x+2}$.

Решение. Для того чтобы и здесь можно было применить теорему о пределе частного, разделим числитель и знаменатель на x^2(старшую степень).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{0}{3}=0.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}$**.**

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{13}{x^3}}=\left[\dfrac{7}{0}\right]=\infty$.

*Замечание***.** При решении примеров 4-6 с неопределенностями вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ мы делили числитель и знаменатель дроби на старшую из степеней x, встречающихся в дробном выражении. Этот прием при условии, что $x\to\infty$, является общим и его следует запомнить.

Вычисляют пределы и с помощью некоторых специальных формул (замечательных пределов).

2.5. Первый замечательный предел

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

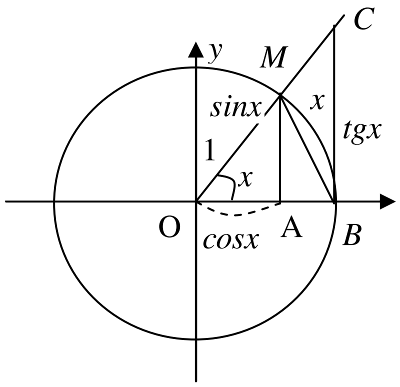


Рис. 4

Доказательство. Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла *MOB* через *x*. Пусть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM|=\sin x$, дуга *MB* численно равна центральному углу x, $|BC|=tgx$. Очевидно, имеем $S_{\Delta MOB}<S_{сектора\, MOB}<S_{\Delta COB}$.

На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$. Разделим неравенство на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ - то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (x>0)}}\frac{\sin x}{x} = 1$.

А так как $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (x<0)}}\frac{\sin x}{x} = 1$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для отыскания предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot$$

2.6. Второй замечательный предел

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Докажем, что к числу e стремится и функция x_n = $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$.

1. Пусть $x\to+\infty$. Каждое значение x заключено между двумя положительными целыми числами: $n \le x \le n+1,\ где\ n = [x]$- это целая часть x. Отсюда сле-

дует $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$, поэтому $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Если $x \to +\infty$, то $n \to \infty$.

Поэтому имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

По признаку существования пределов $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

2. Пусть $x \to -\infty$. Сделаем подстановку $-x=t$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение.

1 способ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \cdot e \cdot e = e^3.$$

2 способ. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot 3x} = e^3$.

Замечание: для вычисления второго замечательного предела удобно пользоваться формулой $\lim\limits_{x\to\infty}(1+f(x))^{g(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))}$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}\cdot\frac{x}{2}} = e^{\frac{5}{2}}$.

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x-1}\cdot(x+2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(4+\frac{8}{x}\right)}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = e^4.$$

2.7. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые

Замечание: функции $f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, f_3=x^4$ при $x\to 0$ бесконечно малые величины, но к нулю они стремятся по-разному.

Чтобы сравнить бесконечно малые функции рассматривают предел их отношения. Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to x_0$. Рассмотрим предел отношения этих функций при $x\to x_0$ и введем следующие определения.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми *одного и того же порядка малости* при $x\to x_0$; если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ есть конечное число, отличное от нуля.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем функция $\beta(x)$ при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка малости*, чем функция $\beta(x)$ при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми при* $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует.

Пример 13.

Функция $y=x^2$ является бесконечно малой при $x\to 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y=5x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{5x}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

При приближении x к нулю функция $y = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем функция $y = 5x$.

Пример 14.

Функция $y = x^2 - 4$ и $y = x^2 - 5x + 6$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$.

Введем теперь понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если предел их отношения при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) равен единице.

Например, функции $x, \sin x, tgx$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые функции, то это записывают так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ или $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Таблица 3

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$	$a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$
$tgx \sim x$ при $x \to 0$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$
$\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$	$\log_a(1+x) \sim x \log_a e$ при $x \to 0$
$arctgx \sim x$ при $x \to 0$	$(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$
$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$	
$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$	$\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{tg 2x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ $\sin 7x \sim 7x$, $tg 2x \sim 2x$ то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{tg\ 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$.

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4-x)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin(\pi/4-x)}{2\sqrt{2}(\pi/4-x)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l} y=x-\dfrac{\pi}{2}\\ x=y+\dfrac{\pi}{2}\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{\pi-2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{-2y}=\frac{1}{2}.$$

Пример 18. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)}$.

Решение. Так как $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x$, а $tg(x^2)\sim x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

Решение. Так как $(1+x)^{\frac{3}{5}}-1\sim\dfrac{3x}{5}$, $(1+x)^{\frac{5}{3}}-1\sim\dfrac{5x}{3}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{5}}-1}{(1+x)^{\frac{5}{3}}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{5}}{\frac{5x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5}\cdot\frac{3}{5x}=\frac{9}{25}.$$

2.8. Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0, называется *непрерывной в точке* x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Равенство означает выполнение трех условий:

1. функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;
2. функция $f(x)$ имеем предел при $x \to x_0$;
3. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется *разрывной* функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого положительного числа ε>0 существует такое число Δ>0, что для любых x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0.

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии, что g(x) не равна нулю в точке x_0.

3) Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

2.9. Точки разрыва и их классификация

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0, за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

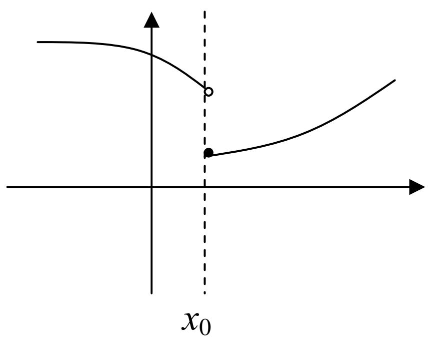


Рис. 5

Если односторонний предел $\lim\limits_{x \to x-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

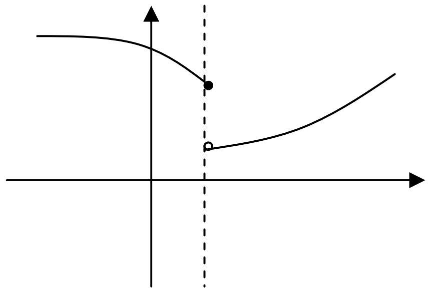


Рис. 6

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1- го рода*, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные пределы, слева и справа, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка называется *точкой конечного разрыва*.

Величину $|A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 2 – го рода*, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

Пример 20. Функция Дирихле[1] $f(x) = \begin{cases} 1, & x - \textit{рациональное число} \\ 0, & x - \textit{иррациональное число} \end{cases}$ не является непрерывной в любой точке x_0.

Пример 21. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к. $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -\infty$.

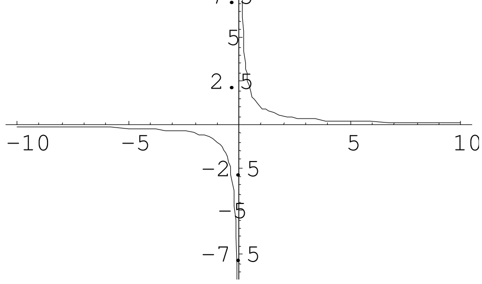


Рис. 6

[1] Дирихле Петер Густав (1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г.

Пример 22. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{\textit{при}} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{\textit{при}} \quad x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:

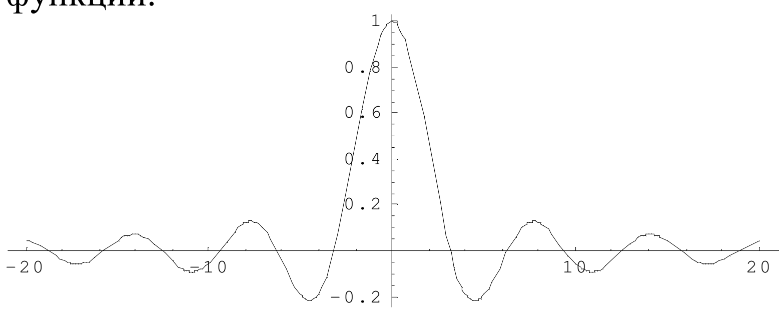


Рис. 7

Пример 23. $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{\textit{при}} \quad x > 0 \\ -1, & \text{\textit{при}} \quad x < 0 \end{cases}$

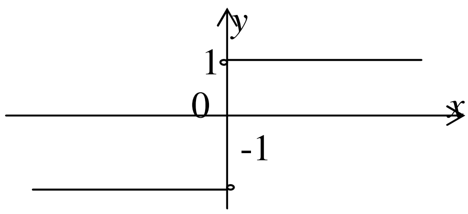


Рис. 8

Эта функция также обозначается *sign*(x) – знак x. В точке $x = 0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0)=1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0)=-1$, то функция будет непрерывной слева, если положить $f(x)$ равное какому- либо числу, отличному от 1 или –1, то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях, тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

2. 10. Непрерывность функции на интервале и на отрезке

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (*отрезке*), если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка). При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

1^0 . (Первая теорема Вейерштрасса[2]). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке [a, b] выполняется условие $-M \le f(x) \le M$.

2^0. Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

3^0. (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке [a, b], принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

4^0 .Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0, в которой функция сохраняет знак.

5^0 .(Первая теорема Больцано – Коши). Если функция $f(x)$- непрерывная на отрезке [a, b] и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на отрезке [a, b], если для любого $\varepsilon>0$ существует $\Delta>0$ такое, что для любых точек $x_1\in[a,b]$ и $x_2\in[a,b]$ таких, что $|x_2 - x_1| < \Delta$ верно неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ, не зависящее от x, а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x.

6^0 . (Теорема Кантора[3]) Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем (свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов).

Пример 24. $y = \sin\frac{1}{x}$.

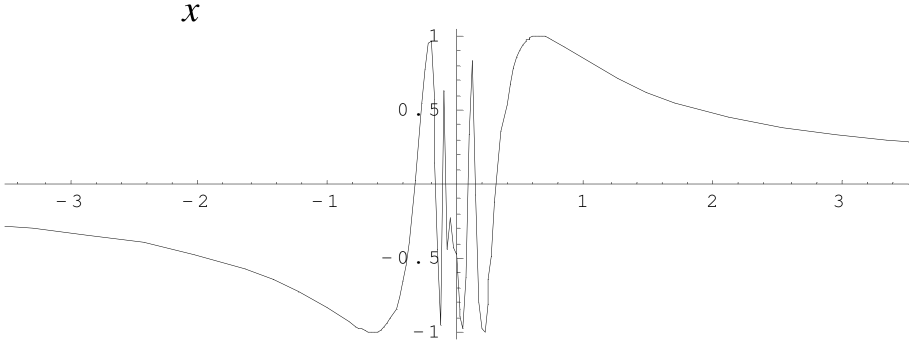


Рис. 9

Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0, a), но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta>0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

---

[2] Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик.
[3] Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик.

7^0. Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример 25. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=3$

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2$

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

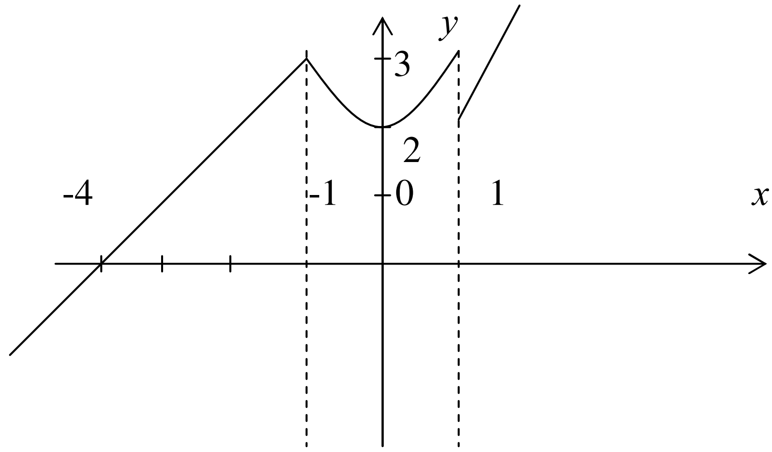


Рис. 10

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Производная функции, её геометрический и механический смыслы

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, при условии, что последнее стремится к нулю, т.е. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Функция $y=f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;\, b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*. Производная функции $y=f(x)$ в произвольной точке x обозначается y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{df}{dx},\dfrac{d}{dx}f(x)$.

При каждом конкретном числовом значении x производная (если она существует при данном x) функции $y=f(x)$ представляет собой число.

Следствие:

1. Если для некоторого значения x $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что для этого значения x существует *бесконечная производная*.

2. Если функция $y=f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел этой функции $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ($f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$), то она называется соответственно *конечной или бесконечной производной слева (справа)* функции $f(x)$ в точке x_0.

Левую и правую производные называют *односторонними производными*.

3. Если функция $f(x)$ имеет производную в некоторой точке $x = x_0$, то она имеет в этой точке односторонние производные. Однако, обратное утверждение неверно. Во- первых, функция может иметь разрыв в точке x_0, а во- вторых, даже если функция непрерывна в точке x_0, она может быть в ней не дифференцируема.

4. Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$ в некотором интервале $(a; b)$, то функция называется *гладкой*.

Например: $f(x) = |x|$ - имеет в точке x = 0 и левую и правую производную, непрерывна в этой точке, однако, не имеет в ней производной.

Теорема (Необходимое условие существования производной). Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b). Тогда $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей M_0M_1 к графику функции.

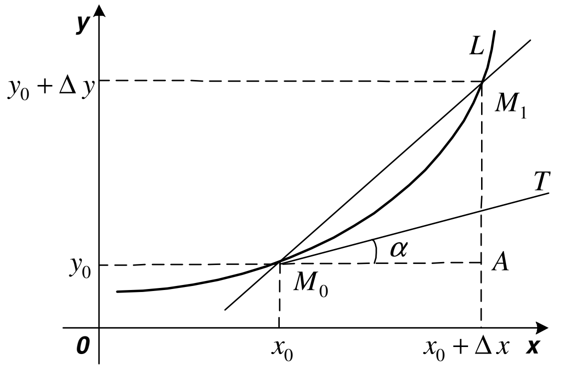


Рис. 11

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha = k$, где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, k- угловой коэффициент.

Таким образом, производная $f'(x_0)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x.

Механический смысл производной

Пусть функция $S=f(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой как зависимость пути S от времени t. Тогда $\Delta S = f(t+\Delta t) - f(t)$ - это путь, пройденный за интервал времени Δt, а отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость за время Δt. Ясно, что чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует изменение функции. Тогда $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t)$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени t как производную пути по времени.

Замечание. Производную функции $y=f(x)$ можно трактовать как скорость изменения функции: чем больше $|f'(x)|$, тем больше угол наклона касательной к кривой, тем круче график $f(x)$ и быстрее растёт (убывает) функция.

3.2. Основные правила дифференцирования

Введем правила дифференцирования арифметических действий. Мы будем предполагать, что функции-компоненты, т.е. слагаемые, сомножители, делимое и делитель, непрерывны и имеют производные при рассматриваемых значениях независимой переменной. Пусть $f(x) = u$, $g(x) = v$ - функции, дифференцируемые в точке х.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u\cdot v)' = u\cdot v' + u'\cdot v$
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций

Таблица 4

1) $(x^m)' = mx^{m-1}$;	6) $(\cos x)' = -\sin x$	13) $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$
2) $(e^x)' = e^x$	7) $(shx)' = chx$	14) $(cth)' = -\frac{1}{sh^2 x}$
3) $(a^x)' = a^x \ln a$	8) $(chx)' = shx$	15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	10) $(\cos x)' = -\sin x$	16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	17) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5) $(\sin x)' = \cos x$	12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.3. Производная сложной функции

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f. Тогда $y' = f'(u)\cdot u'$

Пример 1. Найти производную функции $y = \log_2^3 tg(x^4)$.

Решение. $y' = 3\log_2^2 tg(x^4)\cdot \frac{1}{tg(x^4)\ln 2}\cdot \frac{1}{\cos^2(x^4)}\cdot 4x^3 = \frac{12x^3 \log_2^2 tg\left(x^4\right)}{\ln 2\cdot tg\left(x^4\right)\cos^2\left(x^4\right)}$.

Пример 2. Найти производную функции $y = x\cos x\sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Решение. Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\cdot 2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

Решение. $y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \ln tg\frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$.

Решение. $y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin x\cdot\cos x} - \frac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x} =$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin^2 x + x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = arctg\frac{2x^4}{1-x^8}$.

Решение. $y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)}\cdot\frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} =$

$$= \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}.$$

3.4. Производная обратных функций

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x)$ при условии, что обратная ей функция $x = g(y)$ имеет производную, отличную от нуля в соответствующей точке.

Для решения этой задачи дифференцируем функцию $x = g(y)$ по x:

$1 = g'(y)\,y'$, т.к. $g'(y) \neq 0$, то $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$, т.е. производная обратной функции обратна по величине производной данной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;\ b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Пример 6. Найти формулу для производной функции *arctg(x)*.

Решение. Функция *arctg* является функцией, обратной функции *tg*, т.е. ее производная может быть найдена следующим образом: $y = tgx$; $x = arctgy$; Известно, что $y' = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; По приведенной выше формуле получаем: $y' = \dfrac{1}{d(arctgy)/dx}$; $\dfrac{d(arctgy)}{dy} = \dfrac{1}{1/\cos^2 x}$. Т.к. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + y^2$; то можно записать окончательную формулу для производной арктангенса: $(arctgy)' = \dfrac{1}{1+y^2}$;

Пример 7. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Обратная функция: $x = y^3 + 1$, отсюда $x' = 3y^2$.Тогда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

3.5. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & при \quad x > 0 \\ \ln(-x), & при \quad x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$. Учитывая полученный результат, можно записать $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется *логарифмической производной* функции *f(x)*.

Способ *логарифмического дифференцирования* состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле: $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$.

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных и показательно-степенных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

3.6. Производная показательно-степенной функции

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если же и основание, и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной. Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x, $f(x)>0$.Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим: $\ln y = v \ln u$.

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + v\frac{u'}{u};\ \ y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v'\ln u\right) \Rightarrow \left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v'\ln u.$$

Пример 8. Найти производную функции $f(x) = (x^2+3x)^{x\cos x}$.

Решение. По полученной выше формуле находим: $u = x^2 + 3x$; $v = x\cos x$; Производные этих функций: $u' = 2x+3$; $v' = \cos x - x\sin x$; Окончательно:

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2+3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x+3) + (x^2+3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln(x^2+3x)$$

3.7. Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением *y=f(x)*, разрешенным относительно *y*, то функция *задана в явном виде.*

Под *неявным заданием функции* понимают задание функции в виде уравнения $F(x;y)=0$, не разрешенного относительно *y*.

Всякую явно заданную функцию *y=f(x)* можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Замечание. Если неявная функция задана уравнением $F(x;y)=0$, то для нахождения производной от *y* по *x* нет необходимости разрешать уравнение относительно *y: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рас-*

сматривая при этом у как функцию х, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример 9. Найти производную функции у, заданную уравнением $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. $3x^2 + 3y^2 y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

3.8. Производная от функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом *x* и функцией у задана параметрически в виде двух уравнений: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$, где *t* – вспомогательная переменная, называемая параметром. Имеем обратную функцию $t = \varphi(x)$. Считая, что функции дифференцируемы, получаем: $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, а по правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y'_x = y'_t \cdot t'_x . \Rightarrow, y'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Пример 10. Пусть $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение. $x'_t = 3t^2$, $y'_t = 2t. \Rightarrow, y'_x = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$.

3.9. Дифференциал функции и его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тогда можно записать: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$. Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. Величина $\alpha \Delta x$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$- главная часть приращения Δy.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции. Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$.

Геометрический смысл дифференциала

Из треугольника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha\cdot\Delta x = y'\cdot\Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в этой точке, когда x получит приращение Δx (Рис. 12).

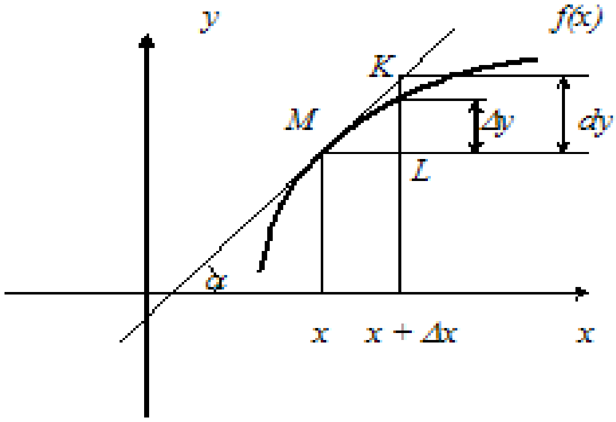


Рис. 12

Основные теоремы о дифференциалах

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$- функции, дифференцируемые в точке x, то:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$
3) $d(Cu) = Cdu$
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$
5) Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е. у - сложная функция, тогда $y = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли х независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется *инвариантной формой записи дифференциала*. Однако, если x - независимая переменная, то $dx = \Delta x$, но если x зависит от t, то $\Delta x \neq dx$. Таким образом, форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример 11. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2}$.

Решение. По определению $dy=f'(x)dx$. Найдем y':

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot\left(x^2+3\right)' = \frac{x}{2\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow dy = \frac{x}{2\sqrt{x^2+3}}dx.$$

3.10. Производные и дифференциалы высших порядков явно заданной функции

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка.*

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'', т.е. $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''', т.е. $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n-1)-го порядка: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

В дифференциальной форме производная n-го порядка записывается $\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$. Отсюда следует формула для вычисления дифференциала n-го порядка $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Производные (дифференциалы) порядка выше первого называются *производными (дифференциалами) высших порядков.*

Пример 12. Найти производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $y'' = -\sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)$,

$$y''' = -\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3),\ y^{IV} = \sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4),$$

$$y^{V} = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 5), .\ y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot n).$$

3.11. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$. Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка. Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'', через x и y и т.д.

Пример 13. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Дифференцируем уравнение: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по x:

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3},$$

$$y''' = -\frac{-3y^2y'}{y^6} = \frac{3}{y^4}\cdot\frac{-x}{y} = -\frac{3x}{y^5}.$$

3.12. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Как известно, первая производная y'_x находится по формуле: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем вторую производную от функции, заданной параметрически:

$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$. Аналогично: $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, . . .

Пример 14. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение. $y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt$, $y''_{xx} = \frac{(-ctgt)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$.

§4. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1 Правило Лопиталя[4]

Теорема (правило Лопиталя). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке а, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \textit{или} \frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 1. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

---

[4] Лопиталь де Гийом Франсуа (1661-1704) – французский математик, член Парижской академии наук, ученик И.Бернулли. Автор первого учебника по дифференциальному исчислению «Анализ бесконечно малых» (1696г.); в этом учебнике и было сформулировано правило, называемое теперь правилом Лопиталя.

Решение. Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби, удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2+1}{e}=\frac{3}{e};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[-\dfrac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right]=\dfrac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)}=\dfrac{2}{3}$.

Замечание.

1. Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

2. Следует отметить, что правило Лопиталя – всего лишь один из способов вычисления пределов. Часто в конкретном примере, с правилом Лопиталя может быть использован и какой – либо другой метод (замена переменных, домножение и др.).

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$.

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y=[f(x)]^{g(x)}$, $f(x)>0$ вблизи точки a при $x\to a$. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции $\ln y=g(x)\ln(f(x))$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Решение. Здесь $y=x^x$, $\ln y=x\ln x$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\begin{matrix}\textit{правило}\\ \textit{Лопиталя}\end{matrix}\right| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0;$.

Следовательно $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln y = \ln \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$

4.2 Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение Δy функции $y=f(x)$ в точке x можно представить в виде: $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$, где $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = dy + \alpha\cdot\Delta x$. Отбрасываем бесконечно малую $\alpha\cdot\Delta x$ более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство: $\Delta y \approx dy$; причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Вывод: это равенство позволяет с большей точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

Пример 4. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - 2x + 1$ при x=2 и Δx=0,001.

Применяем формулу: $\Delta y \approx dy = (x^3 - 2x + 1)'\Delta x = (3x^2 - 2)\Delta x$. Подставляем x и Δx , получаем: $dy = (3\cdot 4 - 2)0{,}001 = 0{,}01$. Найдем погрешность, которую мы допустили при вычислении дифференциала функции вместо ее приращения:

$$\Delta y = ((x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)+1) - (x^3 - 2x + 1) = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2x - 2\Delta x + 1 - x^3 +$$
$$+ 2x - 1 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2) = 0{,}001(3\cdot 4 - 3\cdot 2\cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 - 2) = 0{,}010006$$

Абсолютная погрешность приближения равна 0,000006.

Формула используемая для вычисления приближенных значений функций:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

Пример 5. Вычислить приближенно arctg1,05.

Решение. Рассмотрим функцию *f(x)=arctgx*.

Имеем: $arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\Delta x = arctgx + \dfrac{\Delta x}{1+x^2}$. Так как $x + \Delta x = 1{,}05$, то x=1 и Δx=0,05. Получаем: $arctg1{,}05 \approx arctg1 + \dfrac{0{,}05}{1+1^2} = \dfrac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810$

4.3 Касательная плоскость и нормаль к плоскости кривой. Угол между двумя кривыми

Если плоская кривая задана функцией $y = f(x)$, то уравнения касательной и нормали в точке $M(x_0; y_0)$ имеют вид:

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$**.**

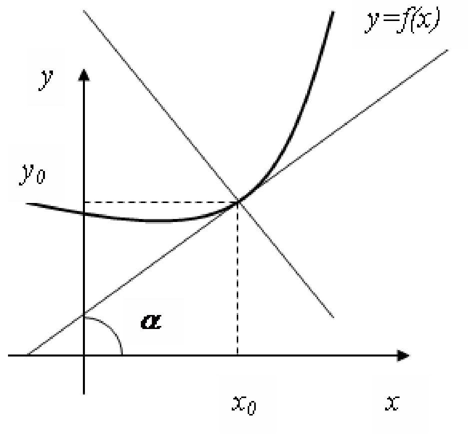


Рис. 13

Замечание: направление кривой в каждой ее точке определяется направлением касательной в этой точке.

Угол между пересекающими кривыми определяется как угол между двумя прямыми, касательными к кривым в точке их пересечения (Рис. 14) по формуле $tg\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$, где k_1 и k_2 - угловые коэффициенты касательных к кривым в точке их пересечения $P(x_0; y_0)$, т.е. частные значения в точке x_0 производных от y по x из уравнений этих кривых: $k_1 = tg\alpha_1 = \left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)_{x=x_0}$,

$$k_2 = tg\alpha_2 = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

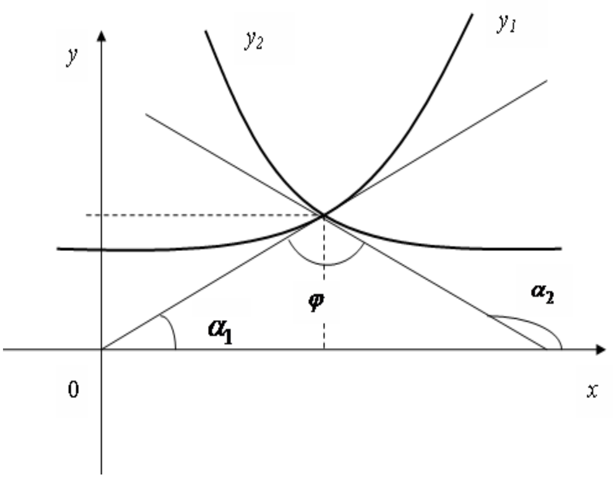


Рис.14

Пример 6. Найти уравнения касательной и нормали к кривой в заданной точке:

а) $f(x) = ch\left(\dfrac{x}{2}\right)$ при $x_0 = 2\ln 2$.

Решение. Из уравнения кривой найдем $y_0 = ch\left(\dfrac{2\ln 2}{2}\right) = ch(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{5}{4}$ и производную $f'(x) = \dfrac{1}{2} sh\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}sh\left(\frac{2\ln 2}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot sh(\ln 2)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}}{2}\right)=\frac{2-\frac{1}{2}}{4}=\frac{3}{8}.$$

Уравнение касательной**:** $y-\frac{5}{4}=\frac{3}{8}(x-2\ln 2)\Rightarrow y=\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}\ln 2+\frac{5}{4}$**.**

Уравнение нормали**:** $y-\frac{5}{4}=-\frac{8}{3}(x-2\ln 2)\Rightarrow y=-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}\ln 2+\frac{5}{4}$**.**

б) $x^2+2xy^2+3y^4=6$ в точке $M(1;-1)$.

Решение. Из уравнения кривой найдём производную: $2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0$, т.е. $y'=-\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

Следовательно, $y_0'=-\frac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3}=\frac{1}{4}$.

Уравнение касательной**:** $y+1=\frac{1}{4}(x-1)$ или $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$.

Уравнение нормали**:** $y+1=-4(x-1)$ или $y=-4x+3$**.**

в) $\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases}$ при $t_0=2$.

Решение. Найдём $x_0=1-2^2=-3$, $y_0=2-2^3=-6$ и $y'(x)=\frac{(t-t^3)'_t}{(1-t^2)'_t}=\frac{1-3t^2}{-2t}$.

Следовательно $y'(x_0)=\frac{1-3\cdot 2^2}{-2\cdot 2}=\frac{11}{4}$.

Уравнение касательной**:** $y+6=\frac{11}{4}(x+3)$ или $y=\frac{11}{4}x+\frac{9}{4}$**.**

Уравнение нормали**:** $y+6=-\frac{4}{11}(x+3)$ или $y=-\frac{4}{11}x-\frac{78}{11}$**.**

Пример 7. Найти угол между параболами $y=8-x^2$ и $y=x^2$.

Решение. Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2;4)$ и $B(-2;4)$. Продифференцируем уравнения парабол: $y'=-2x$, $y'=2x$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболам в точке *A* (т.е. значения производных при *x*=2): $k_1=-4$, $k_2=4$. Следовательно, $tg\varphi_1=\frac{4+4}{1-16}=-\frac{8}{15}$, $\varphi_1=arctg\left(-\frac{8}{15}\right)$. Так же определяется угол между кривыми в точке *B*: $\varphi_2=arctg\left(\frac{8}{15}\right)$.

4.4. Исследование функций

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x) \leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x) < 0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Функция $f(x)$ имеет в точке x_1 *максимум*, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любом Δx[5].

Функция $f(x)$ имеет в точке x_2 *минимум*, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

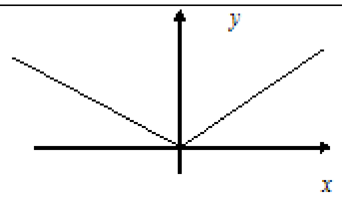
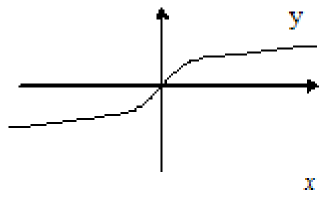
Замечание. Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума) Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

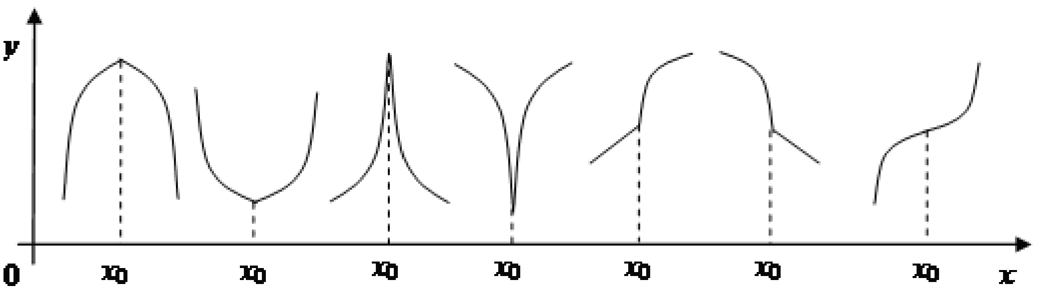
Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно. Например.

а) $f(x) = \|x\|$	б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
	
В точке $x = 0$ функция имеет минимум, но не имеет производной	В точке $x = 0$ функция не имеет точек экстремума и не имеет производной

Если при переходе через критическую точку не происходит изменение характера монотонности, то точка x_0 не является точкой экстремума.

[5] Δx может быть и отрицательным.



а) б) в) г) д) ж) з)

Рис. 15

На рис. 7 приведены возможные случаи, которые могут быть в критических точках (пусть $\Delta x > 0$):

а) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ $\Rightarrow x_0$- точка максимума;

б) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \Delta x) < 0$, $f'(x_0 + \Delta x) > 0 \Rightarrow x_0$- точка минимума;

в) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, $f'(x_0 + \Delta x) < 0 \Rightarrow x_0$-точка максимума;

г) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \Delta x) < 0$, $f'(x_0 + \Delta x) > 0 \Rightarrow x_0$- точка минимума;

д) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, $f'(x_0 + \Delta x) > 0 \Rightarrow x_0$- экстремума нет;

е) $f'(x_0)$ не существует, $f'(x_0 - \Delta x) < 0$, $f'(x_0 + \Delta x) < 0 \Rightarrow x_0$- экстремума нет;

ж) $f'(x_0) = 0$, $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, $f'(x_0 + \Delta x) > 0 \Rightarrow x_0$- экстремума нет.

Теорема 4 (достаточные условия существования экстремума). Пусть функция *f*(*x*) непрерывна в интервале (*a, b*), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции *f*′(*x*) меняет знак с «+» на «-», то в точке $x = x_1$ функция *f*(*x*) имеет максимум, а если производная меняет знак с «-» на «+»- то функция имеет минимум.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема 5. Если $f'(x_1) = 0$, то функция *f(x)* в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f'(x_1) < 0$ и минимум, если $f'(x_1) > 0$.

Кривая обращена выпуклостью *вверх* на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

Теорема 6. Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Теорема 7. Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$– асимптота кривой *y = f(x).*

Наклонная асимптота находится по формуле $y = kx + b$, где $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx\right]$.

Замечание. Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо:

1. найти область определения и область значений функции;
2. установить, является ли функция чётной или нечётной, периодической или нет;
3. исследовать поведение функции на $\pm\infty$;
4. найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в этих точках;
5. найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства;
6. найти асимптоты графика функции;
7. найти точки экстремума и интервалы возрастания, убывания функции;
8. найти точки перегиба и интервалы выпуклости, вогнутости функции;

9. построить график функции, используя все полученные результаты исследования, если их окажется недостаточно, то следует найти ещё несколько точек графика функции, исходя из её уравнения.

Пример 8. Исследуем функцию $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}$ и построим её график.

1) Заметим, что знаменатель имеет корни 1 и 2, так что функцию можно представить в виде $f(x)=\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}$

Теперь легко видеть, что области определения функции не принадлежат только точки 1 и 2: $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Область значений $E(f)$ найти без всяких вычислений мы не можем; отложим этот вопрос до нахождения локальных экстремумов.

2) Поскольку область определения D(f) не симметрична относительно точки 0, функция не может быть ни чётной, ни нечётной. Очевидно также, что она не периодична (хотя бы потому, что её область определения не имеет периодической структуры).

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\cdot\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=1$.

4) Область определения этой элементарной функции имеет две граничных точки: 1 и 2.

В достаточно малой левой окрестности точки 1 $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{2}{+0}\right]=+\infty$.

А правый предел равен $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{2}{-0}\right]=-\infty\ \Rightarrow$ в точке $x=1$ разрыв второго рода.

Левый предел в точке x=2 $\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{4}{-0}\right]=-\infty$, а правый $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\left[\dfrac{4}{+0}\right]=+\infty\ \Rightarrow$ в точке $x=2$ разрыв второго рода.

5) Найдём точки пересечения графика с осями координат. Поскольку $f(0)=0$, то график пересекает ось Oy (и, одновременно, ось Ox) в начале координат.

Приравнивая числитель к нулю, получаем уравнение $x^2+x=0$, которое имеет два корня: x=0 и x=-1 . Значит, график пересекает ось Ox в этих двух точках (одну из них мы уже отметили ранее).

Пользуясь методом интервалов (известным из школьной программы), определим знак функции на интервалах между корнями и точками разрыва (Рис.16). Таких интервалов получается пять: (-∞;-1);(-1;0);(0;1);(1;2);(2;+∞) .

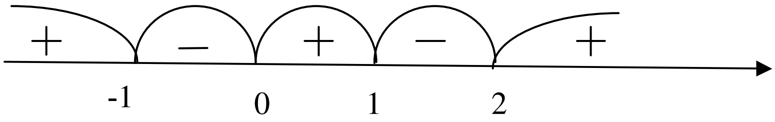


Рис. 16

Интервалы знакопостоянства[6] функции.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\infty$. Значит, вертикальная прямая x=1 - это вертикальная асимптота графика функции. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}=\infty$ Тем самым доказали, что вертикальная прямая x=2 служит второй вертикальной асимптотой графика функции.

Наклонная асимптота находится по формуле $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x}{x\cdot\left(x^2-3x+2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0,$$ а

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}=1\Rightarrow$ y=1 – прямая, которая служит горизонтальной асимптотой графика как при x⟶-∞, так и при x⟶+∞.

7) Найдём производную: $f'(x)=\dfrac{-4x^2+4x+2}{(x-1)^2(x-2)^2}$.

Для нахождения интервалов возрастания решим неравенство $f'(x)>0$, эквивалентное квадратному неравенству $-4x^2+4x+2>0$ (при $x\neq 1, x\neq 2$), поскольку знаменатель принимает положительные значения. Решением квадратного неравенства служит интервал $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; однако точка x=1, не входящая в область определения, принадлежит этому интервалу. Тем самым, интервалов возрастания функции два: это $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ и $\left(1;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

[6] На этом рисунке знаком «+» отмечены те интервалы, на которых функция положительна, и знаком «-» те, где она отрицательна.

Для нахождения интервалов убывания нужно решить неравенство $f'(x) < 0$, или $(-4x^2 + 4x + 2 > 0 \text{ при } x \neq 1, x \neq 2)$. Решением квадратного неравенства служит, очевидно, объединение двух интервалов $\left(-\infty; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$; точка x=2 делит второй из них на две части.

Тем самым, функция убывает на трёх интервалах (Рис. 17): $\left(-\infty; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, и $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, (2;+∞).

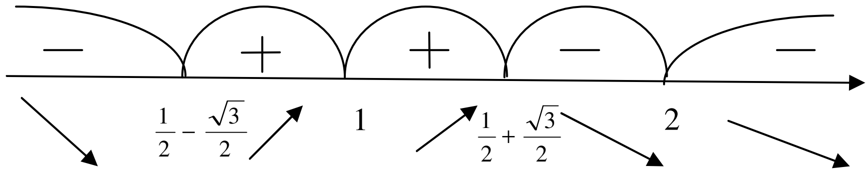


Рис. 17

Точка $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ является точкой минимума, $f_{\min} = f(x_1) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0{,}2$. Точка $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ является точкой максимума, $f_{\max} = f(x_2) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} - 7 \approx -13{,}8$.

Теперь мы можем записать область значений функции:

это $E(f) = (-\infty; f_{\max}] \cup [f_{\min}; +\infty) \approx (-\infty; -13{,}8] \cup [-0{,}2; +\infty)$.

8) Найдём вторую производную: $f''(x) = 4\frac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{(x-1)^3(x-2)^3}$.

Для нахождения интервалов выпуклости, вогнутости нужно решить неравенство $f''(x) > 0$. Заметим, что числитель $2x^3 - 3x^2 + x + 5$ меняет знак при переходе через точку. $x_0 \approx -0{,}919$.Поскольку знаменатель содержит нечётные степени биномов x-1 и x-2, то они также меняют знак при переходе, соответственно, через точки x=1 и x=2. Итак, $f''(x)$ меняет знак при переходе через три точки: x_0, 1 и 2. Из этих трёх точек функция $f(x)$ непрерывна только в точке x_0, так что это единственная точка перегиба. Методом интервалов легко выясняем, что на интервалах $(-\infty; x_0)$ и (1;2) функция выпукла, а на интервалах $(x_0\ ;1)$ и (2;+ ∞) – вогнута (Рис. 18).

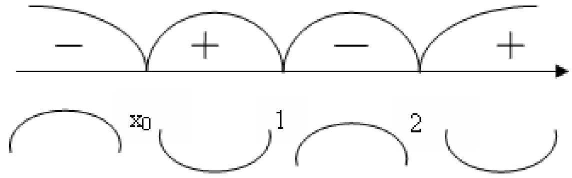


Рис. 18

Интервалы выпуклости, вогнутости

9) С учётом предыдущих семи пунктов строим график функции (Рис. 19).

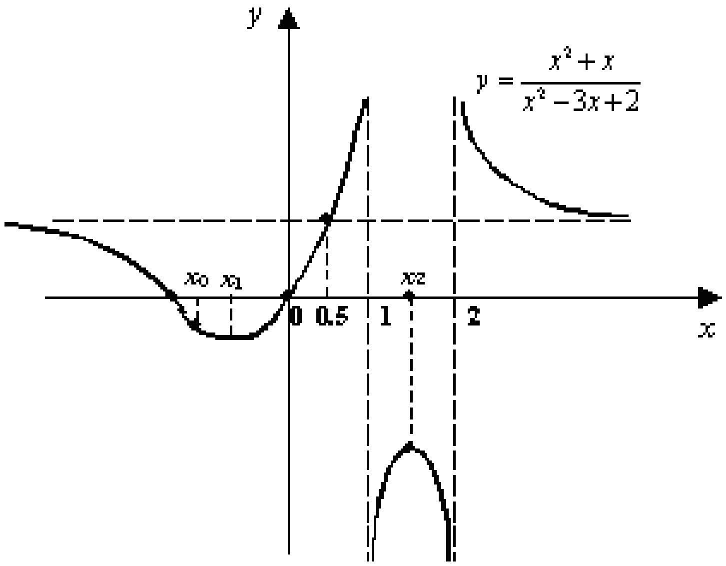


Рис. 19

4.5. Кривизна и радиус кривизны плоской линии

Углом смежности дуги AB плоской линии называется угол φ между касательными, проведенными в точках A и B этой линии.

Отношение угла смежности к длине S дуги AB называется *средней кривизной дуги* AB, т.е. $K_{ср}=\dfrac{\varphi}{S}$.

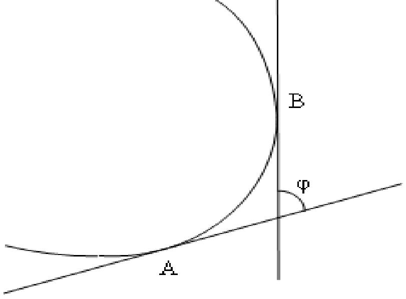


Рис. 20

Кривизной данной линии в точке A называется предел средней кривизны дуги AB при условии, что B стремится к A, т.е. $K = \lim\limits_{S \to 0} \dfrac{\varphi}{S}$.

Замечание: кривизна окружности $K_{окр} = \dfrac{1}{R}$, где R– радиус окружности, кривизна прямой равна нулю.

Формулы для вычисления кривизны линии

Таблица 5.

при $y = f(x)$	при $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$	при $r = r(\varphi)$
$K = \dfrac{\lvert y'' \rvert}{(1+(y')^2)^{3/2}}$	$K = \dfrac{\lvert x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt} \rvert}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}}$	$K = \dfrac{\lvert r^2 + 2(r')^2 - rr'' \rvert}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне: $R = \dfrac{1}{|K|}$.

Пример 9. Найти кривизну линии $y = -x^3$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Найдем $y' = -3x^2$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{4}$, $y'' = -6x$, $y''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3$.

$$K = \left| \frac{-3}{(1 + \frac{9}{16})^{3/2}} \right| = \frac{192}{125}.$$

Окружностью кривизны данной линии в ее точке А называется предельное положение окружности, проходящей через три точки A, B, C кривой, когда $B \to A$ и $C \to A$. Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны.

Центр окружности кривизны называется *центром кривизны* и находится на нормали к линии, проведенной в точке A в сторону вогнутости этой линии.

Координаты ξ и η центра кривизны линии $y = f(x)$ вычисляются по формулам: $\xi = x - \dfrac{y'(1+(y')^2)}{y''}$, $\eta = y + \dfrac{1+(y')^2}{y''}$.

Эволютой линии называется множество ее центров кривизны.

Пример 10. Составить уравнение эволюты параболы $2y^2 = 2x + 1$.

Решение. Продифференцируем 2 раза: $4yy' = 2$, $\quad y' = \dfrac{1}{2y} \Rightarrow 4(y')^2 + 4y'' = 0$

$\Rightarrow\ y'' = -\dfrac{(y')^2}{y} = -\dfrac{1}{4y^3}$. Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - \frac{(1+(y')^2)y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{(1+\frac{1}{4y^2})\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме: $\xi = 3y^2$, $\eta = -4y^3$.

Исключив параметр у, получим уравнение эволюты: $\eta^2 = \dfrac{16\xi^3}{27}$.

§5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Основные понятия функции нескольких переменных. Способы задания функции

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется *функцией двух переменных*. Обозначается $z = f(x; y)$.

Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется однозначной, а если более одного, то – *многозначной*.

Как и функции одной переменной, функции двух переменных могут быть заданы *таблицей* (для некоторого количества пар значений независимых переменных указываются соответствующие им значения функции), *аналитически* (задаётся формула, при помощи которой по заданным значениям независимых переменных отыскиваются значения функции) и *графиком* (множество точек плоскости, абсциссы и ординаты которых являются значениями x и y, а аппликаты - соответствующие значения z). Графиком функции непрерывных аргументов служит некоторая поверхность.

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Пример 1. Найти область определения функции:

а) $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9x^2}$

Решение. Функция z принимает действительные значения при условии $36-4x^2-9x^2\geq 0$ т.е. $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}\leq 1$. Областью определения данной функции является эллипс с центром в начале координат (a=3 и $в$=2 - длины полуосей), включая граничный эллипс.

б) $u=\ln\left(2z^2-6x^2-3y^2-6\right)$

Решение. Данная функция принимает действительные значения при $2z^2-6x^2-3y^2-6>0$ т.е. $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}<-1$. Областью определения функции является часть пространства, заключённая внутри плоскостей двуполостного гиперболоида.

Пример 2. Найти область определения и множество значений таблично заданной функции:

Стоимость автомобиля *z (тыс .руб)* **в зависимости от количества покупаемых автомобилей** *x* **и комплектации** *y*

количество автомобилей в партии	комплектация автомобиля		
	I	II	III
1-3	10	10,5	11
4-7	9,7	10,1	10,5
8-15	9,6	10	10,3
Более 15	9,5	9,8	10,2

Решение. $x\in[1;+\infty)$, $y\in[1;3]$, $z\in[9{,}5;11]$.

Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$.

Пусть каждой точке M из множества точек $\{M\}$ евклидового пространства E^m по какому-либо закону ставится в соответствие некоторое число u из числового множества U. Тогда будем говорить, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u=f(M)$. При этом множество $\{M\}$ называется *областью определения*, *U – областью изменения функции $f(M)$*.

5.2. Предел и непрерывность функции двух переменных

Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $r>0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие $MM_0<r$, также верно и условие $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

Пример 2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{(x+y-2)}-1}{3(x+y-2)}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{(x+y-2)}-1}{3(x+y-2)} = \left| \begin{array}{l} x+y-2=t \\ x\to 0,\ y\to 2 \Rightarrow \\ t\to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{3t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{3t} = \dfrac{1}{3}$.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$.

Решение. Функция $\dfrac{x-y}{x+y}$ определена в проколотой окрестности точки O(0; 0) вне прямой $x+y=0$; поэтому условие $(x;y)\to(0;0)$ означает, что $x+y\neq 0$.

Если здесь применять обычный метод «проб и ошибок», то можно получить следующие результаты:

1) устремим M($x; y$) к O(0; 0) вдоль оси Ox, т.е. примем $y=0$, а $x\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \dfrac{x-y}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-0}{x+0} = 1$;

2) устремим M($x; y$) к O(0; 0) вдоль оси Oy, т.е. примем $x=0$, а $y\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \dfrac{x-y}{x+y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0-y}{0+y} = -1$.

Разные предельные значения означают, что данный предел не существует.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} \textit{перейдём к} \\ \textit{полярным} \\ \textit{координатам} \\ \begin{cases} x=r\cos\phi, \\ y=r\sin\phi \end{cases} \textit{при } r\to 0 \end{array} \right| = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos\phi^2\sin\phi}{r^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)} =$

$= \lim\limits_{r\to 0} r\cos^2\phi\sin\phi = 0$.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0,y_0)$, если

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ (1); причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется *точкой разрыва* функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

1) Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Пример 3. Непрерывна ли функция $f(x; y) = (x + y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right)$ *при* $x \neq 0,\ y \neq 0$ *и* $f(0; 0) = 0$.

Решение. Проверим условия непрерывности функции в точке O(0; 0):

1) Функция *f(x, y)* определена в окрестности этой точки.
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x + y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$, так как имеем $x + y \to 0$, а $\left|\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right|$ ограничена.
3) Предел в точке равен значению функции в этой точке $f(0; 0) = 0$. Функция непрерывна в точке O (0; 0).

Функция непрерывна в каждой точке $(x; y) \in R^2$ как комбинация непрерывных элементарных функций.

5.3. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Пусть в некоторой области задана функция $z = f(x, y)$. Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением функции по x*. Можно записать $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по x.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

Пример 4. Найти все производные первого порядка**:**

а) $z = x^3 - 2xy^2 + y^4 - 5$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$.

Рассматривая x как постоянную величину, получим $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3xy + 4y^3$.

б) $z = x^y$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$.

в) $z = e^{2x-y^2}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2x-y^2}\left(2x - y^2\right)_x^{/} = 2e^{2x-y^2}; \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{2x-y^2}\left(2x - y^2\right)_y^{/} = -2ye^{2x-y^2}$.

г) $u = x^2 y^3 z^4$.

Решение. Рассматривая y и z как постоянные величины, получим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 z^4$.

Рассматривая x и z как постоянные величины, получим $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 z^4$.

Рассматривая x и y как постоянные величины, получим $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 4x^2 y^3 z^3$.

Пример 5. Показать, что функция $z = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

Решение. Находим $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \dfrac{2y^2}{x^2 - y^2}$.

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\cdot\left[\ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right] = \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln\left(x^2 - y^2\right)}{y} = \frac{z}{y^2}$$

Пример 6. Найти $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix}$, если $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$.

Решение. Находим $\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\phi$, $\frac{\partial x}{\partial \phi}=-r\sin\phi$, $\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\phi$, $\frac{\partial y}{\partial \phi}=r\cos\phi$.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r\cos^2\phi + r\sin^2\phi = r\cdot\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right) = r.$$

5.4. Полное приращение и полный дифференциал функций нескольких переменных

Для функции $f(x, y)$ выражение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ называется *полным приращением.*

Если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) =$$
$$= \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right].$$

Применив теорему Лагранжа[7] к выражениям, стоящим в квадратных скобках, получаем:

$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$, $\quad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}$, здесь $\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$; $\quad \bar{x} \in (x, x+\Delta x)$. Следовательно $\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}$. Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ называется *полным приращением* функции $f(x, y)$ в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ соответственно.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y): $dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$.

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \ldots, t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Пример 7. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$.

[7] **Теорема Лагранжа.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется, по крайней мере, одна точка ε $(a < \varepsilon < b)$, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon)$.

Решение. $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ (1)

Найдем $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz$; $\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2$, подставим в формулу (1), получим $du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$

Пример 8. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

Решение. Найдем частные производные и подставим в формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}dy.$$

Геометрический смысл полного дифференциала[8]

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

5.5. Дифференцирование сложных функций

Пусть $z = f(x, y)$, где $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, и функции $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ вычисляется по формуле: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то полная производная от z по x находится по формуле: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Если $z = f(x, y)$, где $\begin{cases} x = \varphi(u; v), \\ y = \psi(u; v) \end{cases}$ то частные производные выражаются по формулам: $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

---

[8] Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример 9. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{x^2+y^2}$, где $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \end{cases}$.

Решение. $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{x^2+y^2}\cdot 2x(-a\sin t)+e^{x^2+y^2}\cdot 2y(a\cos t)=$

$=2ae^{x^2+y^2}\left(y\cos t-x\sin t\right)$. Выразив x, y, через t, получим

$\frac{dz}{dt}=2ae^{a^2}\left(a\sin t\cos t-a\cos t\sin t\right)=0$.

Пример 10. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$**,** $y=\sqrt{x^2+1}$**.**

Решение.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=$$

$$=\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\cdot\frac{1}{y}+\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}-\frac{x^2}{y\sqrt{y^2+x^2}\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{y\sqrt{x^2+1}-x^2}{y\sqrt{(y^2+x^2)\left(x^2+1\right)}}.$$

Пример 11. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2+y^2$, где $\begin{cases} x=u+v, \\ y=v-v \end{cases}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=\left(x^2+y^2\right)'_x\cdot(u+v)'_u+\left(x^2+y^2\right)'_y\cdot(u-v)'_u=$

$=2x\cdot 1+2y\cdot 1=2(x+y)=2(u+v+u-v)=4u$.

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=\left(x^2+y^2\right)'_x\cdot(u+v)'_v+\left(x^2+y^2\right)'_y\cdot(u-v)'_v=$

$=2x\cdot 1+2y\cdot(-1)=2(x-y)=2(u+v-u+v)=4v$.

5.6. Дифференцирование функций, заданных неявно

Производная неявной функции $y=y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x;y)=0$, где $F(x;y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y, может быть вычислена по формуле $y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ при условии $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом *y* как функцию от *x*.

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных $z=\varphi(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$ - дифференцируемая функция переменных *x, y* и *z*, может, могут быть вычислены по формулам: $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ при условии $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Пример 12. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение[9]**.** Здесь $F(x;y)=x^3+y^3-3xy$. Находим $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x$. Тогда $y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{3x^2-3y}{3y^2-3x}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$.

Пример 13. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $xyz=x+y+z$.

Решение. Здесь $F(x;y;z)=xyz-x-y-z$. Находим $\frac{\partial F}{\partial x}=yz-1$, $\frac{\partial F}{\partial y}=xz-1$, $\frac{\partial F}{\partial z}=xy-1$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{yz-1}{xy-1}=\frac{1-yz}{xy-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{xz-1}{xy-1}=\frac{1-xz}{xy-1}$.

5.7. Частные производные высших порядков

Если функция *f*(*x, y*) определена в некоторой области *D*, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные *частными производными первого порядка*.

Производные этих функций будут *частными производными второго порядка:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$.

---

[9] Другой способ решения смотрите пример в пункте 3.7.

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются *смешанными производными*.

Теорема (Шварц). Две смешанные частные производные одного порядка одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, в случае, когда они являются непрерывными функциями, равны между собой (например $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$).

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Пример 14. Найти все частные производные второго порядка функции $z = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right)$.

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем выражение $z = \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2\ln x - \ln y$. Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y}$. Найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2}{x}\right)'_x = -\frac{2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{2}{x}\right)'_y = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{y}\right)'_y = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(-\frac{1}{y}\right)'_x = 0$.[10]

5.8. Дифференциалы высших порядков

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)$$

$$d^2 z = d\left[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy\right] = f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{x^3}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x, y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x, y)(dy)^3$$

…………………

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего в скобках выражения.

---

[10] Можно было $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ не искать, а сослаться на теорему Шварц.

Пример 15. Для функции $z=3x^2y^4$ найти d^3z.

Решение. Найдем все частные производные третьего порядка. $\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^4$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=12x^2y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(6xy^4\right)'_x=6y^4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(6xy^4\right)'_y=24xy^3$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(12x^2y^3\right)'_y=36x^2y^2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\left(6y^4\right)'_x=24y^3$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\left(24xy^3\right)'_x=24y^3$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\left(24xy^3\right)'_y=72xy^2$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\left(36x^2y^2\right)'_y=72x^2y$.

Подставим полученные производные в формулу

$$d^3z=f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3+3f'''_{x^2y}(x,y)(dx)^2dy+3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2+f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3=$$

$$=72xy^2dx^3+72y^3dx^2dy+216xy^2dxdy^2+72x^2ydy^3.$$

§6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0. Плоскость, которая проходит через точку N_0, называется *касательной плоскостью* к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0.

Нормалью к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

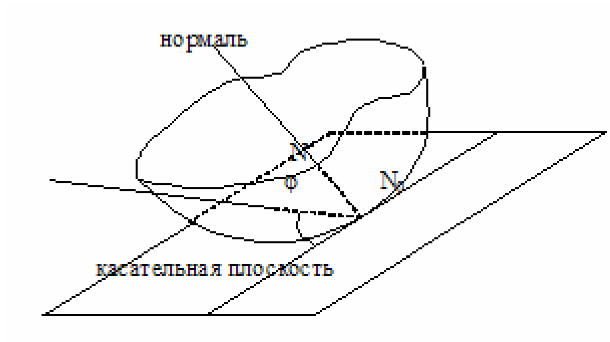


Рис.21

Замечание. В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Пусть поверхность задана уравнением $z=f(x,y)$, запишем её в неявном виде $F(x;y;z)=0$, где $F(x;y;z)$ – функция, дифференцируемая в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$. Тогда *касательная плоскость* существует и имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{N_0}\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{N_0}\cdot(z-z_0)=0.$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке: $\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{N_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{N_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{N_0}}$

Пример 17. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$.

Решение. Запишем данную функцию в неявном виде

$F(x;y;z)=x^2-2xy+y^2-x+2y-z$. Найдём $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_M=(2x-2y-1)_M=-1$,

$\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_M=(-2x+2y+2)_M=2$, $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_M=-1$.

Уравнение касательной плоскости: $-1\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)-1\cdot(z-1)=0$ $\Rightarrow -x+2y-z-2=0$.

Уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

6.2. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

Пусть функция $f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $(x,\ y)$. Найдем полное приращение этой функции: $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$,

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение $\Delta z\approx dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$, то получим приближенную формулу: $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$

Пример 18. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$, исходя из значения функции $u=\sqrt{x^y+\ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Решение. Из заданного выражения определим $\Delta x = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, $\Delta y = 1{,}99 - 2 = -0{,}01$, $\Delta z = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$.

Найдем значение функции $u(x,\ y,\ z)=\sqrt{1^2+\ln 1}=1$.

Находим частные производные: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\dfrac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}}=1$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^y\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=0;\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{1}{2}.$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0{,}04\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 1\cdot 0{,}04 - 0\cdot 0{,}01 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 = 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02} \approx u(1{,}2{,}1) + du = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

6.3. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум

Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой максимума*.

Если для функции $z = f(x, y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ верно неравенство $f(x_0, y_0) < f(x, y)$, то точка M_0 называется *точкой минимума*.

Теорема (необходимые условия экстремума).

Если функция $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

Эту точку (x_0, y_0) будем называть *критической точкой*.

Теорема (достаточные условия экстремума).

Пусть в окрестности критической точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Рассмотрим выражение: $D(x, y) = A\cdot C - B^2$, где $A = f''_{x^2}(x, y)$, $C = f''_{y^2}(x, y)$, $B = \left[f''_{xy}(x, y)\right]^2$.

1) Если $D(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ имеет экстремум, если $A < 0$ - максимум, если $A > 0$ - минимум.

2) Если $D(x_0, y_0) < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ не имеет экстремума.

3) Если $D = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя, необходимы дополнительные исследования.

Пример 19. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 2y + x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{M(1; 2) – критическая точка.}$$

Найдём значения вторых производных в точке $M(1; 2)$:

$A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$. Тогда $D = A\cdot C - B^2 = 3 > 0$. Так как $A > 0$, то в точке M(1; 2) функция имеет минимум $z_{\min} = -7$.

Пример 20. Исследовать на экстремум функцию $\frac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z=0$, заданную неявно.

Решение. Схема исследований та же, только все параметры задачи надо определить по методам функций, заданных неявно.

1. Найдём критические точки.

Пусть $f(x;y;z)=\frac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z$, тогда

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=x^2-z^2,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y,\\ \frac{\partial f}{\partial z}=-2xz+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-z^2}{-2zx+1}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{-2zx+1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z, x=-z,\\ y=0,\\ \frac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z=0.\end{cases}$$

В третьей системе присоединяем данное уравнение. Решением системы являются точки $M_1(0;0)$, $M_2(\sqrt{\frac{3}{2}};0)$, $M_3(-\sqrt{\frac{3}{2}};0)$. Если $M_1(0;0)$, то $z=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ следовательно, уравнение в этой точке не определяет однозначную функцию и эта точка не подлежит исследованию.

2. Для проверки достаточных условий найдём вторые частные производные по правилам дифференцирования неявных функций:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2x}{1-2x^2},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{1-2x^2},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

При $M_2(\sqrt{\frac{3}{2}};0)$: $A=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$. $D=A\cdot C-B^2>0$, т.к. $A>0\ \Rightarrow$ в точке $M_2(\sqrt{\frac{3}{2}};0)$ - минимум.

При $M_3(-\sqrt{\frac{3}{2}};0)$: $A=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$. $D=A\cdot C-B^2<0\ \Rightarrow$ в точке $M_3(-\sqrt{\frac{3}{2}};0)$ - экстремума нет.

Условный экстремум находится, когда переменные x и y, входящие в функцию $u=f(x, y)$, не являются независимыми, т.е. существует некоторое соотношение $\varphi(x, y)=0$, которое называется *уравнением связи.* Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой ***функцией Лагранжа***[11] $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x,y)$, где λ - неопределённый постоянный множитель. Необходимые условия экстремума функции

Лагранжа имеют вид $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

Замечание. Если вторые частные производные не содержат λ, то процесс нахождения условного экстремума вырождается в процесс нахождения локального (абсолютного) экстремума функции $z = f(x, y)$ − что не приемлемо. Тогда для исследования на экстремум в полученных критических точках

вычисляем значение $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0;\lambda_0) & \varphi'_y(M_0;\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0;\lambda_0) & u''_{xx}(M_0;\lambda_0) & u''_{xy}(M_0;\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0;\lambda_0) & u''_{xy}(M_0;\lambda_0) & u''_{yy}(M_0;\lambda_0) \end{vmatrix}$.

Если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке M_0 имеет условный минимум; если $\Delta < 0$ - то условный максимум.

Пример 21. Найти экстремум функции $f(x, y) = xy$, если уравнение связи:

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$.

Найдем частные производные и составляем необходимые условия экстремума для функции Лагранжа: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$; $\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \lambda = -\dfrac{5}{12} \\ x = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{6}\right)$- стационарная точка. Для исследования на экстремум в полученных критических точках вычисляем значения

[11] Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) – французский математик и механик, член Берлинской академии наук (1759), Парижской академии наук (1772), почётный член Петербургской академии наук (1776), родился и получил высшее образование в Турине (Италия).

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=3, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ и составляем определитель

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0;\lambda_0) & \varphi'_y(M_0;\lambda_0) \\ \varphi'_x(M_0;\lambda_0) & u''_{xx}(M_0;\lambda_0) & u''_{xy}(M_0;\lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0;\lambda_0) & u''_{xy}(M_0;\lambda_0) & u''_{yy}(M_0;\lambda_0) \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\text{-}12.$$

Т.к $\Delta<0\Rightarrow$ в точке $M_0\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{6}\right)$ функция $f(x, y) = xy$ имеет условный максимум.

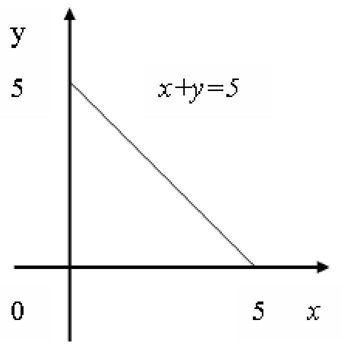
Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также ***методом множителей Лагранжа.***

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

6.4. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области надо:

1. найти критические точки, расположенные в данной области, вычислить значения функции в этих точках;
2. найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
3. из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.



Пример 22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x^2-5y^2-6x+20y+5$ в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y=5$.

Рис.22

Решение.

1. Найдём критические точки из системы $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x-6 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-10y+20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x-6=0 \\ -10y+20=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1 \\ y=2\end{cases}\Rightarrow(1;\ 2)$ – критическая точка,

которая принадлежит заданной области. Значение функции в критической точке $z = 22$.

1. Проводим исследование на границе.

На прямой Oy получаем: $x = 0$, $z = -5y^2 + 20y + 5$. Исследуем эту функцию одной переменной на наибольшее и наименьшее значения на интервале $[0;5]$.

$z' = -10y + 20 \Rightarrow -10y + 20 = 0 \Rightarrow y = 2 \in [0;5] \Rightarrow z = 25$.

На концах отрезка $[0;5]$ функция принимает значения $z(0) = 5$ и $z(5) = -20$.

На прямой Оx получаем: $y = 0$, $z = 3x^2 - 6x + 5$. Исследуем эту функцию одной переменной на наибольшее и наименьшее значения на интервале $[0;5]$.

$z' = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0;5] \Rightarrow z = 2$.

На концах отрезка $[0;5]$ функция принимает значения $z(0) = 5$ и $z(5) = 50$.

На прямой $x + y = 5$ получаем: $y = 5 - x$, $z = 3x^2 - 5(5 - x)^2 - 6x + 20(5 - x + 5 =) - 2x^2 + 24x - 20$. Исследуем эту функцию одной переменной на наибольшее и наименьшее значения на интервале $[0;5]$.

$z' = -4x - 24 \Rightarrow -4x - 24 = 0 \Rightarrow x = -8 \notin [0;5]$.

На концах отрезка $[0;5]$ функция принимает значения $z(0) = -20$ и $z(5) = 50$.

3. Из всех получившихся значений выбираем наибольшее $z_{наиб} = 50$ и наименьшее $z_{наим} = -20$.

Пример 23. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

Решение. Пусть x и y – катеты треугольника, а z **–** гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ связаны уравнением $\frac{xy}{2} = S$, т.е. $xy - 2S = 0$. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдём частные производные $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x, \\ \frac{xy}{2} = S. \end{cases}$ Получаем решение $\lambda = -2, x = y = \sqrt{2S}$. Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой.

§7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Основные понятия неопределенного интеграла

Неопределенным интегралом функции *f(x)* называется множество всех первообразных функций *F(x) + C*.

Записывается: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Первообразной функцией для функции *f(x)* на промежутке (*a; b*) называется такая функция *F(x)*, производная которой равна *f(x)* на рассматриваемом промежутке, то есть $F'(x) = f(x)$.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Имеет место *теорема*: две различные первообразные одной и той же функции, определенной в некотором промежутке, отличаются друг от друга в этом промежутке на некоторое постоянное слагаемое.

Функция *f(x)* называется *непрерывной на отрезке* [*a, b*]**,** если:

1) она определена на этом множестве;

2) непрерывна в каждой точке этого отрезка, то есть $\forall x \in [a;b]$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) - f(x) \right] = 0$, где $x + \Delta x \in [a;b]$.

Теорема (условие существования неопределенного интеграла). Всякая непрерывная на отрезке [*a, b*] функция имеет на этом промежутке неопределенный интеграл.

Основные теоремы (свойства неопределенного интеграла):

1. $\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = f(x)$; где C-const.
2. $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где *u*, *v*, *w* – некоторые функции от *x*.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$
6. (*Инвариантность формулы интегрирования*). Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$- произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Ниже приводится таблица основных интегралов, которые используются при вычислениях неопределенных интегралов различных функций. Верность этой таблицы проверяется непосредственно дифференцированием.

Таблица 6.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	11	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
2	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
4	$\int e^x dx$	$e^x + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
5	$\int \sin(x) dx$	$-\cos(x) + C$	15	$\int \frac{1}{\cos(x)} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
6	$\int \cos(x) dx$	$\sin(x) + C$	16	$\int \frac{1}{\sin(x)} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right\| + C$
7	$\int tg(x) dx$	$-\ln\|\cos(x)\| + C$	17	$\int sh(x) dx$	$ch(x) + C$
8	$\int ctg(x) dx$	$\ln\|\sin(x)\| + C$	18	$\int ch(x) dx$	$sh(x) + C$
9	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$	$tg(x) + C$	19	$\int \frac{dx}{sh^2(x)}$	$-cth(x) + C$
10	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$	$-ctg(x) + C$	20	$\int \frac{dx}{ch^2(x)}$	$th(x) + C$

7.2. Основные методы интегрирования

- **Метод непосредственного интегрирования**

Метод интегрирования основан на применении табличных интегралов, и называется *непосредственным интегрированием*. При этом данный интеграл может быть приведен к табличному с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 1. Найти интегралы функций:

a) $\int (3x^2 - 2\sin(x) + 5) dx = 3\int x^2 dx - 2\int \sin(x) dx + 5\int dx = x^3 + 2\cos(x) + 5x + C;$

b) $\int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{2 - x^2}\sqrt{2 + x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} =$

$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C;$

c) $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int \left(2 \cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x dx = \frac{18^x}{\ln(18)} + C.$

- **Замена переменной**

Этот метод интегрирования основан на введении новой переменной интегрирования. Приведем пример: пусть дана сложная функция *f(x)*, где $x=\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную $dx=\varphi'(t)dt$. Применяется свойство инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла, получаем: $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Пример 2. Найти интегралы функций:

a) $\int \frac{\sqrt{\ln(4x+5)}}{4x+5}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{\ln(4x+5)}}{4x+5}dx=\left|\begin{array}{l}\ln(4x+5)=t^2\\ \frac{4dx}{4x+5}=2tdt\\ \frac{dx}{4x+5}=\frac{1}{2}tdt\end{array}\right|=\int t\cdot\frac{1}{2}tdt=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{t^3}{6}+C=\frac{\sqrt{\ln^3(4x+5)}}{6}+C;$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{c}e^x-1=t^2,\ e^x=t^2+1\\ x=\ln\left(t^2+1\right),\ dx=\frac{2t}{t^2+1}dt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{t(t^2+1)}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctg(t)+C=$$

$$=2arctg\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C;$$

c) $\int x(x^2+1)^{3/2}dx$.

Решение.

$$\int x(x^2+1)^{3/2}dx=\left|\begin{array}{l}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{dt}{2}\end{array}\right|=\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

d) $\int \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[3]{x}=t\\ \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx=dt\end{array}\right|=\int 3\sin(t)dt=-3\cos(t)+C=-3\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)+C.$$

При интегрировании заменой переменной важно удачно сделать подстановку. Однако нельзя дать общее правило выбора замены переменной для интегрирования любой функции. Это можно сделать только для интегрирования отдельных классов функций: рациональных, тригонометрических и т.д. (интегрирование этих классов функций предложены в таблицах 3 – 7).

- **Интегрирование по частям**

Этот метод интегрирования основан на применении формулы дифференцирования произведения *d(uv)=udv+vdu* и вычислении затем интеграла $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$. Из этого равенства получаем формулу интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$.

Пример 3. Найти интегралы функций:

а) $\int (x^2 - 3x + 4)e^x dx$.

Решение.

Интегрируется по частям: пусть $u = x^2 - 3x + 4,\ dv = e^x dx$; тогда $v = e^x$, $du = (2x - 3)dx$. Следовательно, $\int (x^2 - 3x + 4)e^x dx = (x^2 - 3x + 4)e^x - \int (2x - 3)e^x dx.$

Еще раз интегрируется по частям: пусть $u = 2x - 3,\ dv = e^x dx;$ тогда $du = 2dx, v = e^x$. Получаем,

$$\int (x^2 - 3x + 4)e^x dx = (x^2 - 3x + 4)e^x - (2x - 3)e^x + \int 2e^x dx =$$

$$= (x^2 - 3x + 4)e^x - (2x - 3)e^x + 2e^x + C;$$

b) $\int x^n \cdot \ln(x) dx$.

Решение.

Интегрируется по частям: пусть $u = \ln(x),\ dv = x^n dx$; тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Следовательно,

$$\int x^n \cdot \ln(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C;$$

c) $\int arctg(x) dx$.

Решение.

Интегрируется по частям: пусть $u = arctg(x),\ dv = dx$; тогда $v = x$, $du = \dfrac{dx}{1 + x^2}$. Следовательно, $\int arctg(x) dx = x \cdot arctg(x) - \int \dfrac{x \cdot dx}{1 + x^2}$.

Получившийся интеграл вычисляется методом замены переменной:

$1+x^2=t,\ 2xdx=dt$. Тогда $\int arctg(x)dx = x\cdot arctg(x) - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} =$

$= x\cdot arctg(x) - \frac{1}{2}\ln(t) + C = x\cdot aectg(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$;

d) $\int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx$.

Решение.

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx = \left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right| = 2\int t\cdot\sin(t)dt = \left|\begin{matrix}u=t & \Rightarrow du=dt\\ dv=\sin(t)dt & \Rightarrow dv=-\cos(t)\end{matrix}\right| =$$

$$=2\left(-t\cos(t)+\int\cos(t)dt\right) = -2t\cos(t)+2\sin(t)+C = -2\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)+2\sin\left(\sqrt{x}\right)+C.$$

e) $\int x\cdot\arcsin(x)dx$.

Решение.

Интегрируется по частям: пусть $u=\arcsin(x),\ dv=xdx$; тогда $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=\frac{x^2}{2}$. Следовательно, $\int x\cdot\arcsin(x)dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x) - \int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}\left(\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}\left(\int\sqrt{1-x^2}dx - \arcsin x\right) = \frac{x^2}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) -\right.$$

$$\left.-\arcsin(x)\right) + C = \frac{1}{4}\left(2x^2\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} - 2\arcsin(x)\right) + C;$$

g) $\int e^{2x}\cos(x)dx$.

Решение.

Интегрируется по частям: пусть $u=e^{2x},\ dv=\cos(x)dx;$ тогда $du=2e^{2x}dx$, $v=\sin(x)$. Следовательно, $\int e^{2x}\cos(x)dx = e^{2x}\sin(x) - \int\sin(x)\cdot 2e^{2x}dx$.

Еще раз интегрируется по частям: пусть $u=e^{2x},\ dv=\sin(x)dx;$ тогда $du=2e^{2x}dx,\ v=-\cos(x)$. Получается,

$$\int e^{2x}\cos(x)dx = e^{2x}\sin(x) - 2\left(-e^{2x}\cos(x) + 2\int e^{2x}\cos(x)dx\right) =$$

$= e^{2x}\sin(x) + 2e^{x}\cos(x) - 4\int e^{2x}\cdot\cos(x)dx$.

Обозначается, $\int e^{2x}\cos(x)dx = I$. Тогда $I = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 4I$.

Следовательно, $\int e^{2x}\cos(x)dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin(x) + 2\cos(x)) + C.$

Приведем в таблице 7 некоторые распространённые случаи использования метода интегрирования по частям.

Таблица 7.

вид интеграла	метод интегрирования
$\int P_n(x)\cdot e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cdot\sin(kx)dx$, $\int P_n(x)\cdot\cos(kx)dx$, $\int P_n(x)\cdot a^{kx}dx$.	За u принимается многочлен $P_n(x)$, а за dv все остальные подынтегральные выражения.
$\int P_n(x)\cdot\ln(x)dx$, $\int P_n(x)\cdot\arcsin(x)dx$, $\int P_n(x)\cdot\arccos(x)dx$, $\int P_n(x)\cdot arctg(x)dx$, $\int P_n(x)\cdot arcctg(x)dx$.	За dv принимается $P_n(x)dx$, а за u все остальные подынтегральные выражения.
$\int e^{mx}\cdot\sin(kx)dx$, $\int e^{mx}\cdot\cos(kx)dx$, $\int\sin(\ln x)dx$, $\int\cos(\ln x)dx$.	Данные бесконечные интегралы, решаются как уравнения, после двукратного интегрирования по частям.
$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx$, $\int\sqrt{a^2 + x^2}dx$, $a > 0$.	За dv принимается dx, а за u остальные подынтегральные выражения.

7.3. Интегрирование рациональных дробей

Дробно-рациональной функцией называется функция вида: $f(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x)$ - многочлен степени m, $P_n(x)$ - многочлен степени n.

Замечание. Если $m < n$, то рациональную дробь называют *правильной*. Если $m \geq n$, то рациональную дробь называют *неправильной*.

Пример 4. Найти интегралы функций:

a) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x+4)^2}$.

Решение.

$$\int \frac{7dx}{(3x+4)^2} = \left| \begin{matrix} 3x+4=t; \\ dx=\dfrac{dt}{3} \end{matrix} \right| = \frac{7}{3}\int t^{-2}dt = \frac{7}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{(-1)} + C = -\frac{7}{3t} + C = -\frac{7}{3(3x+4)} + C;$$

b) $\displaystyle\int \frac{13}{7-x^2+6x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{13}{7-x^2+6x}dx = -\int \frac{13}{x^2-6x-7}dx = -13\int \frac{dx}{(x-2)^2-16} = \left| \begin{matrix} x-3=t; \\ dx=dt \end{matrix} \right| =$$

$$= -13\int \frac{dt}{t^2-16} = -13\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right| + C = \frac{-13}{8}\ln\left|\frac{x-7}{x+1}\right| + C;$$

c) $\displaystyle\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$.

Решение.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left| \begin{matrix} 6x-5=t; \quad x=\dfrac{t+5}{6}; \\ dx=\dfrac{dt}{6} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14t+70-24}{t^2+23}dt = \frac{7}{3}\int \frac{tdt}{t^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{dt}{t^2+23} = \frac{7}{6}\ln(t^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{23}}\right) + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\left(\frac{6x-5}{\sqrt{23}}\right) + C;$$

В таблице 8 приведены общие виды правильных рациональных дробей и способы их интегрирования с помощью замены переменной.

Таблица 8.

№	подынтегральное выражение	преобразования	замена	dx
I	$\frac{1}{ax+b}$		$ax+b=t$	$dx=\frac{dt}{a}$
II	$\frac{1}{(ax+b)^m}$		$ax+b=t$	$dx=\frac{dt}{a}$
III	$\frac{1}{x^2+px+q}$	$\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$	$x+\frac{p}{2}=t$	$dx=dt$
IV	$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$	$\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$	$x+\frac{p}{2}=t,$	$dx=dt$ и раскладывается на сумму двух интегралов

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и D <0.

Подынтегральные выражения, не вошедшие в таблицу 3, интегрируются с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Теорема (метод неопределенных коэффициентов). Если $f(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, где знаменатель имеет вид:

$P(x) = (x - a)^{\alpha}\dots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\dots(x^2 + rx + s)^{\mu}$ (причем множители типа x^2+px+q неразложимы на действительные множители первой степени), то эта дробь может быть разложена на сумму простейших дробей:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\dots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\dots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\dots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu},$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

Пример 5. Найти интегралы функций:

а) $\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx.$

Решение.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx=\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\right)dx.$$

Подынтегральное выражение представляется в виде суммы простейших дробей

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

После освобождения от знаменателей, получается:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

Сгруппировываются члены с одинаковыми степенями:

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

В итоге получается:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C;$$

b) $\displaystyle\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$.

Решение. Так как дробь неправильная, то выделяется целая часть:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \cline{2-2} \underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & 2x^2+3 \\ -\,9x^3+8x^2-76x-7 & \\ \underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ 20x^2-25x-25 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$
$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx.$$

Для нахождения корней уравнения $3x^3-4x^2-17x+6=0$ применяем схему Горнера:

	коэффициенты перед x				
		3	– 4	– 17	6
решение	3	3	5	– 2	–
	– 2	3	– 1	–	–
	1/3	3	–	–	–

Получаются: $3x^3-4x^2-17x+6=3(x-3)(x+2)(x-1/3)$.

Следовательно, корни этого уравнения: 3; -2; 1/3.

Отсюда $\int \frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\int \frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}$.

Получившееся подынтегральное выражение раскладывается на элементарные дроби: $\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5.$$

Применяем *метод произвольных значений,* суть которого состоит в том, что в полученное выражение подставляем поочередно (по числу неопределенных коэффициентов) значения x. Для упрощения вычислений принимают точки, при которых знаменатель дроби равен нулю. В нашем случае: 3, -2, 1/3. Получаем: $\begin{cases}40A=16\\35B=21\\C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2/5\\B=3/5\\C=1\end{cases}$.

В итоге получаем:

$$\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+9\int\frac{dx}{x+2}+6\int\frac{dx}{x-3}+15\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=\frac{2}{3}x^3+3x+9\ln|x+2|+6\ln|x-3|+5\ln|3x-1|+C.$$

7.4. Интегрирование тригонометрических функций

- **Метод тождественных преобразований**

Пример 6. Найти интегралы функций:

а) $\int \sin^4(x)dx$.

Решение.

$$\int \sin^4(x)dx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos(2x))^2dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))dx==\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx+\frac{1}{4}\int\cos^2(2x)dx=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos(4x))dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{1}{8}\left[\int dx+\int\cos(4x)dx\right]=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{\sin(2x)}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin(4x)}{32}=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin(2x)+\frac{\sin(4x)}{8}\right]+C;$$

b) $\int \sin(2x)\cos(5x)dx$.

Решение.

$$\int \sin(2x)\cos(5x)dx = \int \left(\frac{\sin(2x+5x)+\sin(2x-5x)}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \sin(7x)dx - \frac{1}{2}\int \sin(3x)dx = -\frac{\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(3x)}{6} + C.$$

- **Метод замены переменной**

Пример 7. Найти интегралы функций:

а) $\int \frac{\cos^7(x)dx}{\sin^4(x)}$.

Решение.

$$\int \frac{\cos^7(x)dx}{\sin^4(x)} = \left|\begin{matrix}\sin(x)=t; \cos(x)dx = dt; \\ \cos^2(x) = 1-\sin^2(x)\end{matrix}\right| = \int \frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} - 3\int \frac{dt}{t^2} + 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3(x)} + \frac{3}{\sin(x)} + 3\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C;$$

в) $\int \frac{\sin(4x)\,dx}{\cos^4(2x)+4}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin(4x)\,dx}{\cos^4(2x)+4} = \left|\begin{matrix}\cos^2(2x) = t \\ 2\cdot\cos(2x)\cdot(-\sin(2x))\cdot 2\cdot dx = dt \\ \sin(4x)dx = \frac{-dt}{2}\end{matrix}\right| = \int \frac{-dt}{2\cdot(t^2+4)} =$$

$$= -\frac{1}{2\cdot 2}arctg\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{-arctg\left(\frac{\cos^2(2x)}{2}\right)}{4} + C;$$

c) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cos^2 x} = \int \left(1+tg^2x\right)\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\begin{matrix} tgx = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt\end{matrix}\right| = \int \left(1+t^2\right)dt =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Метод универсальной тригонометрической подстановки (универсальной замены)

Пример 8. Найти интегралы функций:

а) $\int \frac{dx}{4\sin(x) + 3\cos(x) + 5}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{4\sin(x)+3\cos(x)+5} = \left| \begin{matrix} t = tg\left(\frac{x}{2}\right); dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}; \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C =$$

$$= -\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right) + 2} + C;$$

в) $\int \frac{dx}{\sin^2(x) + 6\sin(x)\cos(x) - 16\cos^2(x)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)+6\sin(x)\cos(x)-16\cos^2(x)} = \left| \begin{matrix} t = tg(x);\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tg(x)+3-5}{tg(x)+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tg(x)-2}{tg(x)+8}\right| + C;$$

с) $\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x) + 4\sin(x)\cos(x)}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)+4\sin(x)\cos(x)}dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)(1+4ctg(x)}dx = \int \frac{ctg^2(x)}{1+4ctg(x)}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} ctg(x) = t,\ x = arcctg(x) \\ dx = -\frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = -\int \frac{t^2}{1+4t} \cdot \frac{dt}{1+t^2}.$$

Интеграл вычисляется методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{A}{4t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(4t+1)}{(4t+1)(t^2+1)}=\frac{t^2(A+4B)+t(B+4C)+(A+C)}{(4t+1)(t^2+1)}=\frac{-t^2}{(4t+1)(t^2+1)}.$$

$$\begin{cases} A+4B=-1 \\ B+4C=0 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{17} \\ B=-\frac{4}{17} \\ C=\frac{1}{17} \end{cases}.$$

Получается:

$$\int\left(\frac{-\frac{1}{17}}{4t+1}+\frac{-\frac{4}{17}t+\frac{1}{17}}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{17}\left(\int\frac{dt}{4t+1}+\int\frac{4t-1}{t^2+1}dt\right)=-\frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\ln(4t+1)+2\int\frac{2t}{t^2+1}dt-\right.$$

$$\left.-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=-\frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\ln(4t+1)+2\ln(t^2+1)-arctg(t)\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\ln(4ctg(x)+1)+2\ln(ctg^2(x)+1)-arctg(ctg(x))\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\ln(4ctg(x)+1)+2\ln(ctg^2(x)+1)-(\frac{\pi}{2}-x)\right)+C.$$

Учитывая выше сказанное, представим основные типы тригонометрических функций в виде таблицы 9.

Таблица 9.

№	подынтегральное выражение	замена	dx
1	$R(\sin(x),\cos(x))dx$	Универсальная замена $t=tg\left(\frac{x}{2}\right), x=2arctg(t),$ $\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}, \cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$
2	$R(\sin^n(x),\cos^m(x))dx,$ n и $m-$ *четные числа*	$t=tg(x), \sin^2(x)=\frac{t^2}{1+t^2},$ $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$	$dx=\frac{dt}{1+t^2}$
3	$R(tg(x))dx$ $R(ctg(x))dx$	$t=tg(x), x=arctg(t)$ $t=ctg(x), x=arcctg(t)$	$dx=\frac{dt}{1+t^2}$ $dx=-\frac{dt}{1+t^2}$
4	$R(\sin^n(x),\cos^m(x))dx,$ $n-$ *нечетная*, $m-$ *четная*.	$\cos(x)=t$ $\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-t^2$	$\sin(x)dx=-dt$

Продолжение таблицы 9

№	подынтегральное выражение	замена	dx
5	$R(\sin^n(x), \cos^m(x))dx$, $n-$*четная*, $m-$*нечетная*.	$\sin(x)=t$ $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-t^2$	$\cos(x)dx=dt$
6	$R(tg^m(x)\sec^n(x))dx$, $R(ctg^m(x)\csc^n(x))dx$, $n-$*четное*$, n>0$	$tg(x)=t$, $1+tg^2(x)=\sec^2(x)$ $ctg(x)=t$, $1+ctg^2(x)=\csc^2(x)$	$\sec^2(x)dx=dt$ $-\csc^2(x)dx=dt$
7	$\sin^{2n}(x)\cdot\cos^{2m}(x)dx$	Понижается степень по формуле $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$, $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$, $\sin(x)\cdot\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$	
8	$\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$, $\sin(\alpha x)\cdot\sin(\beta x)dx$, $\cos(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx$.	$\frac{\sin((\alpha-\beta)x)+\sin((\alpha+\beta)x)}{2}$, $\frac{\cos((\alpha-\beta)x)-\cos((\alpha+\beta)x)}{2}$, $\frac{\cos((\alpha-\beta)x)+\cos((\alpha+\beta)x)}{2}$	

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных *sin(x)* и *cos(x)* . Функции *sec(x)=1/cos(x)* и *csc(x)=cosec(x)=1/sin(x)*.

7.5. Интегрирование иррациональных функций

Выделяют три основных типа интегралов, содержащих иррациональные функции:

- *Первый тип* включает в себя интегралы, которые вычисляются методом замены переменной.

Пример 9. Найти интегралы функций:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\left|\sqrt[4]{1-2x}=t; dt=\frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3}=\frac{-dx}{2t^3}\right|=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=-2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt=-2\int tdt-2\int\frac{t}{t-1}dt=-t^2-2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C\ ;$$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx.$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[12]{x-1}=t; x-1=t^{12}\\ dx=12t^{11}dt\end{array}\right|=\int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)}=12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt+\int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=$$

$$12\int tdt-12\int \frac{tdt}{t^2+1}+2\int dt-12\int \frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctg(t)+C=$$

$$=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-12\,arctg\,(\sqrt[12]{x-1})+C\,.$$

c) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx\,.$

Решение.

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx=\frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx-13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}2x^2+8x+1=t\\ (4x+8)dx=dt\end{array}\right|=\frac{5}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=\frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{t}-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}}=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

Таким образом, к первому типу можно отнести следующие подынтегральные выражения, представленные в таблице 10.

Таблица 10.

№	подынтегральное выражение	преобразования	замена	dx
1	$\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$		$\sqrt{ax+b}=t$ $ax+b=t^2$	$dx=\frac{2tdt}{a}$
2	$\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$	$\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}$	$x+\frac{p}{2}=t$	$dx=dt$
3	$\frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$	$\frac{mx+n}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}dx$	$x+\frac{p}{2}=t$	$dx=dt$
4	$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+px+q}}$		$\frac{1}{x-a}=t$, $x=\frac{1}{t}+a$	$dx=\frac{-1dt}{t^2}$
5	$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где $n\in N$		$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$; $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$; $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$	$dx=\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)' dt$

- Ко *второму типу* относят интегралы вида $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени. Интеграл находится методом неопределённых коэффициентов, с помощью тождества:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени равной $n-1$ с неопределёнными коэффициентами, λ – некоторый неопределённый коэффициент.

Пример 10. Найти интегралы функций:

а) $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

Решение.

Здесь n = 3, поэтому соответствующее тождество имеет вид:

$$\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases}A=1\\5A-2B=7\\10A-3B+C=0\\5B-C+\lambda=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-13\\\lambda=-7\end{cases}.$$

Итого $\displaystyle\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C;$$

b) $\displaystyle\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx$.

Решение.

Здесь n = 4, поэтому соответствующее тождество имеет вид:

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\int\frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Дифференцируем полученное выражение:

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Перегруппировываем:

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$\begin{cases}4A=4,\\3B=-6,\\2C+9A=12,\\6B+D=-18,\\3C+\lambda=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=1,\\B=-2,\\C=3/2,\\D=-6,\\\lambda=-9/2.\end{cases}$$

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

- К *третьему типу* относят интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Интегрируются с помощью тригонометрической подстановки, которая называется подстановкой Эйлера. При необходимости выделяют под радикалом полный квадрат, т.е. $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$, и вводят обозначение: $x+\frac{b}{2a}=t$, $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=m^2$.

Пример 11. Найти интегралы функций:

a) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\left|\begin{array}{l} x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)dt \\ \cos(t)=\sqrt{1-x^2}\end{array}\right|=\int\frac{\cos(t)dt}{\cos^3(t)}=\int\frac{dt}{\cos^2(t)}=tg(t)+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C;$$

b) $\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{2}{\cos(t)};dx=\frac{2\sin(t)}{\cos^2(t)}dt \\ \sqrt{x^2-4}=2tg(t)\end{array}\right|=\int\frac{2\sin(t)\cos(t)dt}{\cos^2(t)\cdot 2\cdot 2^5 tg^5(t)}=\frac{1}{32}\int ctg^4(t)dt=$$

$$=\frac{1}{32}\int ctg^2(t)\left(\frac{1}{\sin^2(t)}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int ctg^2(t)d(ctg(t))-\frac{1}{32}\int ctg^2(t)dt=$$

$$=-\frac{1}{96}ctg^3x-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2(t)}-1\right)dt=-\frac{1}{96}ctg^3(t)+\frac{1}{32}ctg(t)+\frac{t}{32}+C=\left|ctg(t)=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right|=$$

$$=-\frac{1}{12\left(x^2-4\right)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+\frac{1}{32}\arccos\left(\frac{2}{x}\right)+C;$$

c) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=2tg(t) \\ dx=\frac{2}{\cos^2(x)}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2}{\cos^2(x)}dt}{2tg(x)\sqrt{4+4tg^2(x)}}=\int\frac{dt}{tg(x)\cos^2(x)\sqrt{4(1+tg^2(x))}}=$$

$$= \int \frac{dt}{2tg(t)\cos^2(t)\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\cos(t)dt}{2\sin(t)\cos^2(t)\frac{1}{\cos(t)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin(t)} = \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{arctg\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\right)\right| + C.$$

Таким образом, введя новые обозначения, имеем следующие подынтегральные выражения, которые будут иметь соответствующие тригонометрические подстановки, представленные в таблице 11.

Таблица 11.

№	подынтегральное выражение	замена	dt
1	$R\left(t, \sqrt{m^2 - t^2}\right)$	$t = m\sin(z)$ или $t = m\cos(z)$	$dt = m\cos(z)dz$ или $dt = -m\sin(z)dz$
2	$R\left(t, \sqrt{t^2 - m^2}\right)$	$t = \frac{m}{\cos(z)}$ или $t = \frac{m}{\sin(z)}$	$dt = \frac{m\sin(z)}{\cos^2(z)}dz$ или $dt = \frac{-m\cos(z)}{\sin^2(z)}dz$
3	$R\left(t, \sqrt{t^2 + m^2}\right)$	$t = m\cdot tg(z)$ или $t = m\cdot ctg(z)$	$dt = \frac{m}{\cos^2(z)}dz$ или $dt = \frac{-m}{\sin^2(z)}dz$

7.6. Основные понятия и методы решения определенного интеграла

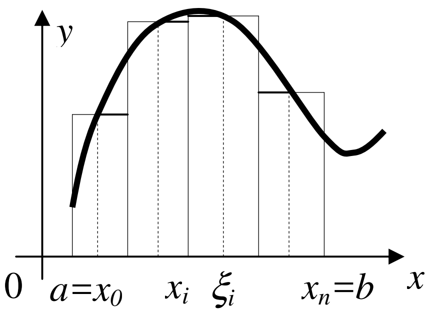


Рис. 23

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Разобьём отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выберем произвольную точку ξ_i. Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определённым интегралом от функции *f(x)* на отрезке [*a*, *b*] называется число равное пределу интегральных сумм при стремлении к нулю максимальной из длин отрезков разбиения: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, этот предел конечен и не зависит от способов разбиения отрезка [*a*, *b*] на части и выбора точек $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, на отрезках $[x_0; x_1], ..., [x_{n-1}; x_n]$.

Определённый интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, где *a* называется *нижним пределом*, *b* называется *верхним пределом*, *x* называется *переменной интегрирования*, *f(x)* называется *подынтегральной функцией*, *f(x)dx* называется *подынтегральным выражением*, [*a*, *b*] – *отрезок интегрирования*.

Пусть на отрезке [*a*, *b*] задана непрерывная функция $y = f(x) \ge 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – осью *Ox,* сбоку прямыми *x=a* и *x=b*, называется *криволинейной трапецией*.

Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл равен площади «криволинейной трапеции» ограниченной функцией $y = f(x)$, осью О*Y*, и прямыми *x=a* и *y=b.*

Теорема. Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a*, *b*], то определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ существует.

Отметим, что если оставить постоянным нижний предел интегрирования *a*, а верхний *x* изменить так, что бы $x \in [a;b]$, то величина интеграла будет изменяться. Интеграл: $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x), x \in [a;b]$, называется *определённым интегралом с переменным верхним пределом* и является функцией верхнего предела *x*.

Теорема (Связь между неопределённым интегралом и определённым интегралами). Всякая непрерывная на отрезке [*a*, *b*] функция $f(x)$ имеет первообразную, равную интегралу $\int\limits_a^x f(t)dt$, и тогда, согласно определению неопределённого интеграла, имеет место равенство $\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

Теорема (Ньютона – Лейбница). Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции *f(x)*, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ – это выражение известно под названием формулы *Ньютона – Лейбница*[12].

Основные свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$.
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. Если $f(x) \le \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.
5. Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.
6. *Теорема о среднем.* Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$.
7. Для произвольных чисел *a*, *b*, *c* справедливо равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.
8. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

[12] **Лейбниц** Готфрид Вильгельм (1.7.1646 – 14. 11.1716) – немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. Ввел впервые обозначение интеграла.

Ньютон Исаак (4.1.1643 – 31.3.1727) – английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии. Ньютон вычислял интеграл любой степенной функции. Математика для него была главным орудием в физических изысканиях.

9. $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, если f(x) - нечётная\ функция, \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, если f(x) - чётная\ функция. \end{cases}$$

Методы интегрирования определенного интеграла

1. Непосредственное интегрирование

Пример 12. $\int_{0}^{\pi} \sin(3x)dx$.

Решение.

$$\int_{0}^{\pi} \sin(3x)dx = -\frac{\cos(3x)}{3}\Bigg|_{0}^{\pi} = -\frac{\cos(3\pi)}{3} - \left(-\frac{\cos 0}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Замена переменных

Пусть задан интеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$, где *f(x)* – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x = \varphi(t)$.

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$;

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Тогда $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$.

Пример 13. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = \sin(t) \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos(2t))dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям

Формула имеет вид: $\int_a^b u(x)d[v(x)] = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)d[u(x)]$.

Пример 14. $\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx$.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} x\cos(x)dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(x)dx & v = \sin(x) \end{vmatrix} = x\sin(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx =$$

$$= x\sin(x)\Big|_0^{2\pi} + \cos(x)\Big|_0^{2\pi} = [2\pi\cdot\sin(2\pi) - 0\cdot\sin(0)] + [2\pi\cdot\cos(2\pi) - 0\cdot\cos(0)] = 0.$$

7.7. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы первого рода

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на любом отрезке $[a,b]$, то *несобственным интегралом с бесконечным пределом* или *несобственным интегралом первого рода* называется интеграл: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ или $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$, или $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, с – произвольное число.

Если этот предел *существует и конечен*, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Теоремы о сходимости и расходимости:

1. Если на промежутке $[a;+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию: $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a;+\infty)$, $f(x) > 0, \varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся.*

Пример 15. Вычислить определённый интеграл или установить его расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} \cos x dx$.

Решение.

$\int\limits_0^{\infty} \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^{b} \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty} \sin b$ - не существует $\Rightarrow$ несобственный интеграл расходится.

б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{x^2}$.

Решение.

$\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty} \int\limits_b^{-1} \dfrac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty} \left[-\dfrac{1}{x} \right] \Big|_b^{-1} = \lim\limits_{b\to-\infty} \left(1 + \dfrac{1}{b} \right) = 1$ - интеграл сходится.

2. Несобственные интегралы второго рода (интеграл от разрывной функции)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и имеет разрыв II-го рода при $x = b$, то *несобственным интегралом неограниченной функции* или *несобственным интегралом второго рода* называется интеграл: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ или $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, если функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$.

Если функция $f(x)$ терпит разрыв II-го рода во внутренней точке $c \in [a;b]$, то *несобственным интегралом второго рода* называют интеграл: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Замечание: внутренних точек разрыва II-го рода внутри отрезка может быть несколько.

Теоремы о сходимости и расходимости:

1. Если на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при $x=b$ терпят разрыв II-го рода и удовлетворяют условию: $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ («признак сравнения»).
2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв II-го рода. Если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ 0 < k < \infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно («предельный признак сравнения»).
3. Если функция $f(x)$, знакопеременная на отрезке $[a;b]$, имеет разрыв в точке $x=b$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

7.8. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычисление объёма тела по известным площадям параллельных сечений

Пусть тело, заключенное между двумя плоскостями *x=a* и *x=b*, имеет площадь сечения *S(x)* при $\forall x \in [a;b]$, проведенного перпендикулярно к оси *Ox*, и которое является известной и непрерывной изменяющейся при изменении *x*.

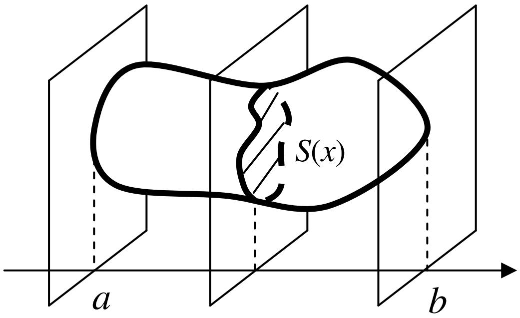


Рис. 24

Тогда объем этого тела вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x)dx$.

2. Объёмы тел вращения

Пусть кривая, задана уравнением $y = f(x)$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое тело вращения.

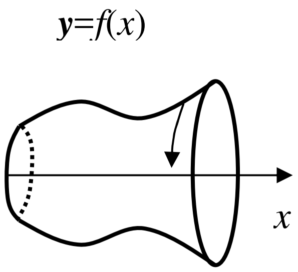


Рис. 25

$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$, где V – объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$ вокруг оси Оx.

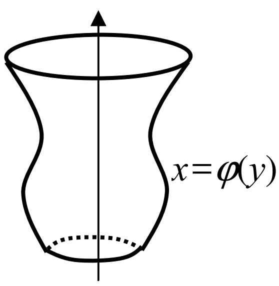


Рис. 26

$V = \pi\int_a^b \varphi^2(y)dy$, где V – объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0 \le x \le \varphi(y)$,
$c \le y \le d$ вокруг оси ОУ.

Площади плоских фигур, длины дуг кривых, площадь поверхности тела вращения рассмотрим в таблице 12.

Таблица 12.

В прямоугольных координатах		В полярных координатах
$y=f(x)$ *на* $[a;b]$ *или* $x=\varphi(y)$ *на* $[c;d]$	$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in (\alpha;\beta)$	$r = r(\varphi),\ \varphi \in (\alpha;\beta)$.
Площадь плоских фигур		
$S = \left\| \int\limits_a^b f(x) \right\| dx$ *или* $S = \left\| \int\limits_c^d \varphi(y) \right\| dy$	$S = \left\| \int\limits_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt \right\|$	$S = \frac{1}{2}\left\| \int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi) \right\| d\varphi$
Длины дуг кривых		
$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ *или* $l = \int\limits_c^d \sqrt{1+(\varphi'(y))^2}dx$	$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$	$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}d\varphi$

Пример 16. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций:

а) $y = x\sqrt{9-x^2},\ y = 0, (0 \le x \le 3)$.

Решение.

$$S = \int\limits_0^3 x\sqrt{9-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{9-x^2} = t \Rightarrow 9-x^2 = t^2 \\ xdx = -tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = -\int\limits_3^0 t \cdot tdt = \int\limits_0^3 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = 9(\text{кв.ед});$$

б) $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(t), \\ y = 2\sqrt{2}\sin(t), \end{cases}$ y=2 ($y \ge 2$).

Решение:

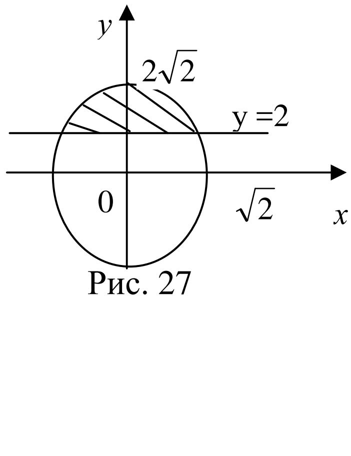


Рис. 27

$$S=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2}\sin(t)\left(-\sqrt{2}\sin(t)\right)dt-2\cdot 2=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^2(t)dt-4=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(1-\cos(2t)\right)dt-4=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-4=\pi-2\,(кв.ед).$$

Пример 17. Вычислить длины дуг кривых, заданных уравнениями:

а) $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},\quad 0\le x\le 1/4.$

Решение.

Найдём сначала производную

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{2-2x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

$$L=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1-x}{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x+1-x}{x}}dx=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_0^{\frac{1}{4}}=1\,(ед);$$

б) $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin(t)+2t\cos(t),\\ y=\left(2-t^2\right)\cos(t)+2t\sin(t).\end{cases}\quad 0\le t\le \pi/2$

Решение.

Найдём производные $\begin{aligned} x'&=2t\sin(t)+\left(t^2-2\right)\cos(t)+2\cos(t)-2t\sin(t)=t^2\cos(t);\\ y'&=-2t\cos(t)-\left(2-t^2\right)\sin(t)+2\sin(t)+2t\cos(t)=t^2\sin(t).\end{aligned}$

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t^4\cos^2(t)+t^4\sin^2(t)}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt=\frac{1}{3}\cdot t^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}(ед);$$

в) $r=1-\sin(\varphi),\ -\pi/2\le\varphi\le-\pi/6.$

Решение.

Найдём производную $r'=-\cos(\varphi)$.

$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sqrt{(1-\sin(\varphi))^2+(-\cos(\varphi))^2}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-2\sin(\varphi)+\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sqrt{2(1-\sin(\varphi))}d\varphi=$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}=2\,(ед)\cdot$$

§8. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

8.1. Понятие и геометрический смысл двойного интеграла

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i $(i = \overline{1,n})$, площади которых обозначим через ΔS_i, а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) - через d_i (Рис. 28).

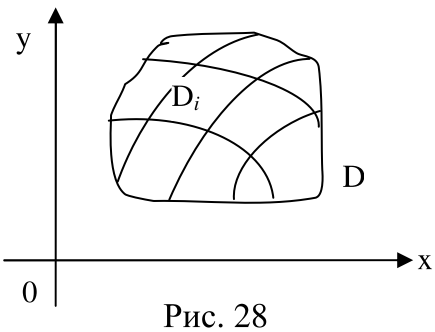


Рис. 28

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$, умножим значение $f(x_i; y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \cdots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i .$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x;y)$ в области D.

Рассмотрим предел интегральной суммы, когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \to 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ (или $\iint\limits_D f(x;y)dS$).

Если при стремлении к нулю шага разбиения области D интегральные суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint\limits_D f(x, y)dxdy .$$[13]

В этом случае функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой в области D; D — область интегрирования; x* и *y — переменные интегрирования; dx dy* (или dS) — *элемент площади.*

Теорема (*достаточное условие интегрируемости функции*)**.** Если функция $z=f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

[13] $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$

Замечание: *д*алее будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования, хотя двойной интеграл может существовать не только для непрерывных функций.

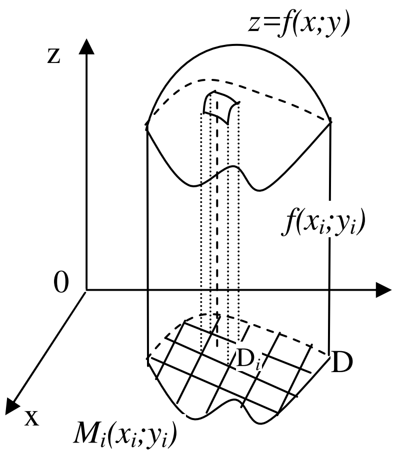


Рис. 29

Рассмотрим тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x;y)$, снизу – замкнутой областью D плоскости Oxy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D (Рис. 29). Такое тело называется *цилиндрическим.*

Геометрический смысл двойного интеграла: величина двойного интеграла от неотрицательной функции равна объему цилиндрического тела.

8.2. Основные свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D c\cdot f(x;y)dxdy = c\cdot\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, где c — const.

2. $\iint\limits_D (f_1(x;y)\pm f_2(x;y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x;y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x;y)dxdy.$

3. Если область D разбить линией на две области D_1 и D_2 такие, что $D_1\bigcup D_2 = D$, а пересечение D_1 и D_2 состоит лишь из линии, их разделяющей (см. рис. 6), то $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x;y)dxdy.$

4. Если в области D имеет место неравенство $f(x;y)\ge 0$, то и $\iint\limits_D f(x;y)dxdy \ge 0$. Если в области D функции $f(x;y)$ и $\varphi(x;y)$ удовлетворяют неравенству $f(x;y)\ge\varphi(x;y)$, то и $\iint\limits_D f(x;y)dxdy \ge \iint\limits_D \varphi(x;y)dxdy$.

5. $\iint\limits_D dS = S$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i = S$.

6. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то $mS \le \iint\limits_D f(x;y)dxdy \le MS$, где m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции в области D.

7. Если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области D, площадь которой S, то в этой области существует такая точка $(x_0;\ y_0)$, что $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot S$. Величину $f(x_0;y_0) = \frac{1}{S}\cdot\iint\limits_D f(x;y)dxdy$ называют *средним значением функции $f(x;y)$ в области D.*

8.3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$, где функция $f(x;y)\ge 0$ непрерывна в области D. Согласно геометрическому смыслу двойной интеграл выражает объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$. Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ - площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox, а $x = a$, $x = b$ - уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную тра- тра-пецию (Рис. 30), ограниченную прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всех $x\in[a;b]$. Такая область называется *правильной в направлении оси Oy:* лю-бая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках.

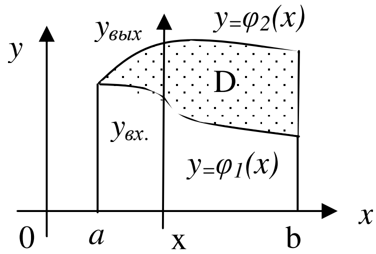


Рис. 30

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox: $x = \text{const}$, где $x\in[a;b]$. В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями $z = f(x;y)$, где $x = \text{const}$, $z = 0$, $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (Рис. 30). Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла $S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy.$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден следующим образом

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy\right)dx.$$

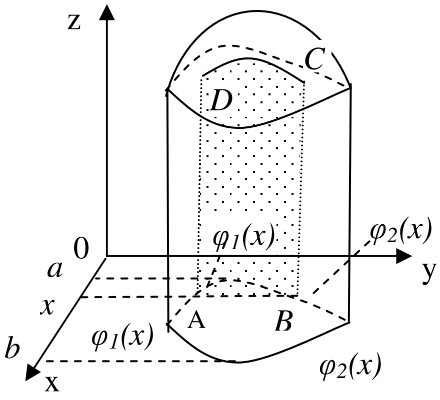


Рис. 31

С другой стороны было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x;y) \ge 0$ по области D. Следовательно,

$$V = \iint_D f(x;y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \right) dx.$$

Правую часть формулы называют *двукратным* (или *повторным) интегралом* от функции *f(x;y)* по области D. При этом $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b.

Если же область D ограничена прямыми $y = c$ и $y = d(c<d)$, кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ для всех $y \in [c;d]$, т. е. область D - *правильная в направлении оси Ох,* то, рассекая тело плоскостью y = const, аналогично получим: $\iint_D f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx.$[14]

Замечание:

1. если область D не является правильной ни «по x», ни «по y», то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси *Ох* или оси *Оу;*
2. полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x+2y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$

Решение. На рисунке 32 изображена область интегрирования D. Она правильная в направлении оси *Ох*. Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой:

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)dx = \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} =$$

[14] Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

$$=\int_0^1\left(\frac{(2-y)^2}{2}+4y-2y^2-\frac{y}{2}-2y^{\frac{3}{2}}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{(y-2)^3}{6}+\frac{7\cdot y^2}{2\cdot 2}-2\cdot 2\cdot\frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_0^1=1{,}45\cdot$$

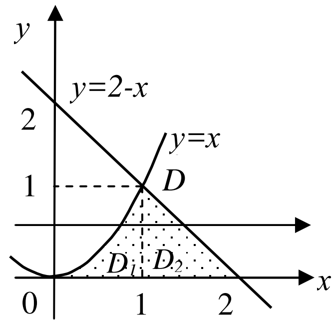


Рис. 32

8.4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Для упрощения вычисления двойного интеграла часто применяют метод подстановки (как это делалось и при вычислении определенного интеграла), т. е. вводят новые переменные под знаком двойного интеграла.

Определим преобразование независимых переменных x и y (замену переменных) как $x=\varphi(u;v)$ и $y=\psi(u;v)$.

Если функции имеют в некоторой области D^* плоскости Ouv непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля определитель $I(u;v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$,[15] функция $f(x;y)$ непрерывна в области D, то справедлива *формула замены переменных в двойном интеграле:*

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(\varphi(u;v);\psi(u;v))\cdot|I(u;v)|dudv.$$

Рассмотрим частный случай замены переменных, часто используемый при вычислении двойного интеграла, а именно замену декартовых координат x и y полярными координатами r и φ. В качестве u и v возьмем полярные координаты r и φ. Они связаны с декартовыми координатами формулами $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Правые части в этих равенствах - непрерывно дифференцируемые функции. Якобиан преобразования определяется из как

$$I(r;\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r\cdot\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r.$$

[15] Функциональный определитель называется *определителем Якоби* или *якобианом* (Г. Якоби — немецкий математик).

Формула замены переменных принимает вид:

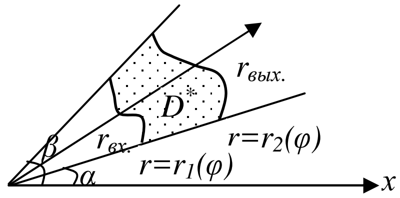


Рис. 33

$$\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi,$$ где D^* - область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат.

*Замечание: п*ереход к полярным координатам полезен, когда подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2)$*;* область D есть круг, кольцо или часть таковых.

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_{D}\sqrt{9-x^2-y^2}dxdy$, где область D — круг $x^2+y^2\le 9$.

Решение.

Перейдем к полярным координатам:

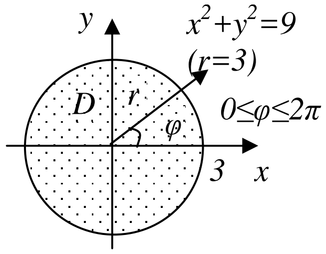


Рис. 34

$$\iint\limits_{D}\sqrt{9-x^2-y^2dxdy}=\iint\limits_{D}\sqrt{9-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\cdot rdrd\varphi=\iint\limits_{D} r\cdot\sqrt{9-r^2}drd\varphi\cdot$$

Область D в полярной системе координат определяется неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le 3$. Заметим: область D - круг - преобразуется в область D^* - прямоугольник. Поэтому, согласно формуле, имеем:

$$\iint\limits_{D} r\cdot\sqrt{9-r^2}dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3 r\cdot\sqrt{9-r^2}dr=\left|\begin{matrix}\sqrt{9-r^2}=t\\ 9-r^2=t^2\\ rdr=-tdt\\ r=0\Rightarrow t=3\\ r=3\Rightarrow t=0\end{matrix}\right|=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_3^0 t^2dt=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_3^0=9\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=9\varphi\Big|_0^{2\pi}=18\pi.$$

8.5. Некоторые приложения двойного интеграла

Приведем некоторые примеры применения двойного интеграла.

Объем тела

Согласно геометрическому смыслу, объем цилиндрического тела находится по формуле, $V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy,$ где $z = f(x;y)$ - уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху.

Площадь плоской фигуры

Если положить в формуле $V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$, $f(x;y) = 1$, то цилиндрическое тело «превратится» в прямой цилиндр с высотой $H = 1$. Объем такого цилиндра, как известно, численно равен площади S основания D. Получаем формулу для вычисления площади S области D: $S = \iint\limits_D dxdy$, или, в полярных координатах, $S = \iint\limits_D r \cdot dr\, d\varphi.$

Масса плоской фигуры

Масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x;y)$ находится по формуле $m = \iint\limits_m \gamma(x;y)dxdy.$

Пример 3. Найти массу фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями (Рис. 35). Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

Решение. По условию, $\gamma = \gamma(x;y) = k \cdot xy$, где k — коэффициент пропорциональности.

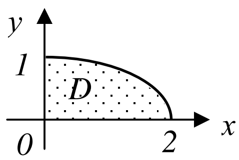


Рис. 35

$$m = \iint\limits_D kxydxdy = k\int_0^2 x \cdot dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} ydy = \frac{k}{2}\int_0^2 xdx \cdot y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} =$$

$$= \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{4}\int_0^2 x(4 - x^2)dx = \frac{k}{8}(2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = \frac{k}{2}.$$

8.6. Основные понятия тройного интеграла

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является так называемый «тройной интеграл».

Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла. Поэтому изложим ее в несколько сокращенном виде.

Пусть в замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $u = f(x;y;z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей $V_i\,(i=\overline{1,n})$ и выбрав в каждой из них произвольную точку $M_i(x_i,y_i;z_i)$,составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i$ для функции $f(x;y;z)$ по области V (здесь ΔV_i - объем элементарной области V_i).

Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая «элементарная область» V_i стягивается в точку (т. е. диаметр области d_i стремится к нулю, т. е. $d_i \to 0$), то его называют *тройным интегралом* от функции $u = f(x;y;z)$ по области V и обозначают $\iiint\limits_V f(x;y;z)\cdot dx\,dy\,dz$ (или $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv$).

Таким образом, по определению, имеем:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)\cdot dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max\, d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x;y;z)dv.$$ [16]

Теорема (существования). Если функция $u = f(x;y;z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области V, то предел интегральной суммы при $n\to\infty$ и $\max d_i \to 0$ существует и не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $M_i(x_i;y_i;z_i)$ в них.

Свойства тройного интеграла:

1. $\iiint\limits_V c\cdot f(x;y;z)dv = c\cdot\iiint\limits_V f(x;y;z)dv$,где c - const.

2. $\iiint\limits_V (f_1(x;y;z)\pm f_2(x;y;z))dv = \iiint\limits_V f_1(x;y;z)dv \pm \iiint\limits_V f_2(x;y;z))dv.$.

3. $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = \iiint\limits_{V_1} f(x;y;z)dv + \iiint\limits_{V_2} f(x;y;z)dv$, если $V = V_1\bigcup V_2$, а пересечение V_1 и V_2 состоит из границы, их разделяющей.

[16] Здесь $dv = dx\,dy\,dz$ — элемент объема.

4. $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv \geq 0$, если в области V функция $F(x;y;z) \geq 0$. Если в области интегрирования $f(x;y;z) \geq \varphi(x;y;z)$, то и $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv \geq \iiint\limits_V \varphi(x;y;z)dv$.

5. $\iiint\limits_V dV = V$, так как в случае $f(x;y;z)$ - 1 любая интегральная сумма имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$ и численно равна объему тела.

6. Оценка тройного интеграла: $m \cdot V \leq \iiint\limits_V f(x;y;z)dv \leq M \cdot V$, где m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x;y;z)$ в области V.

7. Теорема о среднем значении: если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области V, то в этой области существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что $\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = f(x_0;yo;z_0)V$, где V - объем тела.

8.7. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z=z_1(x;y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x;y)$, причем $z_1(x;y)$ и $z_2\{x;y)$ $(z_1\{x;y) \leq z_2(x;y))$ - непрерывные функции в замкнутой области D, являющейся проекцией тела на плоскость Oxy (Рис. 36). Будем считать область V – *правильной в направлении оси Oz:* любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области не более чем в двух точках. Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x;y;z)$ имеет место формула

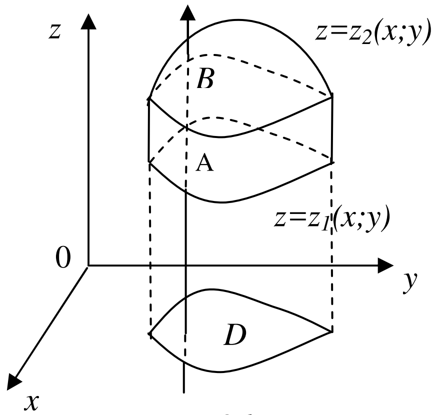


Рис. 36

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz\right)ds$$ сводящая вычисление тройного интеграла к вычислению двойного интеграла.

Замечание:

1. если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее следует разбить на конечное число таких областей (правильных), к которым можно применить формулу.
2. порядок интегрирования в формуле, при определенных условиях, может быть иным.

Пример 4. Вычислить $\iiint\limits_V (x\ +\ z)dxdydz,$ где V ограничена плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 1,\ x + y + z = 2$ (Рис. 36).

Решение. Область V является правильной в направлении оси Oz (как, заметим, и в направлении осей Ox и Oy). Ее проекция на плоскость Oxy является правильной в направлении оси Oy (и оси Ox).

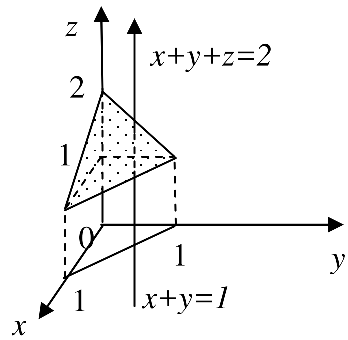


Рис. 36

$$\iiint\limits_V (x+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_1^{2-x-y}(x+z)dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\left(xz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_1^{2-x-y} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(2x - x^2 - xy - x + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\left(xy - x^2y - \frac{xy^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{y}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1\left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{2}{3}\cdot x - \frac{(2-x)^4}{24}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{2}{3} - \frac{1}{24} + \frac{16}{24} = \frac{1}{4}.$$

Некоторые приложения тройного интеграла

Объем тела

Объем области V выражается формулой $V = \iiint\limits_V dv$ или $V = \iiint\limits_V dxdydz$ - в декартовых координатах

Масса тела

Масса тела m при заданной объемной плотности γ вычисляется с помощью тройного интеграла как $m = \iiint\limits_V \gamma(x;y;z)dxdydz$, где $\gamma(x;y;z)$ — объемная плотность распределения массы в точке *M(x; y;z).*

§9. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

9.1. Понятие криволинейного интеграла первого рода

Пусть на плоскости *Oxy* задана непрерывная кривая *AB* (или *L)* длины l. Рассмотрим непрерывную функцию *f(x;y),* определенную в точках дуги *AB*. Разобьем кривую *AB* точками $M_0 = A$, $M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ на n произвольных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i (i = 1,2,... ,n)(Рис. 37). Выберем на каждой дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку $(\hat{x}_i; \hat{y}_i)$ и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i;\hat{y}_i)\Delta l_i$

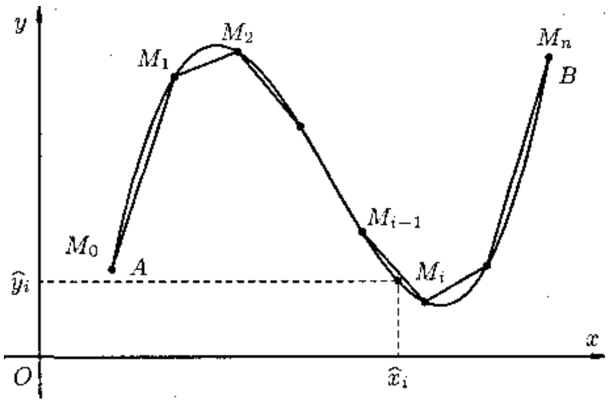


Рис. 37

Ее называют *интегральной суммой* для *функции f(x;y) по кривой AB*.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$ наибольшая из длин дуг деления. Если при $\lambda \to 0$ (тогда $n \to \infty$) существует конечный предел интегральных сумм, то его называют *криволинейным интегралом от функции f(x;y) по длине кривой AB* (или I рода) и обозначают $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ (или $\int\limits_{L} f(x;y)dl$).

Таким образом, по определению, $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i;\hat{y}_i)\Delta l_i.$

Свойства криволинейного интеграла I рода:

1. $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl$ т.е. криволинейный интеграл I рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. $\int\limits_L c \cdot f(x;y)dl = c \cdot \int\limits_L f(x;y)dl,$ где с -const

3. $\int\limits_L (f_1(x;y) \pm f_2(x;y))dl = \int\limits_L f_1(x;y)dl \pm \int\limits_L f_2(x;y)dl.$

4. $\int\limits_L f(x;y)dl = \int\limits_{L_1} f(x;y)dl + \int\limits_{L_2} f(x;y)dl,$ если путь интегрирования *L* разбит на части L_1 и L_2 такие, что $L = L_1 \cup L_2$ и L_1 и L_2 имеют единственную общую точку.

6. $\int\limits_{AB} dl = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i = l$, где l - длина кривой *AB*.

9.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Вычисление криволинейного интеграла I рода может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Если кривая *AB* задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции параметра *t,* причем точке *A* соответствует $t = \alpha$, точке *B* – значение $t = \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{\left(x_t^{/}\right)^2 + \left(y_t^{/}\right)^2}\, dt.$$

Аналогичная формула имеет место для криволинейного интеграла от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой *AB,* задаваемой уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d(x(t);y(t);z(t)) \cdot \sqrt{\left(x_t^{/}\right)^2 + \left(y_t^{/}\right)^2 + \left(z_t^{/}\right)^2}\, dt.$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая *AB* задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где $\varphi(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, то $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x;\varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + \left(y_x^{/}\right)^2}\, dx.$

Пример 1. Вычислить $\int\limits_L xy^2 dl$, где *L* - отрезок прямой между точками O(0; 0) и A(4;3).

Решение. Уравнение прямой *OA* есть $y = \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4 \Rightarrow$

$$\int_L xy^2 dl = \int_0^4 x\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{45}{64}\int_0^4 x^3 dx = 45.$$

Полярное представление кривой интегрирования

Если плоская кривая L задана уравнением $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$ в полярных координатах, то $dl = \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2}\,d\varphi$ и

$$\int_L f(x;y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\,d\varphi.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L (x+y)dl$, где L - лепесток лемнискаты $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в I координатном углу.

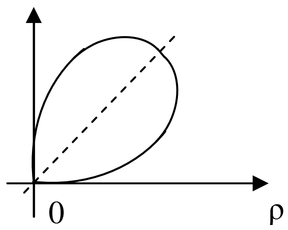


Рис. 38

Решение. Кривая интегрирования изображена на рисунке 38.

Так как $dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r}$, при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\int_L (x+y)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi + r\sin\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi = 2.$$

9.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла I рода

Длина кривой

Длина l кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле $l = \int_{AB} dl$

Масса кривой

Масса материальной кривой AB (провод, цепь, трос, ...) определяется формулой $m = \int_{AB} \gamma(x;y)dl.$ где $\gamma = \gamma(M) = \gamma(x;y)$ плотность кривой в точке M.

9.4. Основные понятия криволинейного интеграла второго рода

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB (или L) и функция $P(x;y)$, определенная в каждой точке кривой. Разобьем кривую AB точками M_0 =

A, $M_1, \ldots, M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\Delta l_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$.

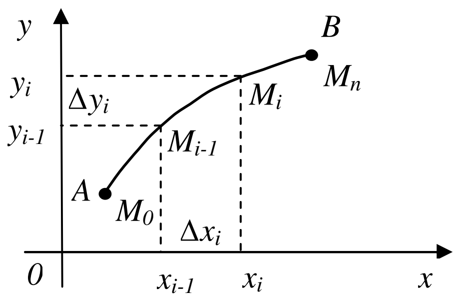


Рис. 39

На каждой «элементарной дуге» $M_{i-1}M_i$ возьмем точку $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ и составим сумму вида $\sum_{i=1}^{n} P(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i) \cdot \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Ox (Рис. 39). Сумму называют *интегральной суммой функции P(x;y) по переменной x.* Таких сумм можно составить бесчисленное множество. Если при $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta l_i \to 0$ имеет конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения кривой AB, ни от выбора точек $(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)$ то его называют *криволинейным интегралом по координате x* (или II рода) *от функции P(x;y) по кривой AB* и обозначают $\int_{AB} P(x; y)\, dx$ или $\int_{L} P(x;y)dx$.

Аналогично вводится криволинейный интеграл от функции $Q(x;y)$ по координате y: $\int_{AB} Q(x; y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} q(\widehat{x}_i; \widehat{y}_i)\Delta y_i$, где Δy_i — проекция дуги $M_{i-1}M_i$,- на ось Оу.

Криволинейный интеграл II рода общего вида $\int_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ определяется равенством $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} P(x; y)dx + \int_{AB} Q(x; y)dx$.

Криволинейный интеграл $\int_{L} Q(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ по пространственной кривой L определяется аналогично.

Теорема. Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывные на кривой AB, то криволинейный интеграл II рода существует.

Свойства криволинейного интеграла II рода.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II рода изменяет свой знак на противоположный, т. е. $\int_{AB} = -\int_{BA}$ (проекция дуги $M_{i-1}M_i$ на оси Ox и Oy меняют знаки с изменением направления) .
2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т. е. $\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$.

3. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_L P(x;y)dx = 0$ (все $\Delta x_i = 0$); аналогично для кривой, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oy: $\int\limits_L Q(x;y) = 0$ (все $\Delta y_i = 0$).

4. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки (зависит только от направления обхода кривой).

9.5. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Вычисление криволинейного интеграла II рода, как и I рода, может быть сведено к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, тогда

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \begin{vmatrix} x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt \\ y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\big)dt$$

Явное представление кривой интегрирования

Если кривая AB задана уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in [a;b]$, где функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \begin{vmatrix} y = \varphi(x) \\ dy = \varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int\limits_a^b [P(x;\varphi(x)) + Q(x;\varphi(x))\varphi'(x)]dx.$$

Если AB - гладкая пространственная кривая, которая описывается непрерывными на отрезке $[\alpha;\beta]$ функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, то криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \begin{vmatrix} x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt \\ y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)dt \\ z = z(t) \Rightarrow dz = z'(t)dt \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t);y(t);z(t))x'(t) + Q(x(t);y(t);z(t))y'(t) + R(x(t);y(t);z(t))z'(t)]dt$$

Пример 3. Вычислить $I = \int\limits_L y^2 dx + \left(x^2 + z\right)dy + \left(x + y + z^2\right)dz$, где L - отрезок прямой в пространстве от точки $A(1;\ 0;\ 2)$ до точки $B(3;\ 1;\ 4)$.

Решение. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и B: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ и запишем в параметрической форме $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = t, \\ z = 2t+2 \end{cases}$. При перемещении от точки A к точке B параметр t меняется от 0 до 1.

$$\int\limits_0^1 \left[2t^2 + ((2t+1)^2 + 2t + 2) + (2t + 1 + t + (2t+2)^2) \cdot 2\right]dt = \int\limits_0^1 \left(14t^2 + 28t + 13\right)dt = \frac{95}{3}$$

9.6. Некоторые приложения криволинейного интеграла II рода

Площадь плоской фигуры

Площадь плоской фигуры, расположенной в плоскости Oxy и ограниченной замкнутой линией L, можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$, при этом кривая L обходится против часовой стрелки.

Работа переменной силы

Переменная сила $F(P(x;y);Q(x;y))$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле $A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

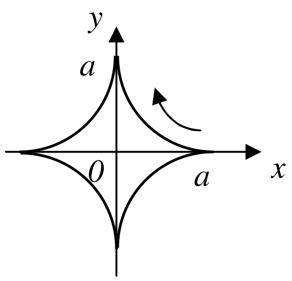


Рис. 40

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$.

Решение.

При обхождении астроиды в положительном направлении параметр t изменяется от 0 до 2π (Рис.40).

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3a^2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2t}{4}\,dt = \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3a^2\pi}{8} \text{ (кв. ед).}$$

Пример 4. Найти работу силы $\overline{F} = 4x^6\bar{i} + xy\bar{j}$ вдоль кривой $y = x^3$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

Решение. $A = \int\limits_L 4x^6dx + xydy = \int\limits_0^1 \left(4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2\right)dx = \int\limits_0^1 7x^6dx = 1.$

9.7. Формула Остроградского-Грина

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе L этой области устанавливает формула Остроградского-Грина, которая широко применяется в математическом анализе.

Теорема. Если функции $P(x;\ y)$ и $Q(x;\ y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$ [17], где L - граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Пример 5. С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить $I = \oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dx + y \cdot (xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))dy,$ где L - контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

Решение.

На рисунке 41 изображен контур интегрирования. Поскольку

$\frac{\partial Q}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{y \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right); \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ по формуле Остроградского-Грина имеем

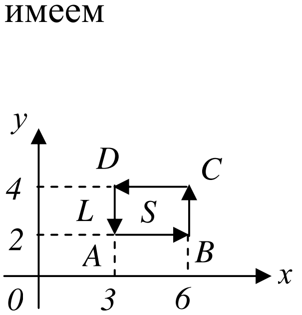


Рис. 41

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{y(\sqrt{x^2 + y^2} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D y^2dxdy = \int\limits_3^6 dx \int\limits_2^4 y^2dy = 56.$$

[17] $\oint\limits_L$ - криволинейный интеграл по замкнутому контуру.

9.8. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Теорема. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной области *D*, в которой функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Следствие 1. Если выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т. е. $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = dU(x;y)$ (функцию $U(x;y)$ можно найти по формуле $U(x;y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x;y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0;y)dy + C.$).[18].

Следствие 2. Если подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ есть полный дифференциал и путь интегрирования *L* замкнутый, то $\oint\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$.

Пример 6. Найти $I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy.$

Решение. Здесь $P = y$, $Q = x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$.

Согласно вышеприведенной теореме, интеграл не зависит от пути интегрирования. В качестве пути интегрирования можно взять, например отрезок прямой $y = x$, тогда $dy = dx$ при $0 < x < 1$.

$$I = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy = \int\limits_0^1 xdx + xdx = 2\int\limits_0^1 xdx = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1.$$

Пример 7. Убедиться, что выражение $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$ и найти ее.

---

[18] Точку $(x_0; y_0)$ выбирают произвольным образом, при условии, что она удовлетворяет области допустимых значений функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$.

Решение. Здесь $P=e^{-y}$, $Q=-\left(2y+xe^{-y}\right)$. Найдем частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y})=-e^{-y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(2y+xe^{-y}\right)\right)=-e^{-y}$. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$ данное выражение представляет собой полный дифференциал. Найдем *U*(*x;y*) по формуле

$$U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x;y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0;y)dy+C=\int\limits_{0}^{x}e^{-y}dx+\int\limits_{0}^{y}-2ydy+C=$$

$$=e^{-y}x\Big|_0^x-2\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^y+C=xe^{-y}-y^2+C.$$

§10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

10.1. Основные понятия теории поля

Полем называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если для каждой точке M этой области соответствует определенное число U=U(M), говоря, что в области определено *скалярное поле* (функция точки). Если же каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор $\overline{a}=\overline{a}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле* (векторная функция точки).

Например. Скалярное поле - поле температуры (воздуха, тела,…), атмосферное давление, плотность (массы, воздуха,…), электрический потенциал и т.д.. Векторное поле - поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического тока и т.д.

Если функция U(M) ($\overline{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется *стационарным*[19] (установившимся); поле, которое меняется с течением времени, называется *нестационарным* (неустановившимся).

Если V – область трехмерного пространства, то:
- скалярное поле задается как функция трех переменных *x*, *y*, *z*: $U=U(x;y;z)$;
- векторное поле задается как векторная функция трех переменных *x*, *y*, *z*: $\overline{a}=\overline{a}(x;y;z)$ или $\overline{a}=P(x;y;z)\overline{i}+Q(x;y;z)\overline{j}+R(x;y;z)\overline{k}$, где $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$- проекции вектора на оси координат.

Если V – область двухмерного пространства, то:
- скалярное поле задается как функция двух переменных *x*, *y*: $U=U(x;y)$ и называется плоским;

[19] Далее будут рассмотрены только стационарные поля.

- векторное поле задается как векторная двух переменных x, y: $\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j}$ и называется плоским.

Векторное поле называется однородным, если $\bar{a} = \bar{a}(M)$ - постоянный вектор, т.е. P, Q, R – постоянные величины.

10.2. Характеристики скалярного поля: производная в данном направлении, градиент функции

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U = U(x;y;z)$ принимает постоянное значение, т.е. $U(x;y;z) = c$.

Замечание. Если в уравнении давать величине c различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расслаивают поле.

В случае плоского поля $U = U(x;y)$ равенство $c = U(x;y)$ представляет собой уравнение линии уровня поля, т.е. линия уровня – это линия на плоскости Oxy, в точках которой функция $U(x;y)$ сохраняет постоянное значение.

Пусть задано скалярное поле $U = U(x;y;z)$. Возьмем в этом пространстве точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\bar{\lambda}$. Пусть вектор $\bar{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$.

Приращение функции U, возникающее при переходе от точки M к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\bar{\lambda}$ определяется как $\Delta U = U(M_1) - U(M)$. Тогда $\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Производной от функции $U = U(M)$ в точке M по *направлению* $\bar{\lambda}$ называется предел $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim\limits_{\Delta\lambda \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta \lambda}$.

Формула вычисления: если функция U дифференцируема, то её производная $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}$ по любому направлению $\vec{\lambda}$ существует и равна $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\cos(\alpha) + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cos(\beta) + \dfrac{\partial U}{\partial z}\cos(\gamma)$.

Замечание. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\bar{\lambda}$, если $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении

$\bar{\lambda}$ убывает. При этом, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\bar{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U.

Пример 1. Дана функция $u = xyz$. Найти её производную в точке $M(5,1,2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $K(7,-1,3)$.

Решение. Найдём частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy$ и вычислим их значения в точке M: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 10,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 5$.

Так как $\overline{MK}$ (2, -2, 1), то его направляющими косинусами будут $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$, $\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 2 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{11}{3}$ (знак минус указывает, что в данном направлении функция убывает).

Градиентом функции U называется вектор, проекциями которого служат значения частных производных этой функции, т.е. $grad(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$.

Замечание. Градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля U в какой - либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

Наибольшая скорость изменения функции U в точке M равна $|grad(U)| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$.

Свойства градиента функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.
2. $grad(U+V) = grad(U) + grad(V)$.
3. $grad(cU) = c \cdot grad(U),\ c = const$.
4. $grad(U \cdot V) = U \cdot grad(V) + V \cdot grad(U)$.
5. $grad\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot grad(U) - U \cdot grad(V)}{V^2}$.

6. $grad(F(U)) = \frac{\partial f}{\partial U} grad(U)$.

Пример 2. Найти величину и направление градиента функции $u = tgx - x + 3\sin y - 3\sin^3 y + z + ctgz$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Найдём частные производные

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cdot \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{1}{\sin^2 z}$

и вычислим их значения в точке $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2 - 1 = 1,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8},\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно, $(gradu)_M = \vec{i} + \frac{3}{8}\vec{j}$;

$$|gradu| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8};\ \cos\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{73}};\ \cos\beta = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{73}}.$$

10.3. Характеристики векторного поля: поток поля, дивергенция, циркуляция потока, ротор. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса

Векторной линией поля $\bar{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке М имеет направление соответствующего ей вектора $\bar{a}(M)$.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется *векторной трубкой*.

Векторная линия поля $\bar{a} = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}$ описывается системой дифференциальных уравнений вида $\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}$.

Потоком векторного поля $\bar{a}$ *через поверхность S* называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности, т.е. $K = \iint\limits_S \bar{a}\,\bar{n}\,ds = \iint\limits_S a_n ds$.

Если учесть, что $\bar{n} = (\cos(\alpha);\cos(\beta);\cos(\gamma))$, $\bar{a} = (P;Q;R)$, где $P = P(x;y;z)$, $Q = Q(x;y;z)$, $R = R(x;y;z)$ - проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие координатные оси, то поток вектора $\overline{a}$, можно записать в виде $K = \iint\limits_S (P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma))\,ds$.

Если использовать взаимосвязь поверхностных интегралов I и II рода, поток вектора можно записать как $K = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$.

Замечание:

1. поток *K* вектора $\overline{a}$ есть скалярная величина. Величина *K* равна объему жидкости, которая протекает через поверхность *S* за единицу времени;
2. если поверхность замкнута и ограничивает некоторый объем *V*. Тогда поток вектора записывается в виде $K = \oiint\limits_S \overline{a}\,\overline{n}\,ds$.

Физический смысл. Если векторное поле $\overline{a}$ есть поле скоростей текущей жидкости, то величина потока К через замкнутую поверхность дает разность между количеством жидкости, вытекающей из области *V* и втекающей в нее за единицу времени. При этом если *K*>0, то из области *V* вытекает больше жидкости, чем в нее втекает – это означает, что внутри области имеются дополнительные источники. Если *K*<0, то внутри области *V* имеются стоки, поглощающие избыток жидкости. Если *K*=0, то из области *V* вытекает столько же жидкости, сколько в нее втекает в единицу времени; внутри области либо нет ни источников, ни стоков, либо они таковы, что их действие взаимно компенсируется (источники – точки, откуда векторные линии начинаются, а стоки – точки, где векторные линии кончаются).

Дивергенцией (*расходимостью*) векторного поля $\overline{a} = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$ в точке *M* называется скаляр $div\,\overline{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Физический смысл. Если $div\,\overline{a}(M) > 0$ точка *M* представляет собой источник, откуда жидкость вытекает. Если $div\,\overline{a}(M) < 0$ точка *M* есть сток, поглощающий жидкость.

Свойства дивергенции.

1. Если $\overline{a}$ - постоянный вектор, то $div\,\overline{a} = 0$.
2. $div\,(c \cdot \overline{a}) = c \cdot div\,\overline{a}$, где $c = const$.
3. $div\,(\overline{a} + \overline{b}) = div\,\overline{a} + div\,\overline{b}$.
4. Если *U* – скалярная функция, $\overline{a}$ - вектор, то $div\,(U \cdot \overline{a}) = U \cdot div\,\overline{a} + \overline{a} \cdot grad\,U$.

Следствие. Используя понятия потока и дивергенции векторного поля получаем формулу $\oiint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$. Это формула называется формулой Остроградского-Гаусса, означает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность S (в направлении внешней нормали, т.е. изнутри) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному данной поверхностью.

Дивергенцией векторного поля в точке М называется предел отношения потока поля через (замкнутую) поверхность S, окружающую точку М, к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку М, т.е. .

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция поля равна нулю, называется *соленоидальным* (*трубчатым*).

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\overline{dr}$, касательный к контуру L, называется *циркуляцией вектора* $\bar{a}$ *вдоль L*, т.е. $C = \oint\limits_L \bar{a}\,\overline{dr} = \oint\limits_L a_r dl = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Физический смысл: если кривая L расположена в силовом поле, то циркуляция – это работа силы $\bar{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль L.

Пример 2. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

Решение.

$$K = \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint\limits_S (y - x)dydz + (x + y)dxdz + ydxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (y + y + z - 1)dz + \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} (x + 1 - z - x)dx + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} ydy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z \right] \Bigg|_0^{1-y} + \int\limits_0^1 [x - zx] \Bigg|_0^{1-z} + \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{1-x} =$$

$$=\int_0^1\left[2y-2y^2+\frac{1}{2}-y+\frac{y^2}{2}-1+y\right]dy+\int_0^1\left[1-z-z+z^2\right]dz+\int_0^1\left[\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{3y^2}{2}+2y-\frac{1}{2}\right]dy+\left[z-z^2+\frac{z^3}{3}\right]\Big|_0^1+\left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1=$$

$$=\left[-\frac{y^3}{2}+y^2-\frac{y}{2}\right]\Big|_0^1+1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}+1+\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

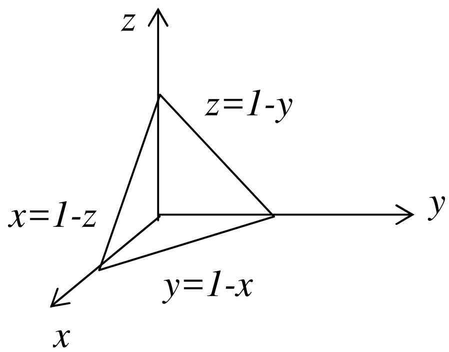


Рис. 42

Ротором (*вихрем*) *векторного поля* $\bar{a}=P(x;y;z)\bar{i}+Q(x;y;z)\bar{j}+R(x;y;z)\bar{k}$ называется вектор $rot\,\bar{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$ или

$$rot\,\bar{a}(M)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Свойства ротора.

1. Если $\bar{a}$ - постоянный вектор, то $rot\,\bar{a}=0$.
2. $rot(c\cdot\bar{a})=c\cdot rot\,\bar{a}$, где $c=const$.
3. $rot(\bar{a}+\bar{b})=rot\,\bar{a}+rot\,\bar{b}$.
4. Если U – скалярная функция, а $\bar{a}(M)$ - векторная, то $rot(U\cdot\bar{a})=U\cdot rot\,\bar{a}+gradU\times\bar{a}$.

Следствие. Используя понятия ротора и циркуляции, векторного поля, получаем формулу Стокса:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dx\,dz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Ротором вектора $\bar{a}$ *в точке M* называется вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции вектора $\bar{a}$ по контуру L плоской площадки S, перпендикулярной этому направлению, к площади этой площадки, т.е. $rot_n \bar{a}(M) = \lim\limits_{S\to 0} \frac{1}{S}\oint\limits_L a_r dl$.

Замечание. Из определения ротора следует, что направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение (плотность) по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к площадке *S*.

Пример 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (x-2z)\bar{i} + (x+3y+z)\bar{j} + (5x+y)\bar{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

Решение. Согласно формуле, имеем:

$$C = \oint\limits_L (x-2z)dx + (x+3y+z)dy + (5x+y)dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

На отрезке АВ: $x + y = 1,\ z = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_1^0 (x-0)dx + (x+3-3x+0)\cdot(-dx) + 0 = \frac{3}{2}.$$

На отрезке ВС: $y + z = 1,\ x = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{BC} = \int\limits_1^0 (0-2+2y)\cdot 0 + (0+3y+1-y)dy + (0+y)\cdot(-dy) = -\frac{3}{2}.$$

На отрезке СА: $x + z = 1,\ y = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{CA} = \int\limits_0^1 (x-2+2x)dx + 0 - 1\cdot(5x+0)\cdot(-dx) = -3.$$

Следовательно, $C = \oint\limits_{ABCA} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3$.

10.4. Оператор Гамильтона

Векторными операциями первого порядка называются действия нахождения градиента, дивергенции и ротора.

Эти операции записывают с помощью оператора Гамильтона $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

Замечание. Оператор ∇ («набла») приобретает смысл только в комбинации со скалярными или векторными функциями.

Используя, оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции первого порядка:
1. $\nabla U = grad\,U$.
2. $\nabla \overline{a} = div\,\overline{a}$.
3. $\nabla \times \overline{a} = rot\,\overline{a}$.

Дифференциальными операциями второго порядка называются операции вида: $div(grad\,U)$, $rot(grad\,U)$, $grad(div\,\overline{a})$, $div(rot\,\overline{a})$, $rot(rot\,\overline{a})$.

Применяя, оператор Гамильтона, получим дифференциальные операции второго порядка:
1. $div(grad\,U) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Правая часть этого равенства называется оператором Лапласа и обозначается $\Delta U = 0$. Решением уравнения Лапласа ($\Delta U = 0$) являются *гармонические функции.*
2. $rot(grad\,U) = 0$, так как векторное произведение двух одинаковых векторов равна нулю. Это означает, что поле градиента есть поле *безвихревое*.
3. $grad(div\,\overline{a}) = \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\overline{i} + \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\overline{j} + \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\overline{k}$.
4. $div(rot\,\overline{a}) = 0$, так как смешенное произведение трех векторов, из которых два одинаковые, равно нулю. Это означает, что поле вихря – *соленоидальное*.
5. $rot(rot\,\overline{a}) = grad(div\,\overline{a}) - \Delta \overline{a}$.

10.5. Некоторые свойства основных классов векторных полей

Векторное поле $\overline{a}$ называется *соленоидальным*, если во всех точках его дивергенция поля равна нулю, т.е. $div\,\overline{a} = 0$.

Примеры *соленоидального поля*: поле линейных скоростей вращающегося твердого тела; магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток, и другие.

Свойства соленоидального поля.
1. В соленоидальном поле $\overline{a}$ поток вектора через любую замкнутую поверхность равна нулю. Таким образом, соленоидальное поле не имеет ни источников и стоков.
2. Соленоидальное поле является полем ротора некоторого векторного поля, т.е. если $div\,\overline{a} = 0$, то существует такое поле $\overline{b}$, что $\overline{a} = rot\,\overline{b}$. Вектор $\overline{b}$ называется *векторным потенциалом поля* $\overline{a}$.
3. В соленоидальном поле $\overline{a}$ поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое интенсивностью трубки).

Векторное поле $\overline{a}$ называется *потенциальным* (*безвихревым, градиентным*), если во всех точках поля ротор равен нулю, т.е. $rot\,\overline{a} = 0$.

Пример *потенциального поля***:** электрическое поле напряженности точечного заряда и другие.

Свойства потенциального поля.

1. Циркуляция потенциального поля $\overline{a}$ по любому замкнутому контуру в этом поле равна нулю.
2. В потенциальном поле $\overline{a}$ криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$ вдоль любой кривой L с началом в точке M_1 и концом в точке M_2 зависит только от положения точек M_1 и M_2 и не зависит от формы кривой.
3. Потенциальное поле является полем градиента некоторой скалярной функции $U(x;y;z)$, т.е. если $rot\,\overline{a} = 0$, то существует функция $U(x;y;z)$ такая, что $\overline{a} = grad\,U$.

Векторное поле $\overline{a}$ называется *гармоническим* (*лапласовым)*, если оно одновременно является потенциальным и соленоидальным, т.е. если $rot\,\overline{a} = 0$ и $div\,\overline{a} = 0$.

Пример *гармонического поля*: поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Пример 3. Определить является ли векторное поле потенциалом $\vec{F} = (5x + 6yz;\quad 5y + 6xz;\quad 5z + 6xy)$.

Решение. $P = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 5x + 6yz;\quad Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 5y + 6xz;\quad R = \dfrac{\partial u}{\partial z} = 5z + 6xy;$

Если поле потенциально, то должны выполняться следующие условия:

1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x};\quad 6z = 6z;$

2) $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y};\quad 6x = 6x;$

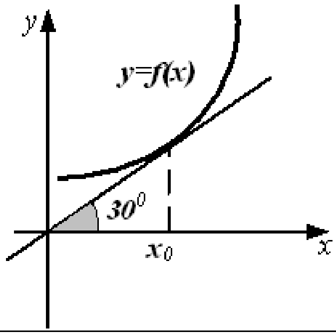
3) $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x};\quad 6y = 6y.$

Эти условия эквивалентны условию равенства нулю ротора векторного поля, справедливость этого утверждения видна из формулы ротора. Таким образом, поле потенциальное.

ТЕСТ 1

Введение в математический анализ			
Задание 1. Число 2,5 принадлежит множеству . . .			
1) $B=\{b\,\vert\, b\in Z,-2\le b<3\}$		2) $C=\{c\,\vert\, c\in R,-3\le c<2{,}6\}$	
3) $D=\{d\,\vert\, d\in Q,\, d<2\}$		4) $A=\{a\,\vert\, a\in N,1\le a<10\}$	
Задание 2. Образом отрезка [0; 1] при отображении $f=3x+2$ является …			
1) (2; 5)	2) [2; 5]	3) [0; 3]	4) [2; 3]
Задание 3. На числовой прямой дана точка x=5,1. Тогда её «ε-окрестностью» может являться интервал . . .			
1) (5,1; 5,4)	2) (4,9; 5,5)	3) (4,9; 5,3)	4) (4,8; 5,1)
Задание 4. Найти наименьший положительный период функции $y=\sin(2x)+\cos(3x)$.			
1) 2π	2) π	3) 3π	4) 5π
Задание 5. Даны функции $y_1=\sin(3x)$, $y_2=\dfrac{3}{x^2-1}$, $y_3=xe^x$, $y_4=\dfrac{\cos x}{x^3}$. Укажите нечётные функции.			
1) $y_1,\, y_3,\, y_4$	2) y_1, y_2, y_3, y_4	3) y_2	4) y_1, y_4
Задание 6. Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x)=x+(x-9)\cdot f(x-9)+9$ вычислите сумму $g(8)+g(9)+g(10)$.			
1) 54	2) 25	3) 9	4) 69
Задание 7. Значение предела $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+7}{6x-15x^2}$ равно . . .			
1) 0,5	2) -0,5	3) 0,2	4) -0,2
Задание 8. Значение предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin(4x))^{\frac{2}{x}}$ равно . . .			
1) e^8	2) 1	3) 0	4) e^2
Задание 9. Дана функция $\dfrac{x^2\cdot\arcsin(\sqrt{x})}{arctg^{3/2}(2x)}$. Найдите функцию эквивалентной данной при $x\to 0$.			
1) $2^{-\frac{3}{2}}\cdot x$	2) $\dfrac{2}{x}$	3) $\dfrac{\sqrt{x}}{2}$	4) $2x$
Задание 10. Установить характер разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$ в точке $x_0=-4$.			
1) функция непрерывна	2) разрыв второго рода (бесконечный)	3) разрыв первого рода, устранимый	4) разрыв первого рода, точка совершает скачок на 4 единицы

ТЕСТ 2

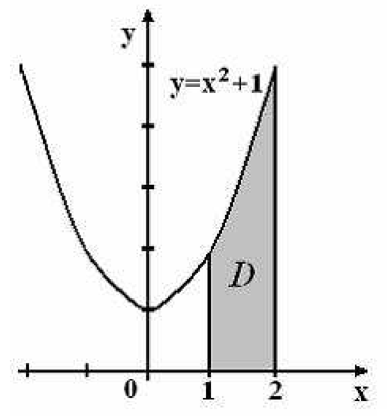
Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменной			
Задание 1. Производная функции $y = \ln\left(tg\dfrac{x}{2}\right)$ равна . . .			
1) $y' = \dfrac{1}{tg\dfrac{x}{2}}$	2) $y' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$	3) $y' = \dfrac{1}{\sin x}$	4) $y' = tg\dfrac{x}{2}$
Задание 2. Длина промежутка возрастания функции $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$ равна . . .			
1) 1	2) 3	3) 2	4) 4
Задание 3. Наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+68}{\sqrt{x+7}}$ на отрезке [-3; 9] равна . . .			
1) 12	2) 24	3) -7	4) -112
Задание 4. Используя правило Лопиталя вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{\sin x}$.			
1) ∞	2) -1	3) 0	4) 1
Задание 5. Вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x+3}{6x+2}$ является прямая, определяемая уравнением . . .			
1) $x = -\dfrac{1}{3}$	2) $x = \dfrac{1}{3}$	3) $x = 3$	4) $x = -3$
Задание 6. График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке. Тогда значение производной этой функции в точке x_0 равно . . .			1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $-\sqrt{3}$ 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
Задание 7. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 12t^3 + 2t + 4$, где $x(t)$ - координата точки в момент времени *t*. Тогда ускорение точки при *t*=1 равно			
1) 38	2) 71	3) 72	4) 12
Задание 8. Значение функции $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$ равно . . .			
1) -3	2)3	3) 1	4) -4

Задание 9. Вычислить приближённо значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.			
1) 27,38	2) 28,64	3) 30,88	4) 28,76
Задание 10. Дана функция $f(x;y)=\dfrac{(x+y)^2}{2xy}$. Значение $f(0;y)$ равно . . .			
1) y^2	2) y	3) не существует	4) 0
Задание 11. Даны функции $f(x;y)=x^2+y^2$ и $g(x;y)=x^2-y^2$. Тогда значение функции $f\left(g(x;y);y^2\right)$ равно . . .			
1) $x^4-2x^2y^2+2y^4$	2) x^4+2y^4	3) $x^4+2x^2y^2+2y^4$	4) $-2x^2y^2$
Задание 12. Значение предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)}$ равно . . .			
1) $\dfrac{2}{3}$	2) $\dfrac{1}{3}$	3) не существует	4) 0
Задание 13. Частная производная функции $z=x^4\cos y$ по переменной y в точке $M\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна . . .			
1) 4	2) 0	3) 1	4) -1
Задание 14. Полное приращение функции $z=3x^2+xy-y^2+1$ в точке $M_0(2;1)$ при $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$ равно . . .			
1) 0,13	2) 2,2	3) 1,3	4) -1,3
Задание 15. Приближённое значение выражения $1{,}07^{3{,}97}$ равно …			
1) 1,28	2) 1,37	3) 1,82	4) 1,33
Задание 16. Производная функции $y-\sin y=x$ равна …			
1) $1-\cos y$	2) $\dfrac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$	3) $\dfrac{1}{2}\sec^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$	4) $1-\sin y$
Задание 17. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функции $z=x^3-xy^2+x+y+y^4$ равна . . .			
1) $-xy^2$	2) 0	3) x^3+x-2y	4) $-2y$
Задание 18. Минимум функции $z=x^2+y^2$ при условии $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ равен . . .			
1) $\dfrac{6}{13}$	2) $\dfrac{36}{13}$	3) $\dfrac{13}{36}$	4) 0

ТЕСТ 3

Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных			
Задание 1. Множество первообразных функции $f(x)=e^{1-4x}$ имеет вид …			
1) $\frac{1}{4}e^{1-4x}$+C	2) $-\frac{1}{4}e^{1-4x}$+C	3) $4e^{1-4x}$+C	4) $-4e^{1-4x}$+C
Задание 2. Правильную рациональную дробь $\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей . . .			
1) $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$	2) $\frac{A+Bx}{x+1}+\frac{C}{x^2+x+1}$	3) $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2+x+1}$	4) $\frac{Ax}{x+1}-\frac{B}{x^2+x+1}$
Задание 3. Дан интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. Тогда замена интеграла $\sqrt{3x+1}=t$ приводится к виду . . .			
1) $\frac{2}{9}\int\left(t^2-1\right)dt$	2) $\frac{2}{9}\int\frac{\left(t^2-1\right)}{t}dt$	3) $\frac{2}{3}\int\left(t^2-1\right)dt$	4) $\frac{1}{3}\int\frac{\left(t^2-1\right)}{t}dt$
Задание 4. Если $\int_0^1 f(x)dx=\sqrt{2}-2$, $\int_0^1 g(x)dx=\sqrt{2}+1$, чему равен интеграл $\int_0^1\left(\sqrt{2}f(x)+\left(\sqrt{2}+1\right)g(x)\right)dx$?			
1) 0	2) $2\sqrt{2}$	3) 4	4) 5
Задание 5. $\int_0^1\left(e^x-1\right)e^x dx$ равно . . .			
1) $-0{,}5(e-1)^2$	2) $0{,}5(e-1)^2$	3) $-\frac{1}{4}(e-1)^3$	4) $e(e-1)$
Задание 6. Ненулевая функция $y=f(x)$ является нечётной на отрезке $[-2;2]$. Тогда $\int_{-2}^{2}f(x)dx$ равен . . .			
1) $2\int_0^2 f(x)dx$	2) $4\int_0^1 f(x)dx$	3) 0	4) $\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)dx$

Задание 7. Площадь криволинейной трапеции D равна . . .



1) $\frac{8}{3}$	2) $\frac{14}{3}$	3) $\frac{7}{3}$	4) $\frac{10}{3}$

Задание 8. Значение несобственного интеграла $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{2}{x-3}dx$ равно . . .

1) ∞	2) 0	3) не существует	4) $2\ln 2$

Задание 9. Вычисление длины дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0;4]$ сводится к интегралу …

1) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$	2) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{1+x^3}dx$	3) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{1+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}dx$	4) $\int\limits_{0}^{4} x^{\frac{3}{2}}dx$

Задание 10. Пусть. $S = \int\limits_{-4}^{2} dy \int\limits_{-6}^{0} f(x,y)dx$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид

1) окружности с $R=\sqrt{6}$	2) квадрата	3) прямоугольника	4) треугольника

Задание 11. Значение интеграла $\int\limits_{L} (x^2 + y^2)dl$, при L: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ где $0 \le t \le 2\pi$ равно . . .

1) 2π	2) 0	3) π	4) 4π

Задание 12. Значение интеграла $\int\limits_{AB} (x+2y)dl$, при AB: $y = 2x$ от $A(0;\ 0)$ до $B(1;2)$ равно . . .

1) $5\sqrt{5}$	2) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$	3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$	4) $\frac{5}{2}$

ТЕСТ 4

Элементы теории поля				
Задание 1. Производная функции $z = x^2 - y^2$ в точке M(1; 1) в направлении вектора $\vec{a}$, составляющем угол $\alpha = 60^0$ с положительным направлением оси Ox приблизительно равна . . .				
1) -2	2) 0,7	3) -0,7	4) 2	
Задание 2. Наибольшая скорость возрастания функции $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}$ в точке A(-1; 1; -1) равна . . .				
1) $2\sqrt{2}$	2) 2	3) $\sqrt{2}$	4) 0	
Задание 3. Дивергенция векторного поля $\vec{F} = xy^2 \cdot \vec{i} - yz \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k}$ равна . . .				
1) $y^2 + z$	2) y^2	3) z	4) $y^2 + x$	
Задание 4. Ротор векторного поля $\vec{F} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ равен . . .				
1) $(-2x, -2y, 0)$	2) $(y, 0, xy)$	3) $(yz - 2x, xz - 2y, xy)$	4) $(0,0,0)$	

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

ТЕСТ 1										
задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ	2	2	3	2	4	1	4	1	1	2

ТЕСТ 2									
задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ответ	3	3	2	2	1	1	1	1	2
задание	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ответ	3	1	1	4	3	1	2	4	2

ТЕСТ 3						
задание	1	2	3	4	5	6
ответ	2	1	2	4	2	3
задание	7	8	9	10	11	12
ответ	4	1	1	2	1	2

ТЕСТ 4				
задание	1	2	3	4
ответ	3	3	1	4

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов/ Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2002.
2. Герасимович А. И., Рысюк Н. А. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч I. – Мн.: Высшая школа, 1989.
3. Гусак А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справочное пособие по решению задач/ А. А. Гусак. – Изд-е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2001.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. I: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1999.
5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1999.
6. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Издательство «Наука», 1975.
7. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике. – М.: Высшая школа, 1985.
8. Лунгу К. Н., Письменный Д. Т., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004.
9. Методические указания к разделу курса высшей математики «Введение в анализ» для студентов вечерних факультетов. / Т.Е. Букина, Н.В. Малов. - Волгоград, изд. ВолгПИ. 1986.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. – М., 1970.
11. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003.
12. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003.

Электронное учебное издание

Джамиля Алиевна **Мустафина**
Ирина Викторовна **Ребро**
Виктория Борисовна **Светличная**
Татьяна Александровна **Матвеева**

МАТЕМАТИКА
III ЧАСТЬ

Учебное пособие
(*для студентов всех форм обучения*)

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2018 г. Поз. № 39.
Подписано к использованию 28.06.2018. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 8,06.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.