

С.В. Лапшина

# **Введение в механику сплошной среды**

Волжский  
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО  
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С.В. Лапшина

## Введение в механику сплошной среды

Электронное учебное пособие



2018

УДК 532(07)  
ББК 22я73  
Л 248

Рецензенты:  
инженер-конструктор ООО «Комед»  
*Харитонов В.Н.*,  
начальник монтажно-технологического отдела  
ОАО «Гипрорезинотехника»  
*Афанасьева Е.Е.*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Волгоградского государственного технического университета

Лапшина, С.В.

Введение в механику сплошной среды [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.В. Лапшина ; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 702 КБ). – Волжский, 2018. – Режим доступа: <http://lib.volpi.ru>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-2998-1

В учебном пособии рассматриваются основы механики сплошной среды. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

Ил. 7, табл. 4, библиограф.: 11 назв.

ISBN 978-5-9948-2998-1

© Волгоградский государственный  
технический университет, 2018  
© Волжский политехнический  
институт, 2018

## Введение в механику сплошной среды

### Концепция сплошной среды

В предыдущих разделах курса в основном рассматривалось движение материальной точки либо абсолютно твердого тела. Движение деформируемых твердых или жидких тел практически не затрагивалось. Исключением является описание свойств однородного упругого стержня или пружины с помощью закона Гука.

### Понятие сплошной среды

В настоящем разделе курса мы рассмотрим некоторые простые способы описания движения деформируемых тел, в которых преобладают неупругие деформации. Поскольку описание деформаций вообще представляет достаточно сложную задачу, мы ограничимся изучением свойств сплошной среды. Сплошной средой называется физическое тело, свойства которого в соседних точках мало отличаются. Это означает, что физические величины, определяющие рассматриваемые свойства сплошной среды, близки в соседних точках. Традиционными примерами таких тел являются жидкости или газы.

Предполагается, что механические и термодинамические характеристики сплошной среды могут быть описаны физическими полями, такими как поле плотности, скорости, давления и т.д. Напомним, что полем физической величины называется одна или несколько функций, заданных в каждой точке пространства в каждый момент времени.

На практике задание поля физической величины связано с определенной процедурой усреднения, которую мы поясним примерами.

Предположим, что рассматриваемое тело можно представить в виде совокупности большого числа частиц постоянного состава, каждая из которых занимает некоторый элементарный объем. Если элементарный объем, занимаемой частицей можно выбрать так, чтобы его размерами можно было пренебречь при

описании движения, то такую частицу можно рассматривать, как материальную точку. В большинстве случаев этот объем следует выбрать достаточно малым. Движение сплошной среды тогда может быть представлено, как движение очень большой совокупности таких частиц. Более подробно понятие «элементарный объем» рассматривается ниже.

Одним из возможных методов описания является определение движения каждой из частиц, т.е. определение физических величин, с ними связанных. Такой подход называется описанием Лагранжа. Применение описания Лагранжа представляет определенные удобства, поскольку непосредственно связано с возможностью использования моделей материальной точки и твердого тела. Однако, на практике такой подход используется только для изучения движения в течение небольших интервалов времени. Если сплошная среда движется в ограниченном объеме в течение достаточно большого времени, то траектории частиц сильно перепутываются. Частицы, первоначально находившиеся в соседних точках пространства, оказываются разделенными. Элементарные объемы, занимаемые соседними частицами, при таком движении сильно деформируются и могут иметь значительное протяжение при малом объеме. Это приводит к тому, что малость первоначального объема не гарантирует близости физических свойств вещества в нем спустя некоторое время, что в свою очередь исключает применения аппарата дифференциального исчисления к такой среде. Механика – от греческого корня «Механэ», переводящегося как «ухищрение». Большинство реальных состояний различных веществ – твердого, жидкого, газообразного, сыпучего могут быть описаны в рамках модели сплошных сред. Механика сплошных сред – фундамент развития различных наук, техники и технологии. На основных законах и моделях механики сплошных сред базируются большинство теорий, описывающих поведение реальных сред: теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости, гидродинамика, газодинамика, динамика гетерогенных структур и др. Механика сплошных сред является одним из важнейших разделов Теоретической Физики.

## **Деформации твердого тела.**

*Понятие о тензоре деформации. Абсолютно упругое тело и его деформации. Упругие напряжения. Модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона. Деформации при изгибе и кручении, устойчивость тел при деформациях. Энергия упругих деформаций.* В лекциях по механике твердого тела мы предполагали, что под действием приложенных сил в теле, хотя и происходят деформации, тем не менее мы не принимали их в расчет для описания движения этого тела как целого. Во многих важных случаях учет деформаций является определяющим, например, когда речь идет о целой области физики – о механике сплошной среды или о расчете прочности многочисленных конструкций и деталей машин и механизмов, базирующемся на отдельной инженерной науке, называемой сопротивлением материалов и т.д. Вначале мы рассмотрим поведение твердых тел, которые деформируются под действием приложенных сил. Надо отметить, что основное положение механики деформируемых твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, были разработаны в начале XIX в. И составляют основу современной теории упругости. Опыт показывает, что под действием приложенных сил тела в той или иной степени меняют свою форму и объем, что на микроскопическом уровне означает относительное смещение атомов, составляющих тело. Для удобства описания деформаций мысленно разобьем тело на физически малые объемы (иногда их будем называть частицы), содержащие, однако, большое число атомов. В отсутствие деформаций атомы находятся в состоянии теплового равновесия, а все малые объемы – в механическом равновесии. Тогда сумма сил, действующих на выделенный объем со стороны примыкающих к нему других объемов будет равна нулю. Смена расположения атомов при деформациях приводит к тому, что в теле возникают внутренние силы, или внутреннее напряжение, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Важно отметить, что внутренние силы, как силы молекулярного взаимодействия, являются короткодействующими. Только соседние атомы или молекулы эффективно взаимодействуют друг с другом. Это упрощает ситуацию,

поскольку позволяет считать, что силы, действующие на малый объем, приложены к ограничивающей его поверхности.

### **Подходы к изучению движения деформируемых сред.**

Проблемы механики сплошных сред. Подход к изучению движения деформируемых сред заключается в переходе от реальных деформируемых сред к их идеализированному представлению и соответствующему символическому описанию. В дальнейшем под материальным телом, независимо от его агрегатного состояния, понимается система материальных частиц, которая заключена в некоторой области пространства  $D$ , имеющей объем  $V$  и ограниченной поверхностью  $S$ . Определяют два основных подхода к изучению движения деформируемых сред: статистический и феноменологический. Статистический подход (развиваемый в физике) базируется на методах статистической механики. Это – вероятностные методы, применение средних характеристик по большому ансамблю частиц, введение дополнительных гипотез о свойствах молекул и их взаимодействии с целью упрощения модели. Однако при сложном строении молекул использование статистических методов затруднено, так как недостаток информации не позволяет сформулировать гипотезу о взаимодействии молекул, а получаемые уравнения чрезмерно сложны. Феноменологический подход (от гр. *phainomenon* – явление) базируется на общих, полученных из опыта, закономерностях и гипотезах, которые принимаются за истинные и используются для построения последующих уравнений и выводов. В основу феноменологического подхода положены понятие материального континуума и соответствующая этому понятию гипотеза сплошности. Используя подходы и методы, развитые в механике сплошных сред, решаются многие проблемы. Среди них, проблема воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела. Силы, действующие со стороны жидкости на тело, определяются движением жидкости, поэтому изучение движения тел в жидкости непосредственно связано с изучением движения жидкости. Фильтрация –

движение жидкости сквозь почву и другие пористые среды. Большое значение фильтрация имеет в нефтяном деле. Гидростатика – равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости. Волновые движения. Распространение волн в твердых телах; волны на поверхности моря; волны, вызываемые движением корабля; распространение волн в каналах и реках; приливы; сейсмические процессы; звуковые колебания; общая проблема шума в различных средах и т. п. Неустановившиеся движения газов с химическими превращениями при взрывах, детонации и горении, например в потоке воздуха, в цилиндрах поршневых машин или камерах реактивных двигателей и т. д. Защита твердых тел от сгорания и сильного оплавления при входе с большими скоростями в плотные слои атмосферы. Теория турбулентных движений газов и жидкостей, представляющих собой в действительности очень сложные нерегулярные, случайного характера движения, пульсирующие около некоторых средних регулярных процессов, которые в рассматриваемых и ставящихся задачах существенны с практической точки зрения таких сложных движений. Проблемы описания движения очень сильно сжатых жидкостей и газов с учетом усложненных физических свойств различных сред в таких состояниях, особенно при наличии высоких температур. С другой стороны, очень важны явления, происходящие в сильно разреженных газах. При изучении различных процессов, связанных с движением сред при большом вакууме в лабораторных опытах, в космическом пространстве, в атмосферах планет и звезд, также требуется применять методы механики сплошной среды. Проблемы магнитной гидродинамики и исследования движений ионизованных сред – плазмы с учетом их взаимодействий с электромагнитным полем в настоящее время приобретают первостепенное познавательное и техническое значение. Наука о прогнозе погоды – метеорология в значительной степени представляет собой изучение движения воздушных масс в атмосфере Земли и является важным разделом механики сплошной среды, тесно связанным с множеством других разделов физики. Основные проблемы астрофизики и космогонии изучаются в рамках механики сплошной среды. Сюда относятся вопросы о внутреннем строении звезд и



строении их фотосфер, о движении туманностей и космических облаков, вспышках и взрывах переменных звезд, о колебаниях цефеид и, наконец, основная задача о развитии галактик и о строении и эволюции Вселенной. Значительная часть механики сплошной среды посвящена исследованию движений и равновесий «твердых» деформируемых тел. Теория упругости является основой для постройки всякого рода сооружений и всевозможных машин. В настоящее время приобретают все большее значение отделы механики, посвященные изучению усложненных упругих свойств тел и учету неупругих эффектов в твердых телах, таких, как пластичность, связанная с появлением остаточных деформаций, ползучесть, связанная с постепенным нарастанием деформаций при неизменных внешних нагрузках и с жаропрочностью частей машин (явления ползучести проявляются при долговременной работе различных конструкций, а при повышенных температурах – и в короткие промежутки времени). Интересны проблемы кавитации, характеризующейся образованием и исчезновением в движущейся жидкости пузырьков и больших каверн, наполненных газами и парами жидкости. Важны новые современные теории, в которых исследуются проблемы взаимодействия мощных лазерных лучей с различными телами – задачи нелинейной оптики, взаимодействия движущихся тел с электромагнитными полями. Такие взаимодействия в макроскопических масштабах существенно связаны с эффектами, описываемыми в рамках квантовой механики. Аналогичное положение встречается при описании макроскопических свойств тел, связанных с движением при очень низких температурах или с учетом намагниченности и электрической поляризации. В последнее время ставится очень много исследований в области биологической механики.

Гипотезы механики сплошной среды. Материальный континуум (сплошная среда) есть состоящая из большого числа малых частиц фиктивная субстанция, которая непрерывно, сплошным образом заполняет область пространства  $D$ , отведенную  $D_0$  данному телу, независимо от его агрегатного состояния. Следует отметить, что под частицей, составляющей материальный континуум, понимается часть тела, малая по отношению к геометрическим размерам тела, но большая по

сравнению с размерами молекул. Таким образом, в рамках феноменологического подхода имеет место абстрагирование от реального атомно-молекулярного строения тел и переход к идеализированному представлению вещества в виде материального континуума. Такая идеализация реального дискретного вещества позволяет использовать при исследовании движения деформируемых тел аппарат дифференциального и интегрального исчисления непрерывных функций. Механика сплошной среды строится в рамках феноменологического подхода при ограничениях и упрощениях, определяемых гипотезами механики сплошных сред. Первая гипотеза МСС – гипотеза сплошности – связана с понятием материального континуума. Вторая гипотеза МСС связана с понятием пространства. Под пространством понимается бесконечно большая совокупность точек, однозначно задаваемых с помощью чисел, называемых координатами, которые определяют положение точки относительно начала координат. Мерность пространства обусловлена числом координат, которыми определяется положение точек в пространстве. Например, бесконечно большая совокупность точек в обычном физическом пространстве составляет трехмерное пространство, так как положение произвольной точки в декартовой прямоугольной системе координат задается тремя координатами  $x, y, z$ . Совокупность точек на плоскости составляет двумерное пространство, положение произвольной точки задается двумя координатами  $x, y$ . Двумерным является и пространство, составленное из совокупности точек, образующих сферическую поверхность, здесь положение точки может быть однозначно определено двумя координатами: углами  $\theta$  (долгота) и  $\varphi$  (широта). Предполагается, что пространство, в котором рассматривается движение деформируемых сред, является евклидовым. Третья гипотеза МСС – гипотеза абсолютного времени. Согласно этой гипотезе, время течет одинаково вне зависимости от выбора системы отсчета, в которой рассматривается движение деформируемой среды. Данная гипотеза является хорошей идеализацией при решении большинства практических задач, в условиях которых скорости движения тел не достигают таких значений, чтобы возникала

необходимость учета релятивистских эффектов. Скалярные, векторные и тензорные поля. Представление движения материального континуума. Индивидуализация точек материального континуума. Системы отсчета. Поскольку сплошная среда (материальный континуум) есть некоторая виртуальная субстанция, непрерывным, сплошным образом заполняющая часть пространства, описание ее движения связано с заданием характеризующих движение величин в каждой точке какой-либо области пространства. Иными словами, при описании движения сплошных сред приходится иметь дело с полями скалярных и векторных величин. Поле – скалярное или векторное – это совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области пространства. В качестве примера можно назвать скалярное поле давлений или температуры в атмосфере, векторное поле скорости течения воды в реке и т. д. Описание поля связано с установлением зависимостей величин от координат, однозначно определяющих положение точек в пространстве:

$$p = p(x, y, z), T = T(x, y, z), v = v(x, y, z).$$

Поскольку координаты точки в пространстве  $x, y, z$  задают радиус-вектор  $r$ , характеризующий положение этой точки относительно начала координат, задать скалярное или векторное поле означает задать скалярную или векторную функцию векторного аргумента  $r$ , то есть поставить в соответствие каждому радиусу-вектору  $r$  значение соответствующей физической величины:

$$p = p(r), T = T(r), v = v(r).$$

Графическое изображение полей удобно проводить с помощью поверхностей уровня и векторных линий. Поверхность уровня (изоповерхности) используются для графического изображения скалярных полей. Это геометрическое место точек в пространстве, соответствующих одному и тому же значению скалярной величины

$$p(x, y, z) = \text{const}, T(x, y, z) = \text{const} \text{ и т. д.}$$

Векторные линии используются для графического изображения векторных полей. Это такие линии в пространстве, касательные к которым в каждой точке

совпадают по направлению с направлением вектора в данной точке. Векторные линии, используемые для графического изображения поля вектора скорости  $v$ , называются также линиями тока. Индивидуальный объем – часть среды, состоящая (в процессе движения) из одного и того же материала, включающая одни и те же частицы, а с учетом реального молекулярного строения деформируемых сред – состоящая из одних и тех же молекул. Значение индивидуального объема  $V$  может изменяться в процессе движения под действием внешних сил. Бесконечно малый индивидуальный объем ( $V \rightarrow 0$ ) в механике сплошных сред называется индивидуальной частицей (в физике – просто частицей).

Наконец, предельным случаем индивидуального объема является индивидуальная точка – объект, не имеющий размеров, объем которого можно не учитывать. С учетом реального строения тел понятие индивидуальной частицы можно определить как индивидуальный объем, малый по сравнению с размерами тела, но достаточно большой по сравнению с размерами молекул среды. Для количественного описания механического движения сплошной среды необходимо ввести систему отсчета, представляющую собой совокупность тела или точки отсчета, связанной с ними системы координат и указаний о моменте начала отсчета времени. В механике сплошных сред вводятся два типа системы отсчета: система отсчета наблюдателя (СОН) и сопутствующая система отсчета (ССО). Система отсчета наблюдателя (эйлерова) – это система отсчета, по отношению к которой определяется движение материального континуума. Положение точек трехмерного пространства относительно СОН однозначно определяется тремя значениями координат:  $x_1, x_2, x_3$ .

Определить движение материального континуума – значит установить параметры движения всех его индивидуальных точек. Но, с одной стороны, любой индивидуальный объем сплошной среды в силу гипотезы непрерывности (сплошности) состоит из бесконечно большого числа индивидуальных точек. С другой стороны, индивидуальные точки континуума на первый взгляд совершенно равноправны и неотличимы друг от друга. Поэтому, для того чтобы



который также содержит информацию о движении всех ее индивидуальных точек. При этом, задавая конкретные значения  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$  указывают на одну (и только одну!) индивидуальную точку среды, для которой закон движения позволяет определить ее текущие координаты относительно СОН в зависимости от времени  $t$ . Специфика ССО не исчерпывается тем, что в качестве точки отсчета принимается одна из индивидуальных точек материального континуума. ССО присуще также то, что координатные линии (в частности, координатные оси, проходящие через точку отсчета) всегда проходят через одни и те же индивидуальные точки среды. Таким образом, вводимая при описании движения ССО – подвижная, деформируемая, криволинейная в общем случае система координат, координатные линии которой всегда проходят через одни и те же индивидуальные точки сплошной среды. Введенная указанным образом ССО имеет следующие особенности.

В начальный момент времени  $t_0 = t$  выбор системы координат зависит от желания исследователя. Однако в дальнейшем, при движении сплошной среды, сопутствующая система координат выходит из-под власти исследователя. По определению, ее координатные линии, проходя всегда через одни и те же индивидуальные точки, являются как бы замороженными в среду, движутся и деформируются вместе с ней. Сопутствующая система координат рассматривается в основном для того, чтобы по деформациям ее координатных линий ввести величины, количественно характеризующие деформацию материального континуума – компоненты тензора деформаций и тензор деформаций в целом. Вторая важная особенность сопутствующей системы координат состоит в том, что все индивидуальные точки сплошной среды имеют не изменяющиеся во времени координаты  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$  относительно данной системы отсчета. Это следует из самого способа определения значений координат  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$ , индивидуализирующих точки континуума. Действительно, три значения  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$  координат точек относительно ССО определяются для фиксированного начального момента времени  $t_0 = t$ , раз и навсегда закрепляются

за каждой индивидуальной точкой и уже по этой причине не могут изменяться в зависимости от времени.

Сущность точек зрения Лагранжа и Эйлера на изучение движения сплошной среды. Точка зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды (лагранжев подход) заключается в исследовании изменения величин, описывающих движение и состояние сплошной среды (например, скорости  $v$ , температуры  $T$ ) для каждой из ее индивидуальных точек. В качестве независимых переменных при математическом описании движения с позиций Лагранжа используются координаты  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$  (или  $3\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ x, x, x$ ), индивидуализирующие точки сплошной среды и называемые лагранжевыми координатами, и время  $t$ .

Лагранжевы координаты  $1\ 2\ 3\ \xi, \xi, \xi$  и время  $t$  носят название лагранжевых переменных. Формально при использовании лагранжева подхода находят зависимости величин, описывающих поведение сплошной среды, от лагранжевых переменных  $, , , t\ 1\ 2\ 3\ \xi\ \xi\ \xi$ , например:  $x\ x\ (t)\ i\ i, , , 1\ 2\ 3 = \xi\ \xi\ \xi; (, , , t)\ 1\ 2\ 3\ v = v\ \xi\ \xi\ \xi; T\ T(, , , t)\ 1\ 2\ 3 = \xi\ \xi\ \xi$ .

Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды (эйлеров подход) заключается в исследовании изменения величин, описывающих движение и состояние среды для каждой из точек пространства, в которые с течением времени могут приходить различные индивидуальные точки. В качестве независимых переменных при описании движения среды по Эйлеру используются координаты  $1\ 2\ 3\ x, , x, x$  определяющие положение точек пространства относительно СОН и называемые эйлеровыми координатами, и время  $t$ . В целом эйлеровы координаты  $1\ 2\ 3\ x, x, x$  и время  $t$  называются эйлеровыми переменными. Эйлеров подход предполагает поиск зависимостей всех величин, описывающих поведение деформируемой среды, от эйлеровых переменных  $x, x, x, t\ 1\ 2\ 3$ , например:  $(x, x, x, t)\ 1\ 2\ 3\ v = v; T\ T(x, x, x, t)\ 1\ 2\ 3 =$  и т.д.

Итак, различие подходов Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в первом случае следят за каждой индивидуальной точкой (или индивидуальной частицей) движущейся сплошной среды, а во втором – за каждой точкой пространства, в котором движется сплошная среда. Подходы к описанию движения сплошной

среды с позиций Эйлера и Лагранжа с точки зрения механики эквивалентны. Имея описание движения среды по Лагранжу, можно перейти к описанию по Эйлеру, и наоборот. Использование того или другого подхода определяется спецификой решаемой задачи механики сплошных сред.

## **Гидромеханика**

Многие технологические процессы химической промышленности связаны с движением жидкостей, газов или паров, перемешиванием в жидких средах, а также с разделением неоднородных смесей путем отстаивания, фильтрования и центрифугирования. Скорость всех указанных физических процессов определяется законами гидромеханики.

Законы гидромеханики подразделяются на: гидростатику – рассматривает законы равновесия в состоянии покоя, и гидродинамику – законы движения жидкостей и газов.

## **Гидродинамика**

Движущей силой при течении жидкостей является разность давлений, которая создается с помощью насосов или компрессоров либо вследствие разности уровней или плотностей жидкости. Различают внутреннюю и внешнюю задачи гидродинамики.

### **Основные характеристики движения жидкостей**

В разных точках поперечного сечения потока скорость частиц жидкости неодинакова. Около оси трубы скорость максимальна, а по мере приближения к стенкам она уменьшается. Поэтому в расчетах обычно используют не истинную (локальную) скорость, а фиктивную среднюю скорость. Эта скорость  $\omega$  (м/сек) выражается отношением объемного расхода жидкости  $V_{\text{сек}}$  (м<sup>3</sup>/сек) и площади поперечного сечения  $S$  (м<sup>2</sup>) потока:



$$\omega = \frac{V_{сек}}{S}$$

Массовый расход  $M$  (кг/сек) определяется:

$$M = \rho \omega S$$

При движении жидкости через площадь поперечного сечения любой формы, отличной от круглой, в качестве расчетного линейного размера принимают гидравлический радиус, или эквивалентный диаметр.

Под гидравлически радиусом  $r_r$  (м) понимают отношение площади свободного сечения трубопровода или канала, через которое протекает жидкость, к смоченному периметру:

$$r_2 = \frac{S}{\Pi} = \frac{\pi d^2 / 4}{\pi d} = \frac{d_3}{4} \quad d_3 = \frac{4S}{\Pi}$$

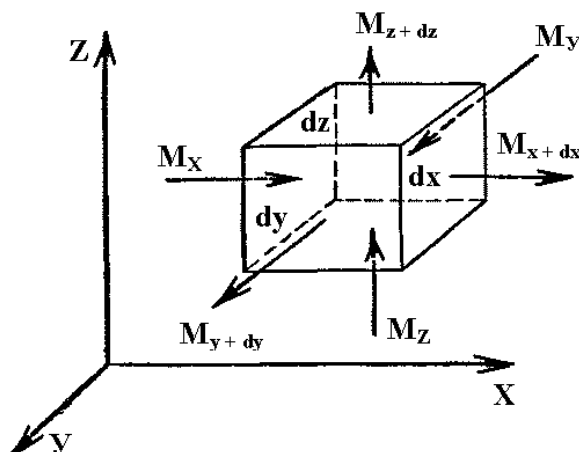
прямоугольное сечение ( $a$  и  $b$ ):

$$r_2 = \frac{ab}{2a + 2b}$$

## Уравнение неразрывности (сплошности) потока

Установим общую зависимость между скоростями в потоке жидкости, для которого соблюдается условие сплошности, или неразрывности движения.

Выделим внутри потока элементарный параллелепипед объемом  $dV = dx dy dz$ , ребра которого ориентированы параллельно осям координат.



Пусть составляющая скорости потока вдоль оси  $x$  в точках, лежащих на левой грани параллелепипеда площадью  $dS = dy dz$ , равна  $\omega_x$ . Тогда через эту грань в параллелепипед войдет вдоль оси  $x$  за единицу времени масса жидкости  $\rho \omega_x dy dz$ , а за промежуток времени  $d\tau$  – масса жидкости.

$$M_x = \rho \omega_x dy dz d\tau$$

На противоположной грани параллелепипеда скорость и плотности жидкости могут отличаться от соответствующих величин на левой грани и будут равны  $\left( \omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx \right)$  и  $\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right)$ . Тогда через правую грань параллелепипеда за то же время  $d\tau$  выйдет масса жидкости

$$M_{x+dx} = \left[ \rho\omega_x + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} dx \right] dydzd\tau$$

Приращение массы жидкости в параллелепипеде вдоль оси x:

$$dM_x = M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} dx dy dz d\tau$$

Если составляющие скорости вдоль осей y и z равны  $\omega_y$  и  $\omega_z$  соответственно, то приращения массы вдоль этих осей по аналогии составят:

$$dM_y = -\frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} dy dx dz d\tau$$

$$dM_z = -\frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} dz dx dy d\tau$$

Общее накопление массы жидкости за время  $d\tau$  равно сумме ее приращений вдоль всех осей координат:

$$dM = -\left[ \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} \right] dx dy dz d\tau$$

Вместе с тем изменение массы в полностью заполненном жидкостью объеме параллелепипеда возможно только вследствие изменения плотности жидкости в этом объеме:

$$dM = \frac{\partial\rho}{\partial\tau} dx dy dz d\tau$$

Приравнявая оба выражения  $dM$ , сокращая на  $(-dx dy dz)$  и перенося  $\frac{\partial\rho}{\partial\tau}$  в левую часть уравнения, окончательно получим:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой дифференциальное уравнение неразрывности потока для неустановившегося движения сжимаемой жидкости.

В установившемся потоке плотность не изменяется во времени, т.е.  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$  и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\omega_z)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Для капельных жидкостей, которые практически несжимаемы, а также для газов в условиях изотермического потока при скоростях, значительно меньших скорости звука,  $\rho = \text{const}$  и, следовательно:

$$\frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением неразрывности потока несжимаемой жидкости.

Сумма изменений скорости вдоль осей координат в левой части уравнения (3) называется дивергенцией вектора скорости и обозначается через  $\text{div}\omega$ . Поэтому данное уравнение можно представить как  $\text{div}\omega = 0$ .

Для того чтобы перейти от элементарного объема ко всему объему жидкости, движущейся сплошным потоком (без разрывов и пустот) по трубопроводу переменного сечения, проинтегрируем дифференциальное уравнение (2).

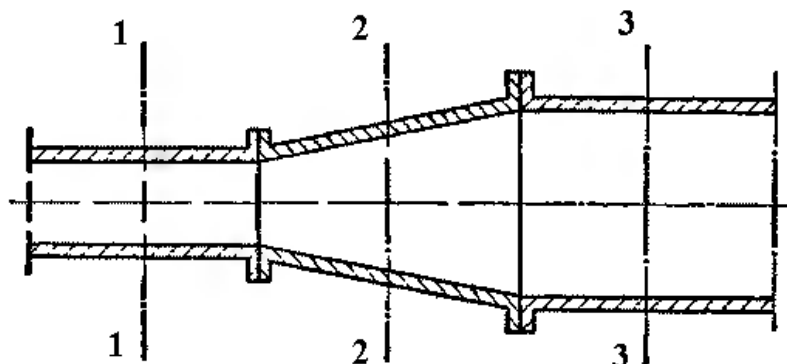
Если бы площадь сечения трубопровода не изменялась, то для установившегося однонаправленного движения (в направлении оси  $x$ ) интегрирование уравнения (2) дало бы зависимость  $\rho\omega = \text{const}$ .

Если же площадь сечения  $S$  трубопровода переменна, то интегрируя также по площади, получим

$$\rho\omega S = \text{const} \quad (4)$$

Для трёх различных сечений трубопровода

$$\rho_1 \omega_1 S_1 = \rho_2 \omega_2 S_2 = \rho_3 \omega_3 S_3 \text{ или } M_1 = M_2 = M_3 \quad (5)$$



Выражение (4) и (5) представляет собой уравнение неразрывности (сплошности) потока в его интегральной форме для установившегося течения или уравнение постоянного расхода

При установившемся движении жидкости, полностью заполняющей трубопровод, через каждое его поперечное сечение проходит в единицу времени одно и то же количество жидкости.

Для капельных жидкостей  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = \text{const}$ , тогда уравнение (4) примет вид

$$\omega S = \text{const} \quad (6)$$

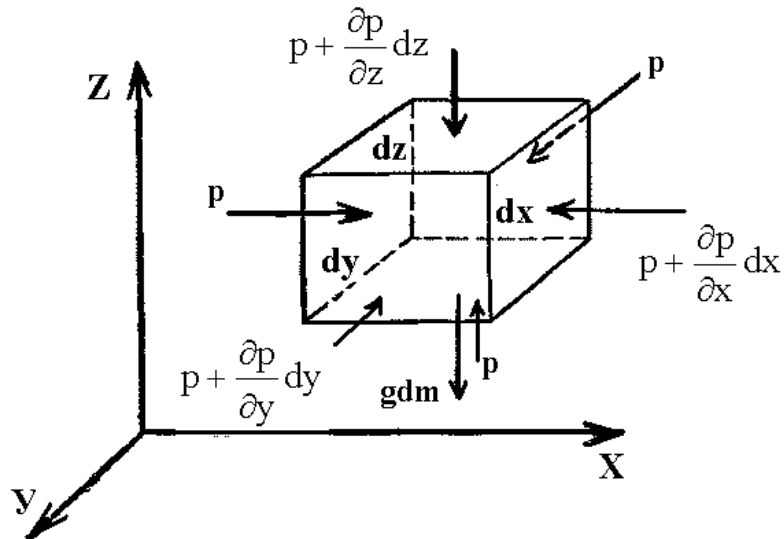
Следовательно

$$\omega_1 S_1 = \omega_2 S_2 = \omega_3 S_3 = \text{const}$$

Скорости капельной жидкости в различных поперечных сечениях трубопровода обратно пропорциональны площадям этих сечений. Таким образом, уравнение постоянства расхода является частным случаем закона сохранения массы и выражает материальный баланс потока.

## Дифференциальные уравнения движения Эйлера

Рассмотрим установившийся поток идеальной жидкости, движущейся без трения. Выделим в потоке элементарный параллелепипед объемом  $dV=dx dy dz$ , ориентированный относительно осей координат.



Сила тяжести действующая на параллелепипед выражается произведением его массы  $dm$  на ускорение свободного падения  $g$  т.е. равна  $gdm$ .

$p$  – сила гидростатического давления.

Основной принцип статики: сумма проекций на оси координат всех сил, действующих на элементарный объем, находящийся в равновесии, равна нулю.

Проекции на оси координат сил тяжести и давления составят:

на оси  $x$              $-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$

на оси  $y$              $-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$

на оси z 
$$-\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx dy dz$$

$$(-g dm = -\rho g dx dy dz \quad \text{проекция сил на ось z} \quad -\rho g dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = 0)$$

$$\text{на ось x} \quad \rho dx dy dz - \left(\rho + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz = 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0$$

Согласно основному принципу динамики, сумма проекций сил, действующих на движущийся элементарный объем жидкости, равна произведению массы жидкости на ее ускорение.

Масса жидкости в рассмотренном объеме  $dm = \rho dx dy dz$

Если жидкость движется со скоростью  $\omega$ , то ее ускорение равно  $\frac{d\omega}{d\tau}$ , а

проекции ускорения на оси координат:  $\frac{d\omega_x}{d\tau}; \frac{d\omega_y}{d\tau}; \frac{d\omega_z}{d\tau}$  где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  -

составляющие скорости вдоль осей x, y, z.

В соответствии с основным принципом динамики:

$$\rho dx dy dz \frac{d\omega_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

$$\rho dx dy dz \frac{d\omega_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

$$\rho dx dy dz \frac{d\omega_z}{d\tau} = \left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx dy dz$$

или после сокращения

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d\omega_x}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\rho \frac{d\omega_y}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\rho \frac{d\omega_z}{d\tau} &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{1}$$

или согласно субстанциональным производным соответствующих составляющих скорости получим.

Субстанциональная производная характеризует изменение какого-либо параметра или свойства материи (субстанции) во времени при перемещении материальных частиц в пространстве.

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\omega_x}{d\tau} &= \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \omega_z \\
\frac{d\omega_y}{d\tau} &= \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \omega_z \\
\frac{d\omega_z}{d\tau} &= \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \omega_z
\end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Система уравнений (1) с учетом выражений (2) представляет собой дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для установившегося потока.

При неустановившемся движении скорость жидкости изменяется не только при перемещении частицы потока из одной точки пространства в другую, но и с течением времени в каждой точке.

Тогда для неустановившихся условий имеем:



$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\omega_x}{d\tau} &= \frac{\partial\omega_x}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_x}{\partial x}\omega_x + \frac{\partial\omega_x}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial\omega_x}{\partial z}\omega_z \\
 \frac{d\omega_y}{d\tau} &= \frac{\partial\omega_y}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_y}{\partial x}\omega_x + \frac{\partial\omega_y}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial\omega_y}{\partial z}\omega_z \\
 \frac{d\omega_z}{d\tau} &= \frac{\partial\omega_z}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega_z}{\partial x}\omega_x + \frac{\partial\omega_z}{\partial y}\omega_y + \frac{\partial\omega_z}{\partial z}\omega_z
 \end{aligned} \right\} (3)$$

Система уравнений (1) с учетом выражений (3) представляет собой дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для неустановившегося потока.

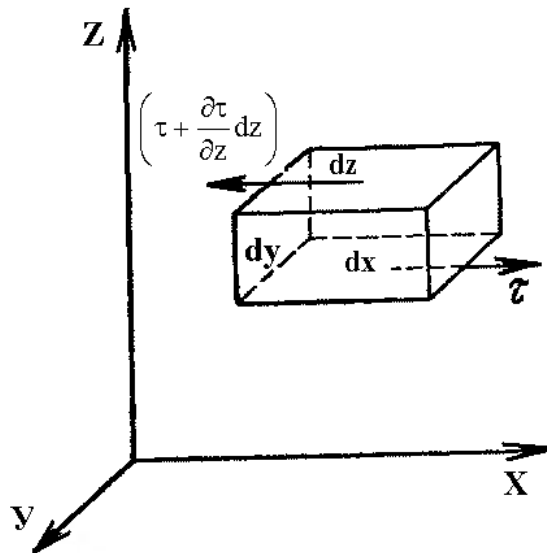
Интегралом уравнений движения Эйлера для установившегося потока является уравнение Бернулли.

## Дифференциальные уравнения движения Навье – Стокса

При движении реальной (вязкой) жидкости в потоке жидкости помимо сил давления и тяжести действуют также силы трения.

Действие сил трения  $T$  на выделенный в потоке вязкой жидкости элементарный параллелепипед проявляется в возникновении на его поверхности касательных напряжений. Рассмотрим первоначально простой случай одномерного плоского потока капельной жидкости в направлении оси  $x$ , когда проекция скорости капельной жидкости в направлении оси  $x$ , когда проекция скорости  $\omega_x$  зависит только от расстояния  $z$  до горизонтальной плоскости отсчета.

В этих условиях касательные напряжения возникают лишь на поверхностях  $dF$  верхней и нижней граней элементарного параллелепипеда, причем  $dF = dx dy$ . Если касательное напряжение на нижней грани параллелепипеда равно  $\tau$ , то на верхней оно составит  $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right)$ .



При этом направления касательных напряжений на нижней и верхней гранях обусловлены, например, тем, что более медленные вышележащие слои жидкости затормаживают слой, в котором находится параллелепипед, а более быстрые

нижележащие слои «разгоняют» его. Производная  $\frac{\partial \tau}{\partial z}$  выражает изменение касательного напряжения вдоль оси  $z$  в точках, лежащих на нижней грани параллелепипеда, а  $\frac{\partial \tau}{\partial z} dz$  представляет собой изменение этого напряжения вдоль всей длины  $dz$  ребра параллелепипеда.

Тогда проекция равнодействующей сил трения на ось  $x$

$$\tau dxdy - \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz \right) dxdy = - \frac{\partial \tau}{\partial z} dxdydz$$

В общем случае проекция равнодействующей сил трения на ось  $x$  примет вид

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} \right) dxdydz$$

Сумму вторых производных по осям координат называют оператором Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} = \nabla^2 \omega_x$$

Следовательно

$$\mu \nabla^2 \omega_x dxdydz$$

Соответственно проекции равнодействующей сил трения:

на ось  $y$

$$\mu \nabla^2 \omega_y dxdydz$$

на ось  $z$

$$\mu \nabla^2 \omega_z dxdydz$$

Проекции на оси координат равнодействующей всех сил (тяжести, давления и трения), действующих на элементарный объем капельной жидкости (с учетом проекций сил тяжести и давления, полученных при выводе уравнений Эйлера), составляют:

на ось  $x$

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \omega_y\right) dx dy dz$$

на ось y

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \omega_x\right) dx dy dz$$

на ось z

$$\left(-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 \omega_z\right) dx dy dz$$

Согласно основного принципа динамики, сумма проекций сил на оси координат равны произведению массы жидкости  $\rho dx dy dz$  на проекции ускорения на оси координат.

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d\omega_x}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \omega_x \\ \rho \frac{d\omega_y}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \omega_y \\ \rho \frac{d\omega_z}{d\tau} &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 \omega_z \end{aligned} \right\} (1)$$

Уравнения (1) представляют собой уравнения Навье – Стокса, описывающие движение вязкой каплевой жидкости.

Уравнения Пуазейля – ламинарное установившееся.

### Уравнение Бернулли

Решение уравнений движения Эйлера для установившегося потока приводит к одному из наиболее важных и широко используемых уравнений гидродинамики – уравнению Бернулли.

Для двух поперечных сечений 1 и 2 потока

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g} \quad (1)$$

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости.

$l$  – называют полным гидродинамическим напором.

Следовательно, согласно уравнению Бернулли, для всех поперечных сечений установившегося потока идеальной жидкости величина гидродинамического напора остается неизменной.

$z$  – нивелирная высота, называемая также геометрическим напором, представляет собой удельную потенциальную энергию положения в данной точке.

$\frac{p}{\rho g}$  – статический или пьезометрический напор, характеризует удельную потенциальную энергию давления в данной точке.

$\frac{\omega^2}{2g}$  – скоростной или динамический напор, характеризует удельную кинетическую энергию в данной точке.

Уравнение Бернулли является частным случаем закона сохранения энергии и выражает энергетический баланс потока.

Уравнение Бернулли реальных жидкостей

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g} + h_{\Pi}$$

где  $h_{\Pi}$  – потерянный напор, характеризует удельную энергию, расходуемую на преодоление гидравлического сопротивления при движении реальной жидкости.

### Основы теории подобия

Модель – упрощенное представление о явлениях, происходящих в естественной природе и сохраняющая основные черты происходящего.

Безразмерные масштабные множители, выражающие отношения однородных сходственных величин подобных фигур (или систем), называются константами подобия.

Инвариантом подобия называют безразмерные отношения каких-либо двух размеров одной из фигур, равные отношению сходственных размеров подобной фигуры.

Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных линейных размеров природы и модели:

$$\frac{L}{L'} = \frac{D}{D'} = \text{const} = k_1$$

Временное подобие характеризуется тем, что сходственные частицы в геометрически подобных системах, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути за промежутки времени, отношение которых является постоянной величиной:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\tau}{\tau'} = \text{const} = k_\tau$$

Подобие физических величин предполагает, что для двух сходственных точек, размещенных подобно в пространстве и времени, отношения физических свойств является величинами постоянными:

$$\frac{\rho_0}{\rho_0'} = k_\rho \quad \frac{\mu_0}{\mu_0'} = k_\mu$$

Первая теорема подобия была сформулирована Ньютоном. Согласно этой теореме, при подобии систем всегда могут быть найдены такие безразмерные комплексы величин, которые для сходственных точек данных систем одинаковы, т.е. подобные явления характеризуются численно равными критериями подобия.

Второй закон Ньютона  $f = ma = m \frac{d\omega}{d\tau}$

Выделим в подобных системах 2 частицы, движущиеся подобно. В натуре на частицу массой  $m'$  действует сила  $f'$  сообщая ей ускорение  $\frac{d\omega'}{d\tau'}$ ; в модели сходственная частица массой  $m''$  под действием силы  $f''$  приобретает ускорение  $\frac{d\omega''}{d\tau''}$

Тогда

$$f' = m' \frac{d\omega'}{d\tau'} \quad \text{и} \quad f'' = m'' \frac{d\omega''}{d\tau''}$$

При подобном движении частиц для сходственных точек природы и модели константы подобия выражаются отношениями:

$$\frac{m'}{m''} = k_m \quad \frac{\omega'}{\omega''} = k_\omega \quad \frac{\tau'}{\tau''} = k_\tau \quad \frac{f'}{f''} = k_f$$

т.е.

$$\frac{f'}{f''} = \frac{m' \frac{d\omega'}{d\tau'}}{m'' \frac{d\omega''}{d\tau''}} = \frac{m' d\omega' d\tau''}{m'' d\omega'' d\tau'}$$

Отношения приращений величин, входящих в константы подобия, можно заменить отношениями самих величин, т.е.

$$\frac{f'}{f''} = \frac{m' \omega' \tau''}{m'' \omega'' \tau'} \Rightarrow k_f = \frac{k_m k_\omega}{k_\tau} \Rightarrow \frac{k_f k_\tau}{k_m k_\omega} = C = 1$$

Величину  $C$ , составленную их констант подобия, называют индикатором подобия.

$$\frac{f' \tau'}{m' \omega'} = \frac{f'' \tau''}{m'' \omega''}$$

Таким образом, получен безразмерный комплекс величин, значения которого одинаковы для сходственных точек обеих систем. Этот комплекс называют критерием Ньютона

$$\frac{f\tau}{m\omega} = \text{idem} = Ne,$$

который характеризует отношение действующей на частицу силы к силе инерции.

Достоинства критериев – не имеют размерности и позволяют удобно моделировать процессы упрощенно.

Вторая теорема подобия была доказана Бэкингом, Федерманом и Афанасьевой-Эренфест. Согласно этой теореме, решение любого дифференциального уравнения, связывающего между собой переменные, влияющие на процесс, может быть представлено в виде зависимости между безразмерными комплексами этих величин, т.е. между критериями подобия.

Если обозначить критерии подобия через  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ , то решение дифференциального уравнения может быть представлено в общем виде:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n) = 0$$

Такие уравнения называют уравнениями в обобщенных переменных или критериальными уравнениями.

Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют определяющими. Критерии же, включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса, а сами зависят от этих условий, называют определяемыми.

Из критериального уравнения, представляющего собой функциональную зависимость между критериями подобия, рассчитав предварительно величины определяющих критериев, находят величину определяемого критерия, а из него – численное значение интересующей нас величины. Если определяемым является некоторый критерий  $\pi_1$ , то  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$ .

Вторая теорема подобия отвечает на вопрос, как обрабатывать результаты опытов, проведенных на моделях: их надо представлять в виде функциональной зависимости между критериями подобия.

Третья теорема подобия, или теорема М.В.Кирпичева и А.А. Гухмана, формулирует необходимые и достаточные условия подобия: подобны те явления, которые описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений и у которых соблюдается подобие условий однозначности.



Таким образом, исследование процессов методом теории подобия должно состоять из следующих элементов:

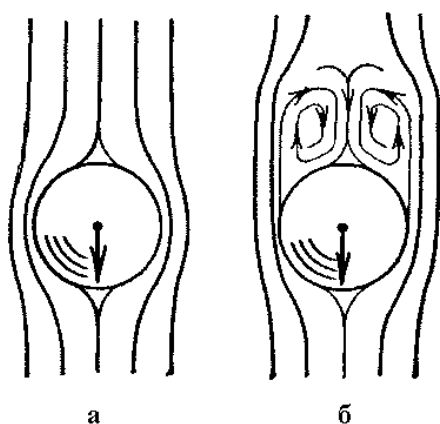
1. Получив полное математическое описание процесса, т.е. составив дифференциальное уравнение и установив условия однозначности, проводят подобное преобразование этого уравнения и находят критерии подобия.

2. Опытным путем на моделях устанавливают конкретный вид зависимости между критериями подобия, причем полученное обобщенное расчетное уравнение справедливо для всех подобных явлениях в исследованных пределах.

### Движение тел в жидкости

При движении тела в жидкости возникают сопротивления, для преодоления которых и обеспечения равномерного движения тела должна быть затрачена определенная энергия. Величина возникающего сопротивления зависит главным образом от режима движения и формы обтекаемого тела.

При ламинарном режиме тело окружено пограничным слоем жидкости и плавно обтекается потоком. Потеря энергии связана с преодолением сопротивления трения. С развитием турбулентности потока все большую роль начинают играть силы инерции. Сила сопротивления  $R$  среды движущемуся в ней телу выражена уравнением сопротивления:



$$R = \zeta S \frac{\rho \omega^2}{2} \quad (1)$$

где  $S$  – площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения,  $m^2$  ;

$\zeta$  – коэффициент сопротивления среды.

а – ламинарный поток

б – турбулентный поток

Отношение  $R/S$  представляет собой перепад давлений  $\Delta p$  ( $\text{Н/м}^2$ ), преодолеваемый движущимся телом.



Ламинарный режим закон Стокса  $Re < 2$

$$\zeta = \frac{24}{Re}$$

Переходный режим  $Re = 2 - 500$

$$\zeta = \frac{18.5}{Re^{0.6}}$$

Автомодельный режим закон Ньютона  $\sim 2 \cdot 10^5 > Re < \sim 500$

$$\zeta = 0,44 = \text{const}$$

Постановка в уравнение (1) каждого из приведённых выше уравнений для  $\zeta$  показывает, что для ламинарного режима  $Re \sim \omega$  для переходного режима  $Re \sim \omega^{1.4}$ , для автомодельного режима  $Re \sim \omega^2$

Для тел, по форме отличных от шарообразных, значения коэффициента сопротивления зависит от фактора формы  $\Phi$  и числа Рейнольдса.

$$\zeta = f(\text{Re}, \Phi) \quad \text{здесь } \Phi = \frac{F_{\text{ш}}}{F}$$

где  $F_{\text{ш}}$  – поверхность шара, имеющего тот же объём, что и рассматриваемое тело поверхностью  $F$ . Например, для куба  $\Phi = 0,806$ ; для цилиндра высотой, в 10 раз превышающей его радиус,  $\Phi = 0,69$ .

Закон внутреннего трения Ньютона, согласно которому напряжение внутреннего трения, возникающее между слоями жидкости при её течении, прямо пропорционально градиенту скорости.

$$\tau = -\mu \frac{d\omega}{dn} \quad \text{кажущейся вязкостью } \mu_k \downarrow \uparrow$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости;

$\tau$  – касательное напряжение, напряжение внутреннего трения.

$$\frac{d\omega}{dn} \text{ – градиент скорости.}$$

Жидкости, подчиняющиеся закону внутреннего трения Ньютона, называются нормальными, или ньютоновскими. Однако в промышленной практике приходится иметь дело и с неньютоновскими жидкостями (растворы многих полимеров, густые суспензии, пасты (бингамовские пластичные, псевдопластичные, дилатантные)).

## Осаждение частиц под действием силы тяжести

Рассмотрим движение тела в жидкости на примере осаждения твёрдой частицы в неподвижной среде под действием силы тяжести. Если частица массой  $m$  (и весом  $mg$ ) начинает падать под действием силы собственного веса, то скорость её движения первоначально возрастает со временем. При полном отсутствии сопротивления среды скорость  $\omega$  менялась бы во времени по известному закону  $\omega = gt$ . Однако с увеличением скорости будет расти, согласно уравнению  $R = \zeta S \frac{\rho \omega^2}{2}$ , сопротивление движению частицы и соответственно уменьшаться её ускорение. В результате через короткий промежуток времени наступает динамическое равновесие: сила тяжести, под действием которой частица движется, станет равна силе сопротивления среды. Начиная с этого момента, ускорение движения будет равно нулю, и частица станет двигаться равномерно с постоянной скоростью – скоростью осаждения  $\omega_{oc}$ .

Сила, движущая шарообразную частицу диаметром  $d$ , выражается разностью между её весом и выталкивающей архимедовой силой, равной весу жидкости (среды) в объеме частицы:

$$\frac{\pi d^3}{6} g(\rho_r - \rho)$$

Сила сопротивления среды:  $R = \zeta \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho \omega_{oc}^2}{2}$

Скорость осаждения можно найти из уравнения равенства силы, движущей частицу, и силы сопротивления среды:

$$\frac{\pi d^3}{6} g(\rho_r - \rho) = \zeta \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho \omega_{oc}^2}{2}$$

$$\text{откуда } \omega_{oc} = \sqrt{\frac{4gd(\rho_r - \rho)}{3\zeta\rho}} \quad (1)$$

Для ламинарной области:  $\zeta = \frac{24}{Re}$

$$\omega_{oc} = \frac{d^2 g(\rho_r - \rho)}{18\mu}$$

Отсюда можно найти максимальный размер частиц, осаждение которых происходит по закону Стокса.

$$\text{Для этого } Re = 2 ; \omega_{oc} = \frac{\mu Re}{d\rho}$$

$$d_{max} = \sqrt[3]{\frac{36\mu}{\rho g(\rho_r - \rho)}} \approx 1.56 \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{\rho(\rho_r - \rho)}}$$

В случае переходной области  $2 < Re < 500$  получаем:

$$\omega_{oc} \approx 0,78 \frac{d^{0.43} (\rho_r - \rho)^{0.715}}{\rho^{0.285} \mu^{0.43}}$$

Аналогично для автомодельной области  $Re > 500$  получаем:

$$\omega_{oc} \approx 5,46 \sqrt{\frac{d(\rho_r - \rho)}{\rho}}$$

Для того чтобы выбрать одно из расчетных уравнений необходимо знать значение критерия  $Re$ , а туда входит значение  $\omega_{oc}$ . Поэтому расчет  $\omega_{oc}$  по приведенным выше уравнениям возможен только методом последовательных приближений. Вследствие трудоёмкости метода последовательных приближений удобно для определения  $\omega_{oc}$  использовать метод предложенный Лященко П.В. Этот метод основан на преобразовании уравнения (1) путем подстановки в него скорости осаждения, выраженной через  $Re$  и возведения обеих частей уравнения в квадрат.

$$\frac{Re^2 \mu^2}{d^2 \rho^2} = \frac{4gd(\rho_r - \rho)}{3\zeta\rho} \quad \text{отсюда}$$

$$\text{Re}^2 \zeta = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \frac{\rho_r - \rho}{\rho} \Rightarrow \text{Ar} = \frac{d^3 \rho^2 g}{\mu^2} \cdot \frac{\rho_r - \rho}{\rho}$$

таким образом: 
$$\zeta \text{Re}^2 = \frac{4}{3} \text{Ar}$$

Для ламинарной области 
$$\frac{24}{\text{Re}} \text{Re}^2 = \frac{4}{3} \text{Ar} \Rightarrow \text{Re} = \frac{\text{Ar}}{18}$$

Предельное значение Ar для этой области  $\text{Ar}_{\text{кр}} = 18 \cdot 2 = 36$

Для переходного режима  $2 < \text{Re} < 500$

$$\text{Re}^{1.4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\text{Ar}}{18.5} \text{ предельное значение Ar} = 83\,000$$

Для автомодельной области  $\text{Re} > 500$

$$\text{Re} = 1.74 \sqrt{\text{Ar}}$$

Скорость осаждения частицы не шарообразной формы меньше, чем скорость осаждения шарообразных частиц.

$$\omega'_{\text{ос}} = \varphi \omega_{\text{ос}}$$

где  $\varphi$  – коэффициент формы.

Для угловатых частиц  $\varphi \approx 0,66$ , для продолговатых  $\varphi \approx 0,58$  (свободное и стесненное осаждение).

## ПРИМЕР ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДА

5,0 кг/с 30% -го раствора уксусной кислоты в воде подается из резервуара с давлением 1 ат в ректификационную колонну, абсолютное давление в которой  $p_{абс} = 0,80$  ат. Точка подачи раствора в колонну расположена на 8,0 м выше уровня раствора в резервуаре (рисунок 1). Длина трубопровода от резервуара до теплообменника 600 м; на этом участке имеется нормальная диафрагма с диаметром отверстия 48 мм, две задвижки, один вентиль и 12 плавных поворотов на  $90^\circ$  при относительном радиусе поворота  $R_0/d = 4$ . В четырехходовом кожухотрубчатом теплообменнике раствор подогревается от 15 до  $90^\circ\text{C}$ . Теплообменный аппарат (ТОА) имеет общее число труб 206, их длина 4,0 м и диаметр 25 X 2 мм. Температура внутренней поверхности стенок труб, внутри которых проходит нагреваемый раствор, составляет  $97^\circ\text{C}$ . Длина трубопровода от теплообменника до ректификационной колонны 6,0 м; на этом участке установлена задвижка и имеются два поворота: один на  $90^\circ$  и один на  $120^\circ$  при  $R_0/d = 3$ .

Требуется выбрать оптимальный с точки зрения приведенных затрат диаметр трубопровода и подобрать марку насоса, устанавливаемого на уровне исходного резервуара.

1. Проведение гидравлических расчетов требует определения значений плотности и динамической вязкости раствора при трех значениях температур.

Находятся значения плотностей раствора при  $15^\circ\text{C}$ .

$$1/\rho_{см} = 0,70/999 + (1-0,70)/1054; \quad \text{откуда } \rho_{см} = 1015 \text{ кг/м}^3,$$

где  $\rho_{в} = 999$  и  $\rho_{к} = 1054$  – плотность воды и уксусной кислоты при  $15^\circ\text{C}$ ,  $\text{кг/м}^3$ ;

$\bar{x} = 0,70$  - массовая доля воды (низкокипящий компонент смеси);

при 90 °С

$$1/\rho_{\text{см}} = 0,70/965 + (1 - 0,7)/970; \quad \rho_{\text{см}} = 966 \text{ кг/м}^3;$$

при  $(15 + 90)/2 = 92,5$  °С - средней температуре раствора в теплообменнике — аналогично  $\rho_{\text{см}} = 995 \text{ кг/м}^3$ .

Значения динамической вязкости раствора

при 15 °С

$$\mu_{\text{см}} = 0,00115^{0,886} * 0,00140^{0,114} = 1,18 * 10^{-3} \text{ Па} * \text{с},$$

где  $\mu_{\text{в}} = 0,00115$  и  $\mu_{\text{к}} = 0,00118$  — вязкость воды и уксусной кислоты при 15°С, Па\*с;

$x = (0,70/18)/(0,70/18 + 0,30/60)$ —молярная доля воды, 18 и 60 - относительные молекулярные массы воды и кислоты;

0,114 — молярная доля кислоты;

при 90 °С аналогично:

$$\mu_{\text{см}} = 0,00029^{0,886} * 0,00050^{0,114} = 0,309 * 10^{-3} \text{ Па} * \text{с}$$



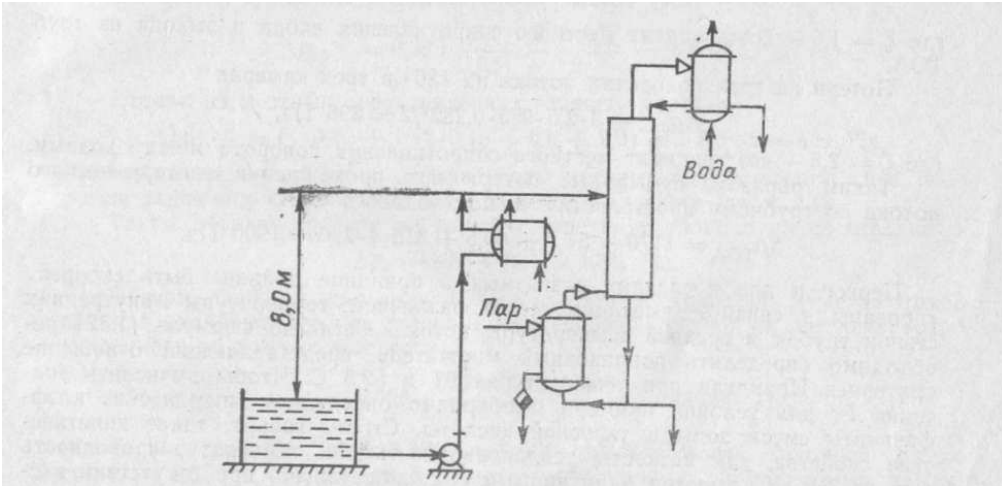


Рисунок 1 – Схема подачи жидкости через теплообменный аппарат.

при 92,5 °С

$$\mu_{\text{см}} = 0,00055^{0,886} * 0,00080^{0,114} = 0,574 * 10^{-3} \text{ Па*с}$$

2. Производится расчет разности давлений, необходимой для преодоления гидравлического сопротивления трубного пространства теплообменного аппарата.

Скорость движения раствора по трубам согласно уравнению расхода:

$$\omega_{\text{тр}} = \frac{5,0 / 995}{0,785 (0,025 - 2 * 0,002)^2 (206 / 4)} = 0,282 \text{ м/с}$$

Критерий Рейнольдса

$$\text{Re} = 0,282 * 0,021 * 995 / 0,574 * 10^{-3} = 10\ 300$$

Коэффициент трения при  $\text{Re} = 10\ 300$  и  $d/e = 21/0,2 = 105$ ,

где  $e = 0,2$  мм – средняя шероховатость внутри стальных труб,  $\lambda = 0,039$ .

Находятся потери на трение в четырех последовательных ходах теплообменника:

$$\Delta p_{\text{тр}} = 0,039 \frac{4 * 4}{0,021} \frac{995 * 0,282^2}{2} = 1170 \text{ Па}$$

Скорость раствора во входном и выходном штуцерах (принимая диаметры штуцеров 159 X 4,5 мм):

$$\omega_{\text{ш, вх}} = \frac{5,0/1015}{0,785 * 0,150^2} = 0,275 \text{ м/с} ; \quad \omega_{\text{ш, вых}} = \frac{5,0/996}{0,785 * 0,150^2} = 0,289 \text{ м/с}$$

Потери давления при входе в трубное пространство ТОА и выходе из него:

$$\Delta p_{\text{ш, вх}} = 1,5 * 1015 * 0,275^2 / 2 = 57,6 \text{ Па}; \quad \Delta p_{\text{ш, вых}} = 1,5 * 966 * 0,289^2 / 2 = 60,5 \text{ Па},$$

где  $\zeta = 1,5$  — коэффициент местного сопротивления выхода из штуцера и входа в штуцер.

Потери давления на четырех входах и четырех выходах из труб ТОА в его камеры:

$$\Delta p_{\text{т}} = 8 * 1,0 * 995 * 0,287^2 / 2 = 316 \text{ Па},$$

где  $\zeta = 1,0$  – коэффициент местного сопротивления входа и выхода из труб ТОА.

Потери на трех поворотах потока на  $180^\circ$  в трех камерах

$$\Delta p_{\text{пов}} = 3 * 2,5 * 995 * 0,282^2 / 2 = 296 \text{ Па},$$

где  $\zeta = 2,5$  – коэффициент местного сопротивления поворота между ходами.

Таким образом, суммарные потери при прохождении изотермического потока по трубному пространству четырехходового ТОА

$$\Delta p_{\text{ТОА}} = 1170 + 57,6 + 60,5 + 316 + 296 = 1900 \text{ Па.}$$

Первое и два последних слагаемых в принципе должны быть скорректированы в связи с имеющим место различием температуры внутренних стенок трубок и средней температуры потока. Необходимо определить поправочный множитель, представляющий отношение критериев Прандтля при температурах 97 и 52,5 °С. Чтобы вычислить значения  $Pr$  для условий примера, необходимо определять кинетические коэффициенты смеси воды и уксусной кислоты. Строго говоря, такие кинетические свойства, как вязкость, теплопроводность или температуропроводность не являются аддитивными и, следовательно, при отсутствии экспериментальных данных по значениям этих свойств непосредственно для смеси нужного состава, да еще в зависимости от температуры (что почти всегда имеет место на практике), отношение  $Pr/Pr_w$  приходится вычислять приближенно.

Для условий примера приближенный характер оценки влияния неизотермичности вполне возможен, поскольку относительная доля потерь энергии внутри ТОА мала по сравнению с потерями на протяженном участке трубопровода до теплообменника (см. ниже). В первом приближении вместо отношения критериев Прандтля используется отношение динамических вязкостей, как наиболее значительно изменяющегося в зависимости от температуры кинетического свойства смеси по сравнению с изменением теплоемкости и теплопроводности:  $\kappa \approx (\mu_{\text{см}, 97} / \mu_{\text{см}, 52,5})^{1/3} = (0,000264 / 0,000574)^{1/3} = 0,772$ . (Если согласно иному приближению все же принять значения критериев Прандтля по правилу аддитивности, то  $Pr_{\text{см}, 97} = Pr_{\text{в}, 97} \bar{X} + Pr_{\text{к}, 97} (1 - \bar{X}) = 1,5 * 0,70 + 9,2(1 - 0,70) = 3,81$ ;  $Pr_{\text{см}, 52,5} = 3,5 * 0,70 + 11,6(1 - 0,70) = 5,93$ , где значения критериев Прандтля для чистых

веществ при температурах 97 и 52,5 °С находятся по рисунку X;  $\kappa = (3,81/5,93)^{1/3} = 0,863$ ). Влияние неизотермичности более заметным оказалось в первом случае,  $\kappa = 0,772$ , что и учитывается путем умножения на этот коэффициент первого, четвертого и пятого слагаемых суммарных потерь в трубном пространстве ТОА:

$$\Delta p_{\text{ТОА}} = 1170 * 0,772 + 57,6 + 60,5 + (316 + 296) 0,772 = 1490 \text{ Па.}$$

Для расчета потерь на трубопроводах необходимо предварительно задаться значением скорости движения смеси. Согласно данным п. 7 принимается значение  $\omega = 1,0$  м/с, соответствующее течению капельных жидкостей под напором. Тогда диаметр трубы для участка от ТОА до колонны:

$$d = \sqrt{(5,0/966)/(0,785*1,0)} = 0,0812 \text{ м}$$

В стандартах на стальные трубы имеется размер 89 X 4 мм (таблица 1); внутренний диаметр такой трубы практически равен найденному значению.

Вычисляется критерий Рейнольдса для горячего участка трубопровода

$$Re_r = 1,0 * 0,081 * 966 / 0,000309 = 2,53 * 10^5$$

Шероховатость стальной трубы  $e$  — 0,2 мм, тогда  $d/e = 81/0,2 = 405$  и коэффициент трения  $\lambda = 0,025$ .

Потери на трение на шестиметровом участке трубопровода

$$\Delta p_{\text{тр, з}} = 0,025 \frac{6,0}{0,081} \frac{966 * 1,0^2}{2} = 900 \text{ Па}$$

Потери на местных сопротивлениях горячего участка

$$\Delta p_{m. c, \Gamma} = (1*0,13+1,17*0,13 + 0,5+ 1,0) 966*1,0^2/2 = 861 \text{ Па}$$

где слагаемые в скобках – коэффициенты местных сопротивлений двух поворотов, задвижки и выхода из трубопровода в колонну.

Таким образом, потери на горячем участке трубопровода составляют

$$\Delta p_2 = 900 + 861 = 1761 \text{ Па}$$

Потери разности давления на протяженном, холодном участке трубопровода складываются из потерь на собственно трение, на местные сопротивления и на подъем жидкости:

$$\Delta p_{mp, x} = 0,025 \frac{600}{0,081} \frac{1015 * 0,956^2}{2} = 85900 \text{ Па}$$

где  $\omega_x = (5,0/1015)/(0,785*0,081^2) = 0,956 \text{ м/с}$  – скорость холодной жидкости;

$d = 0,081 \text{ м}$  – внутренний диаметр трубопровода, принимаемый равным принятому выше диаметру горячего участка трубопровода;

$\lambda = 0,025$  – коэффициент трения при  $d/e = 81/0,2 = 405$

$Re_x = 0,956*0,081*1015/1,18*10^{-3} = 6,66*10^5$

Таблица 1 – Диаметры стальных труб

Наружный диаметр и толщина стенки, мм	Материал	Наружный диаметр и толщина стенки, мм	Материал	Наружный диаметр и толщина стенки, мм	Материал
14X2	у, н*	48X3	н	133X6	н
14X2,5	н	48X4	у	133X7	у
14X3	у	56X3,5	н	159X4,5	у
16X2	у, н	57X2,5	у	159X5	у

18X3	У, Н	57X2,5	У	159X6	Н
20X2	Н	57X4	У	159X7	У
20X2,5	У	70X3	Н	194X6	У
22X2	У, Н	70X3,5	У	194XЮ	У
22X3	У	76X4	У	219X6	У
25X2	У, Н	89X4,5	У	219X8	У
25X3	У	89X6	У	245X7	У
32X3	Н	95X4	У, Н	245XЮ	У
32X3,5	У	95X5	У	273XЮ	У
38X2	Н, У	108X4	У	325XЮ	У
38X3	Н	108X5	У	325X12	У
38X4	У	108X6	Н	377XЮ	У
45X3,5	Н	133X4	У	426XЧ	У
45X4	У				

\* У – углеродистая; Н – нержавеющая сталь.

Потери на местные сопротивления холодного участка

$$\Delta p_{м.с} = (12,3 + 2*0,5 + 0,65*0,9 + 12*1,0*0,14)1015*0,956^2/2 = 9665$$

Па

где в скобках указаны коэффициенты местных сопротивлений для нормальной диафрагмы при модуле  $m=(48/81)^2=0,35$ ; двух задвижек, вентиля и двенадцати поворотов.

Затраты удельной энергии на придание потоку скорости

$$\Delta p_{ск} = 1015*0,956^2/2 = 464 \text{ Па,}$$

$$\Delta p_x = \Delta p_{тр,х} + \Delta p_{м.с,х} = 85\,900 + 9\,665 = 95\,565 \text{ Па.}$$

Затраты удельной энергии на подъем холодной жидкости

$$\Delta p_{под} = \rho_{см}gH = 1015*9,81*8,0 = 79\,700 \text{ Па.}$$

Разность давлений в резервуаре и в колонне

$$\Delta p_{\text{доп}} = (1,0 - 0,8) 9,81 \cdot 10^4 = 19\,600 \text{ Па.}$$

Общий перепад давлений, необходимый на преодоление всех видов сопротивлений трубопровода и теплообменника, а также на создание скорости, на подъем потока с учетом  $\Delta p_{\text{доп}}$ :

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{общ}} = & \Delta p_{\text{ТООА}} + \Delta p_{\text{Г}} + \Delta p_{\text{тр, х}} + \Delta p_{\text{м. с. х}} + \Delta p_{\text{ск}} + \Delta p_{\text{под}} - \Delta p_{\text{доп}} = 1\,490 + 1 \\ & 761 + 85\,900 + 9\,665 + 464 + 79\,700 - 19\,600 = 159\,400 \text{ Па.} \end{aligned}$$

Электрическая мощность на транспортирование  $5,0/1015 = 4,93 \text{ м}^3/\text{с}$  смеси по гидравлической сети:

$$N = 159,4 \cdot 4,93 / 0,6 = 1,31 \text{ кВт.}$$

Затраты на электроэнергию при её стоимости 0,12 руб/кВт\*ч и круглосуточной работе в течение 330 дней в году

$$\mathcal{E} = 1,31 \cdot 0,12 \cdot 24 \cdot 330 = 1245 \text{ руб/год. |}$$

## ПРИМЕР РАСЧЕТА БАРАБАННОГО ВАКУУМ-ФИЛЬТРА

Рассчитать необходимую поверхность фильтрования барабанного вакуум-фильтра (рисунок 2)

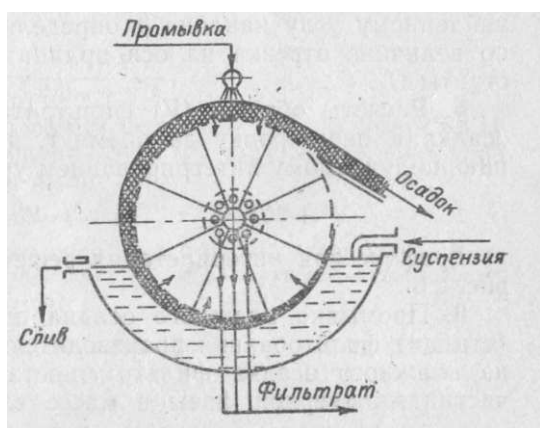


Рисунок 2

производительностью 2,8 т/сут сухого осадка гидроксидоксида никеля по следующим исходным данным: 1) разрежение внутри барабана 400 мм рт. ст.; 2) удельное сопротивление осадка  $\gamma_{ос} = 43,2 \times 10^{10}$  м/кг сухого осадка; 3) удельное сопротивление фильтрующей ткани  $\gamma_{т} = 11,4 \times 10^{10}$  м/м<sup>2</sup>; 4) масса твердого вещества, отлагающегося на ткани при получении 1 м<sup>3</sup> фильтрата, составляет  $c = 208$  кг/м<sup>3</sup>; 5) заданное значение толщины слоя аморфного осадка  $\delta = 5$  мм; 6) объем влажного осадка, получаемого при прохождении через ткань 1 м<sup>3</sup> фильтрата, составляет 0,686 м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>; 7) плотность влажного осадка при его влажности 75,2 %  $\rho = 1220$  кг/м<sup>3</sup>; плотность фильтрата 1110 кг/м<sup>3</sup>; 8) общее число секций фильтра  $z = 24$ ; 9) динамическая вязкость фильтрата при его температуре 50 °С  $\mu = 1,51 \times 10^{-3}$  Па\*с; 10) время просушки осадка на фильтре  $\tau_c = 1,5$  мин; 11) массовая доля твердой фазы в исходной суспензии 10,7%.

*Решение:* Поверхность фильтрования  $F$  (в м<sup>2</sup>) определяется из выражения

$$F = V_{общ} / V,$$

где  $V_{общ}$  – производительность по фильтрату, м<sup>3</sup>/ч;

$V$  – производительность 1 м<sup>2</sup> поверхности фильтрования по фильтрату, равная  $v \cdot n$ , м<sup>3</sup>/(м<sup>2</sup>\*ч);  $v$  – производительность 1 м<sup>2</sup> фильтрата за один оборот, м<sup>3</sup>/м<sup>2</sup>;  $n$  – частота вращения барабана, ч<sup>-1</sup>.

Определяется производительность по фильтрату.

Производительность по сухому осадку должна составлять 2,8 т/сут или  $2,8 \times 10^3 / 24 = 117$  кг/ч. В пересчете на влажный осадок это составит  $117 \times 100 / (100 - 75,2) = 472$  кг/ч.

Расход поступающей суспензии при массовой доле твердой фазы 10,7% равен  $117 \times 100 / 10,7 = 1092$  кг/ч. Выход фильтрата составит  $1092 - 472 = 620$  кг/ч или, при плотности фильтрата 1110 кг/м<sup>3</sup>,  $620 / 1110 = 0,559$  м<sup>3</sup>/ч = 13,4 м<sup>3</sup>/сут.

Таким образом  $V_{общ} = 0,559$  м<sup>3</sup>/ч.



Для определения  $V$  необходимо знать производительность  $1 \text{ м}^2$  поверхности фильтра за один оборот барабана, т. е. за время прохождения зоны фильтрования и частоту вращения барабана.

При толщине слоя осадка  $\delta=5 \text{ мм}$  и объеме влажного осадка, отлагающегося на ткани при прохождении  $1 \text{ м}^3$  фильтра, равном  $0,686 \text{ м}^3/\text{м}^3$ , необходимая поверхность зоны фильтрования, приходящаяся на  $1 \text{ м}^3$  фильтра, составит  $0,686/0,005 = 137,5 \text{ м}^2/\text{м}^3$ . Через  $1 \text{ м}^2$  поверхности зоны фильтрования пройдет объем фильтрата равный  $v = 1/137,5 = 0,000728 \text{ м}^3/\text{м}^2$ .

Для определения частоты вращения барабана нужно знать время фильтрования  $t$ , в течение которого образуется осадок толщиной  $5 \text{ мм}$ . Используется основное уравнение периодического процесса, в котором  $V = 7,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{м}^2$ .

Значение константы  $K$  находится по соотношению:

$$K = \frac{2\Delta p}{\mu c r} = \frac{2 \cdot 400 \cdot 133}{1,51 \cdot 10^{-3} \cdot 208 \cdot 43,2 \cdot 10^{10}} = 0,785 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$$

Константа  $C$  может быть найдена по соотношению, приведенному в специальной литературе:

$$C = r_{II}/(r_{ocC}) = 11,4 \cdot 10^{10}/(43,2 \cdot 10^{10} \cdot 208) = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{м}^2$$

$$\tau = [(7,28 \cdot 10^{-3})^2 + 2 \cdot 7,28 \cdot 10^{-3} \cdot 1,28 \cdot 10^{-3}]/0,785 \cdot 10^{-6} = 91 \text{ с} = 1,52 \text{ мин.}$$

Угловая скорость вращения барабана находится по формуле:

$$\omega = (360 - \varphi')/(\tau + \tau_c),$$

где  $\varphi'$ — угол, занимаемый зоной съема осадка и мертвой зоной;

значение  $\varphi'$  по практическим данным составляет  $70^\circ$ . Тогда

$$\omega = (360 - 70)/(1,52 + 1,5) = 96,2 \text{ град/мин.}$$

Общая продолжительность одного оборота барабана (рабочего цикла)

$$\tau_{об} = 360/96,2 = 3,73 \text{ мин.}$$

Частота вращения барабана

$$n = 60/3,73 = 15,6 \text{ ч}^{-1}$$

Время просушки, съема осадка и пребывания в мертвых зонах

$$\tau_{суш} = 3,73 - 1,52 = 2,21 \text{ мин.}$$

Число секций, одновременно находящихся в зоне просушки, в зоне съема осадка и в мертвых зонах

$$z_{суш} = 2,21 * 24 / 3,73 \approx 14$$

Следовательно, непосредственно в зоне фильтрования находится 24 — 14 = 10 секций барабана.

Необходимая поверхность фильтрования

$$F = V_{общ} / (v n) = 0,559 / (0,000728 * 15,5) = 4,77 \text{ м}^2,$$

что дает основание принять вакуум – фильтр с поверхностью фильтрования 5 м<sup>2</sup>

### **Расчет и подбор диаметра трубопровода**

Газ с температурой  $t_0$  выходит из реактора, работающего под разрежением  $\Delta p$  по отношению к атмосферному давлению, проходит очистку от пыли в циклоне и затем поступает в адсорбер с неподвижным слоем монофериических частиц адсорбента.

Расход газа  $G$ , кг/с. Перед адсорбером газ охлаждается в кожухотрубчатом теплообменнике, имеющем следующие характеристики: диаметр кожуха  $D_k$ , длина труб  $l$ , диаметр штуцеров  $d_{шт}$ , диаметр труб  $d_{ТР} = 25 \times 2$  мм. Диаметр адсорбера  $D$  высота слоя адсорбента  $H$ , диаметр частиц адсорбента  $d$ .

Гидравлическая сеть имеет нормальную диафрагму с модулем  $m$ ,  $n_1$  задвижек,  $n_2$  плавных поворотов на  $90^\circ$  ( $R_0/d_{TP} = 4$ ). Общая длина трубопровода  $L$ . На выходе из сети (рисунок 3) давление атмосферное.

Подобрать оптимальный диаметр стального трубопровода и вентилятор, обеспечивающий заданный расход газа. Диаметр трубопровода выбирается для участка гидравлической сети наибольшей длины  $L_1$  от реактора до теплообменника. Цена 1 кВт\*ч электроэнергии. (Изменение цен не изменяет принципа расчета.) Газ может подаваться в трубное пространство одноходового теплообменника или в межтрубное пространство без перегородок.

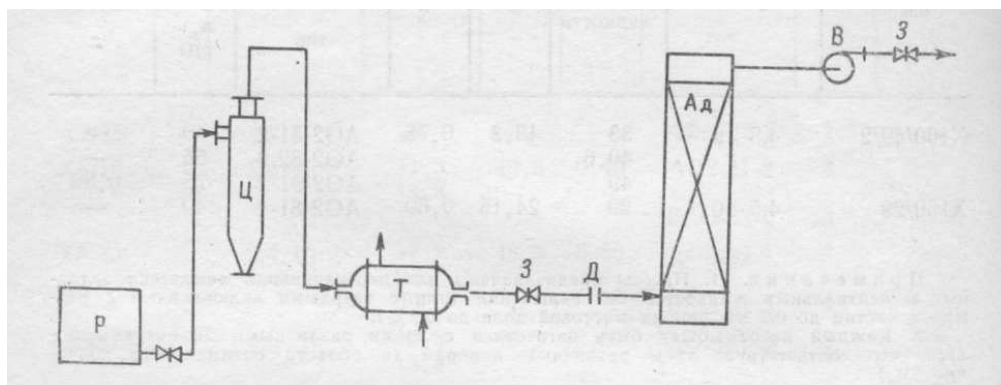


Рисунок 3 – Схема установки.

Р — реактор; Ц — циклон; Т — теплообменник; Ад — адсорбер;  
В — вентилятор; З — задвижки, Д — диафрагма.

Таблица 2 – Исходные данные

№ п/п	Очищаемый газ	$G$ , кг/ч	$D$ , м	$H$ , м	$t_0$ , °C	$t_1$ , °C	$L$ , м	$L_1$ , м	$d$ , мм	$m$	$n_1$	$n_2$	$\Delta p$ , Па	$D_K$ , мм	$l$ , м	$d_{ш}$ , мм
1		0,5	1,5	2	100	25	200	120	3	0,4	2	16	500	400	6	147
2		0,5	1,8	4	120	30	300	240	5	0,5	2	10	200	400	6	147

3	Воздух	0,5	1,2	3	150	40	350	280	3	0,6	4	15	300	400	6	147	
4		1,2	2,5	4	150	20	250	180	3	0,4	4	14	300	600	6	207	
5		1,5	2,8	5	180	30	200	160	5	0,5	3	15	350	600	6	207	
6		1,0	2,2	3	200	35	300	180	3	0,6	2	16	500	600	9	207	
7		1,8	2,5	5	160	30	250	150	3	0,3	3	8	150	800	6	259	
8		1,5	2,0	6	180	40	200	120	4	0,4	4	10	200	800	6	259	
9		2,0	2,5	3	200	35	250	180	5	0,5	3	14	300	800	9	259	
10		Ацетилен	1,2	2,0	6	180	40	400	280	5	0,4	4	10	400	600	9	207
11			2,0	3,0	4	140	25	350	220	6	0,5	5	18	200	800	6	259
12	Диоксид углерода	0,8	1,6	4,5	180	30	400	250	4	0,4	3	18	400	400	9	147	
13		0,8	1,4	2,5	200	35	350	220	6	0,3	5	12	500	400	9	147	
14		1,0	2,0	3	120	25	300	200	4	0,6	6	10	250	600	6	207	
15		1,8	2,2	5	220	25	350	250	6	0,6	2	16	400	800	9	259	

### Расчет рабочей поверхности греющей камеры

Рассчитать необходимую поверхность греющей камеры выпарного аппарата, в вертикальных трубах которой при средней температуре кипения  $t_{кип} = 90$  °С испаряется  $W = 2,0$  т/ч воды из 20 %-го раствора хлорида натрия. Абсолютное давление сухого греющего пара  $1,8$  кгс/см<sup>2</sup>. Высота кипяtilьных труб  $H = 5,0$  м. Теплопроводность раствора при температуре кипения  $\lambda_2 = 0,65$  Вт/(м\*К).

*Решение.* Разность температур теплоносителей

$$\Delta t_{cp} = t_{конд} - t_{кип} = 116,3 - 90 = 26,3 \text{ К},$$

где  $t_{конд} = 116,3$  °С – температура конденсации водяного пара при  $1,8$  кгс/см<sup>2</sup>.

Коэффициент теплоотдачи от конденсирующегося водяного пара к наружной поверхности вертикальных труб:

$$\alpha_1 = 2,04 \frac{7,19 * 10^3}{(5,0 \Delta t_1)^{1/4}} = 9780 \Delta t_1^{-0,25}$$

где  $A_i = 7,19 * 10^3$  при  $t_{\text{конд}} = 116,3$  °С;

$\Delta t_1 = t_{\text{конд}} - t_{w1}$ ,  $t_{w1}$  – температура наружной поверхности труб со стороны пленки конденсатора.

Плотность теплового потока от пара к наружной поверхности труб:

$$q_1 = \alpha_1 \Delta t_1 = 9,78 * 10^3 \Delta t_1^{-0,25} \quad \Delta t_1 = 9,78 * 10^3 \Delta t_1^{0,75}$$

Коэффициент теплоотдачи от внутренней поверхности вертикальных труб – к кипящему раствору:

$$\alpha_2 = 0,0801 \left( \frac{0,65^2 * 1115}{0,505 * 10^{-3} * 67,7 * 10^{-3} (273 + 90)} \right)^{1/3} q^{2/3} = 2,68 q^{2/3}$$

$$\text{где } b = 0,075 + 0,75 \left( \frac{0,622}{1115 - 0,622} \right)^{2/3} = 0,0801 ;$$

физические свойства 20%-го раствора хлорида натрия определены по таблице, а плотность водяного пара при  $t_{\text{кип}} = 90$  °С, и атмосферном давлении – по закону состояния идеальных газов:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{18}{22,4} \frac{273}{273 + 90} = 0,622 \text{ кг/м}^3$$

Согласно таблице принимаются значения тепловых проводимостей загрязнений стенки трубы: со стороны пара 5800 Вт/(м<sup>2</sup>\*К) и со стороны кипящего раствора 2900 Вт/(м<sup>2</sup>\*К). Тогда суммарная проводимость обоих загрязнений и самой стальной стенки:

$$1/\sum r_T = (1/5800 + 0,002/46,5 + 1/2900)^{-1} = 1785 \text{ Вт}/(\text{м}^2 * \text{К})$$

В качестве первого приближения принимается температура наружной поверхности внешнего слоя загрязнений  $t_{w1} = 114^\circ\text{C}$ . Тогда коэффициент теплоотдачи и плотность теплового потока от пара:

$$\alpha'_1 = 9,78 * 10^3 (116,3 - 114)^{-1/4} = 7,94 * 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 * \text{К})$$

$$q'_1 = 7,94 * 10^3 (116,3 - 114) = 18,3 * 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2$$

Температура поверхности загрязнений со стороны раствора

$$t'_{w2} = t'_{w1} - q'_1 \sum r_T = 114 - 18,3 * 10^3 / 1785 = 103,8^\circ\text{C}$$

Первое приближение коэффициента теплоотдачи к раствору:

$$\alpha'_2 = 2,68(q'_1)^{2/3} = 2,68(18,3 * 10^3)^{2/3} = 1,86 * 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 * \text{К})$$

Вычисляется первое приближение для плотности теплового потока к кипящему раствору:

$$q'_2 = 1,86 * 10^3 (103,8 - 90) = 25,6 * 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2$$

Поскольку  $q'_1 < q'_2$ , то во втором приближении температура стенки со стороны пара должна быть уменьшена; например до  $t''_{w1} = 113^\circ\text{C}$ .

Вновь вычисляются коэффициент теплоотдачи и плотность теплового потока от пара к наружной стенке:

$$\alpha''_1 = 9,78 * 10^3 (116,3 - 113)^{-1/4} = 7,25 * 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 * \text{К})$$

$$q''_1 = 7,25 * 10^3 (116,3 - 113) = 24,0 * 10^3 \text{ Вт}/\text{м}^2$$

Температура внутренней поверхности

$$t''_{w2} = 113 - 24,0 * 10^3 / 1785 = 99,6^\circ\text{C}$$

Вторые приближения для коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока к раствору:

$$\alpha_2'' = 2,68(24,0 * 10^3)^{2/3} = 2223 \quad \text{Вт}/(\text{м}^2 * \text{К})$$

$$q_2'' = 2223(99,6 - 90) = 21300 \quad \text{Вт}/\text{м}^2$$

Поскольку во втором приближении наоборот,  $q_1'' > q_2''$ , то это означает, что истинная температура  $t_{w1}$  лежит между  $t'_{w1}$  и  $t''_{w1}$

Для третьего приближения может быть использована линейная интерполяция результатов (рисунок 4), полученных в первых двух приближениях. Из графика принимается  $t'''_{w1} = 113,3^\circ\text{С}$ . Расчёт проводится в аналогичной последовательности:

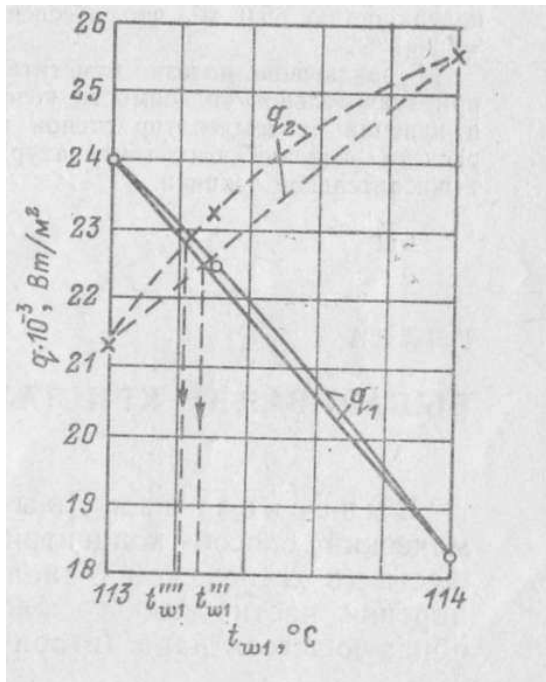


Рисунок 4 – Графическая иллюстрация итерационного метода определения температуры поверхности стенки.

$$\begin{aligned} \alpha_1''' &= 9,78 * 10^3 (116,3 - 113,3)^{-1/4} = 7,48 * 10^3 && \text{Вт / (м}^2 * \text{К)} \\ q_1''' &= 7,48 * 10^3 (116,3 - 113,3) = 22,4 * 10^3 && \text{Вт / м}^2 \\ t_{w2}''' &= 113,5 - 22,4 * 10^3 / 1785 = 101,0 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \alpha_2''' &= 2,68 (22,4 * 10^3)^{2/3} = 2,12 * 10^3 && \text{Вт / (м}^2 * \text{К)} \\ q_2''' &= 2,12 * 10^3 (101,0 - 90) = 23,4 * 10^3 && \text{Вт / м}^2 \end{aligned}$$

Разность значений плотностей тепловых потоков  $(23,4*10^3 - 22,4*10^3)/22,5*10^3 = 0,0465$  не превышает 4,7 %.

Повышение точности расчета может быть получено также из графика на рисунке 4, где нанесением результатов третьего приближения учитываются действительные криволинейные зависимости  $\alpha_1(t_{w1})$  и  $\alpha_2(t_{w1})$

В четвертом приближении принимается  $t_{w1} = 113,2^\circ\text{C}$  и производится аналогичный расчет:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 9,78 (116,3 - 113,2)^{-1/4} = 7,36 * 10^3 && \text{Вт / (м}^2 * \text{К)} \\ q_1 &= 7,36 * 10^3 (116,3 - 113,2) = 22,8 * 10^3 && \text{Вт / м}^2 \\ t_{w2} &= 113,2 - 22,8 * 10^3 / 1785 = 100,4 \text{ } ^\circ\text{C} \\ \alpha_2 &= 2,68 (22,8 * 10^3)^{2/3} = 2,155 * 10^3 && \text{Вт / (м}^2 * \text{К)} \\ q_2 &= 2,155 * 10^3 (100,4 - 90) = 22,4 * 10^3 && \text{Вт / м}^2 \end{aligned}$$

Теперь различие плотностей тепловых потоков составляет  $(22,8*10^3 - 22,4*10^3)/22,6*10^3 = 0,0177$ , то есть менее 2%, и дальнейшие приближения не требуются.

Можно определить значение коэффициента теплопередачи

$$K = (1/7360 + 1/1785 + 1/2155)^{-1} = 948 \text{ Вт/(м}^2*\text{К)}.$$

Тепловой поток, передаваемый от греющего пара к кипящему раствору:

$$Q = W_{г.вт.п} = (2,0*10^3/3600)2,285*10^6 = 1270*10^3 \text{ Вт}$$

где  $r_{вт.п} = 2,285*10^3$  Дж/кг – удельная теплота парообразования воды при



$$t_{\text{кип.}} = 90^{\circ}\text{C}.$$

Необходимая поверхность теплопередачи

$$F = 1270 \cdot 10^3 / (948 \cdot 26,3) = 50,7 \quad \text{м}^2$$

Принимается испаритель с высотой труб  $H=5,0$  м и теплообменной поверхностью  $65,0 \text{ м}^2$ , что обеспечивает запас  $(65,0 - 50,7) / 50,7 = 0,281 = 28,1$  %.

В заключение полезно отметить, что, как можно видеть на этом примере, при значительной зависимости коэффициентов теплоотдачи при конденсации и кипении от температур стенок необходима достаточно высокая точность расчета значений этих температур. При этом целесообразно использование вычислительной техники.

### Контрольные задачи

Задача 1.

#### І. Теоретическая часть

Массу газа, выпущенного из газгольдера, возможно определить по формуле:

$$M = M_1 - M_2 \quad [\text{кг}],$$

где  $M_1$  [кг] – начальная масса газа

$M_2$  [кг] – масса газа в конечном состоянии.

Для решения воспользуемся уравнением Менделеева–Клайперона:

$$P \cdot V = MRT, \text{ откуда}$$

$$M_1 = \frac{P_1 \cdot V}{R_{\text{см}} \cdot T_1} \quad [\text{кг}]$$

$$M_2 = \frac{P_2 \cdot V}{R_{\text{см}} \cdot T_2} \quad [\text{кг}], \text{ где } R_{\text{см}} \text{ – газовая постоянная смеси газов.}$$

Газовую постоянную смеси газов определяют по формуле:

$$R_{\text{см}} = \frac{R}{\mu_{\text{см}}} \quad [\text{Дж/кмоль} \cdot \text{град}],$$

где  $R = 8314 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{град)}$  – универсальная газовая постоянная

$\mu_{\text{см}}$  [кг/кмоль] – кажущаяся молекулярная масса смеси.

В свою очередь  $\mu_{\text{см}}$  рассчитывают по следующему уравнению:

$$\mu_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mu_i \text{ [кг/кмоль]},$$

где  $r_i$  – объемная доля газов, заданная по условию задачи;

$\mu_i$  – кажущаяся молекулярная масса составляющих газовую смесь,

принимаемая по справочным материалам.

Объемная доля газов определяется для каждого из компонентов из выражения:

$$r_i = \frac{V_i}{V_{\text{см}}},$$

где  $V_i = xV_{\text{см}}$ , а  $x$  – доля примесей по заданию.

## II. Решение задачи

Дано:

Месторождение газа – Тюменское.

$V = 400 \text{ м}^3$  – вместимость газгольдера

$P_1 = 0,75 \text{ МПа}$  – начальное давление в газгольдере

$P_2 = 0,05 \text{ МПа}$  – конечное давление в газгольдере

$t_1 = 30^\circ \text{C}$  – начальная температура газовой смеси

$t_2 = 15^\circ \text{C}$  – конечная температура газовой смеси

$P_{\text{бар}} = 0,1025 \text{ МПа}$  – барометрическое давление

$Q_{\text{н}}^{\text{г}} = 35800 \text{ кДж/м}^3$  – теплота горения топлива

Определить  $M = M_1 - M_2$  [кг] – ?

Решение:

Согласно задания из таблицы 3 выписываем по месторождению газа состав газа и из справочника молекулярную массу каждой составляющей части:

Таблица 3

Тюменское	Молекулярная масса
$H_2S$ следы	–
$CO_2$ 0,2%	44,1
$CH_4$ 94%	16,03
$C_2H_6$ 1,2%	30,07
$C_3H_8$ 0,7%	44,09
$C_4H_{10}$ 0,4%	58,12
$C_5H_{12}$ 0,2%	72,15
$N_2$ 3,3%	28,03

Определяем объемы составляющих газовой смеси:

$$V_{CO_2} = V \cdot \frac{0,2}{100} = 400 \cdot \frac{0,2}{100} = 0,8 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{CH_4} = 400 \cdot \frac{94}{100} = 376 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{C_2H_6} = 400 \cdot \frac{1,2}{100} = 4,8 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{C_3H_8} = 400 \cdot \frac{0,7}{100} = 2,8 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{C_4H_{10}} = 400 \cdot \frac{0,4}{100} = 1,6 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{C_5H_{12}} = 400 \cdot \frac{0,2}{100} = 0,8 \text{ [м}^3\text{]}$$

$$V_{N_2} = 400 \cdot \frac{3,3}{100} = 13,3 \text{ [м}^3\text{]}$$

Объемная доля газов:

$$r_{CO_2} = \frac{V_{CO_2}}{V} = \frac{0,8}{400} = 0,002$$

$$r_{CH_4} = \frac{376}{400} = 0,94$$

$$r_{C_2H_6} = \frac{4,8}{400} = 0,012$$

$$r_{C_3H_8} = \frac{2,8}{400} = 0,007$$

$$r_{C_4H_{10}} = \frac{1,6}{400} = 0,004$$

$$r_{C_5H_{12}} = \frac{0,8}{400} = 0,002$$

$$r_{N_2} = \frac{13,3}{400} = 0,033$$

Кажущаяся молекулярная масса смеси:

$$\mu_{\text{см}} = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i = 0,002 \cdot 44,1 + 0,94 \cdot 16,032 + 0,012 \cdot 30,07 + \\ 0,007 \cdot 44,09 + 0,004 \cdot 58,124 + 0,033 \cdot 28,026 = 16,98 \quad [\text{кг/кмоль}]$$

Газовая постоянная смеси:

$$R_{\text{см}} = \frac{8314}{\mu_{\text{см}}} = \frac{8314}{16,98} = 483,69 \quad [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})]$$

Абсолютное давление газа в начале и конце процесса:

$$p_1 = (P_1 + P_{\text{бар}}) = (0,75 + 0,1025) \cdot 10^6 = 0,853 \cdot 10^6 \quad [\text{Па}]$$

$$p_2 = (P_2 + P_{\text{бар}}) = (0,05 + 0,1025) \cdot 10^6 = 0,153 \cdot 10^6 \quad [\text{Па}]$$

Масса выпущенного газа:

$$M = M_1 - M_2 = \frac{p_1 \cdot V}{R_{\text{см}} \cdot T_1} - \frac{p_2 \cdot V}{R_{\text{см}} \cdot T_2} = \frac{V}{R_{\text{см}}} \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = \frac{400}{483,69} \left[ \frac{0,853 \cdot 10^6}{273 + 30} - \frac{0,153 \cdot 10^6}{273 + 15} \right] = \\ 0,827(0,002816 - 0,000531) \cdot 10^6 = 1889,5 \quad [\text{кг}]$$

Ответ: 1889,5 кг.

Задача 2.

I. Теоретическая часть

В задаче рассматривается политропный процесс сжатия воздуха.

Массу сжимаемого воздуха можно определить из уравнения идеального газа:

$$P \cdot V = MRT, \text{ откуда } M = \frac{P \cdot V}{RT},$$

где  $R = 287 \quad [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{град})]$  – газовая постоянная для воздуха

Кроме того, для политропного процесса действительны уравнения:

$$1) \frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^n$$

$$2) \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1}, \text{ где } n \text{ – показатель политропы, заданный по условию задачи.}$$

Под степенью сжатия понимают отношение начального и конечного объемов газа, в данном случае воздуха:  $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ .

Для определения величины работы сжатия газа используют формулу:

$$L = \frac{MR}{n-1}(T_2 - T_1) \text{ [Дж]}$$

Количество подведенного или отведенного тепла определяют по выражению:

$$Q = M \cdot c_v \cdot \frac{n-k}{n-1} \cdot (T_2 - T_1) \text{ [Дж]},$$

где  $k = 1,41$ , т.к. идеальный воздух считается двухатомным газом

$c_v$  – теплоемкость воздуха, принятая по таблице в зависимости от температуры

Удельным объемом газа называют отношение  $v = \frac{V}{M}$  [м<sup>3</sup>/кг]

Изменение внутренней энергии определяется по формуле:

$$\Delta U = M \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) \text{ [Дж]}$$

## II. Решение задачи

Дано:

$V_1 = 120 \text{ м}^3$  – воздух с начальным объемом

$P_1 = 0,1 \text{ МПа}$  – воздух с начальным давлением

$t_1 = 25^\circ \text{C}$  – воздух с начальной температурой

$\varepsilon = 6$  – степень сжатия воздуха

$n = 1,4$  – показатель политропы

Определить:

1) Массу сжимаемого воздуха  $M$  [кг]

2) Конечные параметры сжимаемого воздуха:

$P_2$  – давление [Па]

$T_2$  – температуру [К]

$v_2$  – удельный объем [м<sup>3</sup>/кг]

3) Величину работы сжатия [Дж]

4) Величину подведенного или отведенного тепла [Дж]

5) Изменение внутренней энергии [Дж]

$$1) M = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{0,1 \cdot 10^6 \cdot 120}{287(273 + 25)} = 140,31 \text{ [кг]}$$

$$2) \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n, \text{ откуда } P_2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^n \cdot P_1 = (6)^{1,4} \cdot 0,1 \cdot 10^6 = 1,23 \cdot 10^6 \text{ [Па]}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}, \text{ откуда } T_2 = T_1 (\varepsilon)^{1,4-1} = (25 + 273)(6)^{0,4} = 610 \text{ [K]}$$

$$v_2 = \frac{V_2}{M} = \frac{V_1}{M} \cdot \frac{120}{140,31} = \frac{20}{140,31} = 0,143 \text{ [м}^3\text{/кг]}$$

$$3) L = \frac{MR}{n-1} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{140,31 \cdot 287}{0,4} (298 - 610) = -31409795 \text{ [Дж]} = -31409,8 \text{ [кДж]}$$

$$4) Q = M \cdot c_v \cdot \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1) = 140,31 \cdot 0,72 \cdot \frac{1,4-1,41}{0,4} (610 - 298) = -787,98 \text{ [Дж]} = -$$

0,78798 [кДж]

$$5) \Delta U = M \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = 140,31 \cdot 0,72 \cdot (610 - 298) = 31519200 \text{ [Дж]} = 31519,2 \text{ [кДж]}$$

Вывод: при политропном процессе сжатия, если  $k > m > 1$ , – теплота отводится, внутренняя энергия газа увеличивается.

Задача 3.

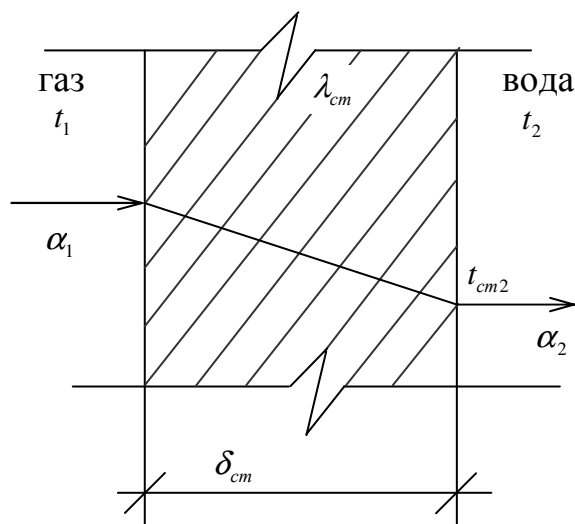
I. Теоретическая часть

В данном случае рассматривается обтекание плоской стальной стенки с обеих сторон теплоносителями, каждый из которых имеет постоянную температуру.

Движущей силой процесса теплопередачи в этом случае является разность температур греющего и нагреваемого теплоносителей:

$$\Delta t_{cp} = t_1 - t_2 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Иллюстрацией всего процесса теплопередачи может служить следующий рисунок:



Греющий газ отдает свое тепло поверхности стенки, которое характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_1$  [Вт/(м<sup>2</sup>·град)]. Через твердую стальную стенку тепло передается теплопроводностью, которая характеризуется коэффициентом теплопроводности  $\lambda_{cm}$  [Вт/(м·град)]. От нагретой поверхности стенки  $t_{cm2}$  тепло передается теплоотдачей к холодному теплоносителю и характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\alpha_2$  [Вт/(м<sup>2</sup>·град)]. В совокупности весь этот процесс называется теплопередачей. Поэтому можно при решении задачи использовать систему уравнений:

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_1(t_1 - t_{cm1}) \\ q_{cm} = \frac{\lambda_{cm}}{\delta_{cm}}(t_{cm1} - t_{cm2}) \\ q_2 = \alpha_2(t_{cm2} - t_2) \end{cases}$$

и кроме того уравнение теплопередачи:

$$q = k \cdot \Delta t_{cp}$$

Причем  $q_1 = q_{cm} = q_2 = q$  и представляет собой плотность теплового потока

$$q = \frac{Q}{F} \text{ [Вт/м}^2\text{]}$$

$\alpha_1, \alpha_2$  [Вт/(м<sup>2</sup>·град)] – коэффициенты теплоотдачи горячего  $t_1$  и холодного  $t_2$  теплоносителей

$\lambda_{cm}$  [Вт/(м·град)] и  $\delta_{cm}$  [м] – коэффициент теплопроводности и толщина стенки (все эти величины заданы по условию).

Коэффициент теплоотдачи  $k$  определяется по формуле:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{cm}}{\lambda_{cm}} + \frac{1}{\alpha_2}} \text{ [Вт/(м}^2\text{·град)]}$$

Решение задачи

Дано:

$$\delta_{cm} = 15 \text{ мм} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\alpha_1 = 55 \text{ Вт/(м}^2\text{·К)}$$

$$\alpha_2 = 3000 \text{ Вт/(м}^2\text{·К)}$$

$$t_1 = 830^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 130^\circ\text{C}$$

$$\lambda_{cm} = 50 \text{ Вт/(м·К)}$$

Определить:  $k$  – ?  $q$  – ?  $t_{cm1}$  – ?  $t_{cm2}$  – ?

Решение:

1) Определяем коэффициент теплопередачи:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{cm}}{\lambda_{cm}} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{55} + \frac{15 \cdot 10^{-3}}{50} + \frac{1}{3000}} = 54 \text{ Вт/(м}^2\text{·К)}$$

2) Удельный тепловой поток:

$$q = k \cdot \Delta t_{cp}, \text{ где } \Delta t_{cp} = 830 - 130 = 700 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

$$q = 54 \cdot 700 = 37634 \text{ Вт/м}^2$$

3) Из (1) уравнения системы:

$$q = \alpha_2 (t_{cm2} - t_2), \text{ откуда}$$

$$t_{cm2} = t_2 + q \cdot \frac{1}{\alpha_2} = 130 + \frac{37634}{3000} = 130 + 13 = 143^\circ\text{C}$$

$$\text{Ответ: } k = 54 \text{ [Вт/(м}^2\text{·К)]}$$

$$q = 37634 \text{ [Вт/м}^2\text{]}$$

$$t_{cm1} = 146 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

$$t_{cm2} = 143 \text{ [}^\circ\text{C]}.$$



#### Задача 4.

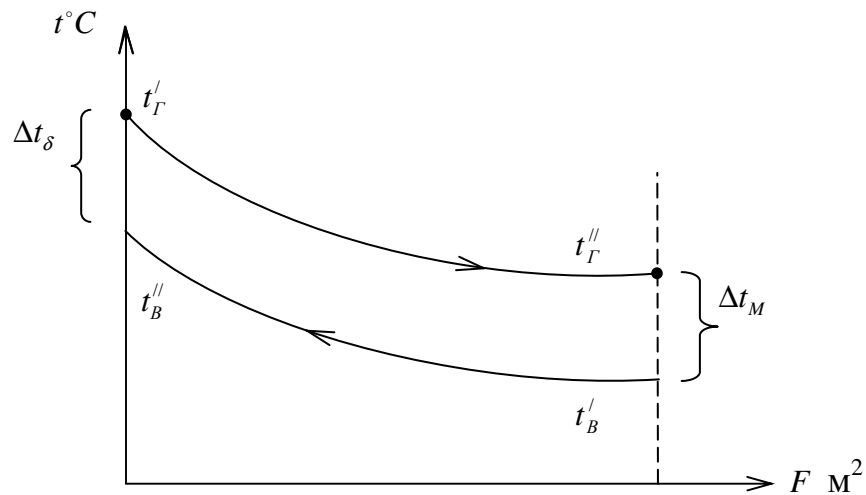
##### I. Теоретическая часть

Поверхность нагрева воздухоподогревателя, обогреваемого дымовыми газами, при противоточном движении газов и воздуха в нем можно из основного уравнения теплопередачи:

$$Q = k \cdot \Delta t_{cp} \cdot F, \text{ откуда } F = \frac{Q}{k \cdot \Delta t_{cp}},$$

где  $k$  – коэффициент теплопередачи, заданный по условию

$\Delta t_{cp}$  – среднелогарифмический температурный напор, который можно определить, пользуясь графиком распределения температур.



Противоточная схема движения теплоносителей

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_{\delta} - \Delta t_M}{\ln \frac{\Delta t_{\delta}}{\Delta t_M}}$$

Для удобства расчетов необходимо на графике подписать заданные температуры теплоносителей (начальную и конечную каждого).

Однако нам неизвестна величина  $Q$  [Вт] – количество тепла, передаваемого от горячего теплоносителя к холодному. Ее можно определить из уравнения теплового баланса:

$$Q = G_{\Gamma} \cdot c_{p\Gamma} (t'_{\Gamma} - t''_{\Gamma}) = G_{\text{B}} \cdot c_{p\text{B}} (t''_{\text{B}} - t'_{\text{B}})$$

По условию нам задан расход воздуха, следовательно, можно воспользоваться правой частью уравнения:

$$Q = G_B \cdot c_{pB} (t_B'' - t_B') \text{ [Вт]}$$

Но по условию задан не массовый, а объемный расход воздуха  $V$ , поэтому пользуемся уравнением

$$G_B = V_g \cdot \rho_g \text{ [кг/с]},$$

где  $\rho_g$  [кг/м<sup>3</sup>] – плотность воздуха, принимаемая по таблице справочника «Параметры сухого воздуха» при температуре вычисленной, как среднее арифметическое, между начальным и конечным параметром:

$$t_g^{cp} = \frac{t_B' + t_B''}{2}$$

Если температура воздуха не равна табличной, то необходимо определить плотность воздуха  $\rho_g$  и удельную теплоемкость  $c_{p_g}$  [кДж/кг·град]. Объемный расход воздуха необходимо привести в единицы системы «СИ»  $V$  [м<sup>3</sup>/ч] =  $V/3600$  [м<sup>3</sup>/с].

## II. Решение задачи

Дано:

$$t_g' = 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t_g'' = 150 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$V = 35000 \text{ м}^3/\text{ч}$$

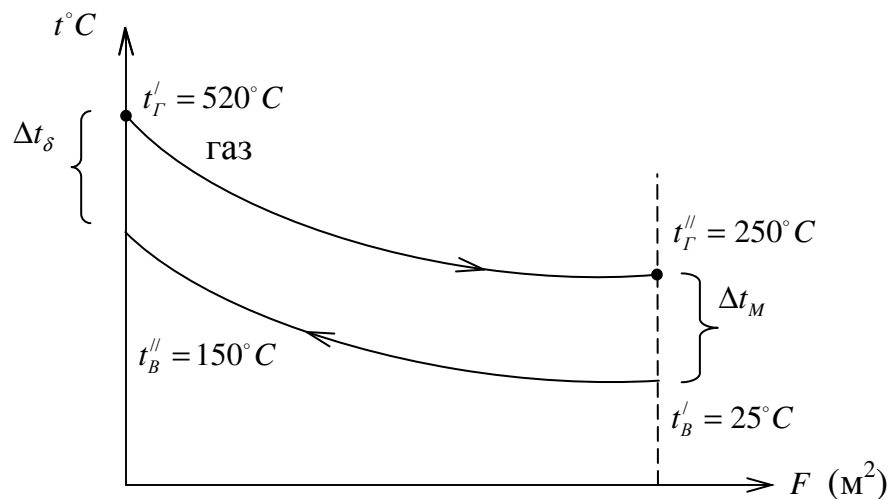
$$k = 19 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$$

$$t_T' = 520 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t_T'' = 250 \text{ }^\circ\text{C}$$

Определить  $F$  – ?

$$1) F = \frac{Q}{k \cdot \Delta t_{cp}} \text{ [м}^2\text{]}$$



по графику

$$\Delta t_{\delta} = 520 - 150 = 370^{\circ} \text{C}$$

$$\Delta t_M = 250 - 25 = 225^{\circ} \text{C}$$

$$\Delta t_{cp} = \frac{370 - 225}{\ln \frac{370}{225}} = 292^{\circ} \text{C}$$

$$2) Q = G_B \cdot c_{pB} (t''_B - t'_B) \text{ [Вт]}$$

$$G_B = V_B \cdot \rho_B$$

$$t_{cpB} = \frac{25 + 150}{2} = 87,5^{\circ} \text{C}$$

$$\text{При } t_B = 80^{\circ} \text{C} \quad \rho_B = 1,000 \text{ [кг/м}^3\text{]}$$

$$t_B = 90^{\circ} \text{C} \quad \rho_B = 0,972 \text{ [кг/м}^3\text{]}$$

Тогда при  $t_B = 87,5^{\circ} \text{C}$

$$\rho_B = 1,000 - \frac{1,000 - 0,972}{10} \cdot 7,5 = 0,979 \text{ [кг/м}^3\text{]}$$

$$c_{pB} = 1,009 \text{ кДж/(кг/град)} = 1,009 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг/град)}$$

$$G_B = V_B \cdot \rho_B = \frac{35000}{3600} \cdot 0,979 = 9,518 \text{ [кг/с]}$$

$$Q = Q_B = 9,518 \cdot 1,009 \cdot 10^3 (150 - 25) = 1200457,75 \text{ [Вт]}$$

$$3) F = \frac{Q}{k \cdot \Delta t_{cp}} = \frac{1200457,75}{19 \cdot 292} = 216,4 \text{ [м}^2\text{]}$$

Ответ:  $F = 216,4 \text{ м}^2$

## Нестационарная теплопроводность

Процессы нестационарной теплопроводности имеют определяющее значение в переработке полимеров. Они определяют продолжительность технологического процесса изготовления изделия и его качественные показатели. Например, при переработке термопластов в технологическом цикле имеется операция охлаждения изделия. При изготовлении изделий из реактопластов также необходимо уметь рассчитывать время прогрева изделия в форме, поскольку реакции полимеризации или вулканизации начинаются только по достижении материалом определенной температуры.

Полимерные изделия часто имеют достаточно сложную конфигурацию. Однако их можно свести к одной из трех канонических – к плоскости, цилиндру или шару. При этом надо учитывать тот факт, что расчетная точка находится в сечении с наибольшими линейными размерами. Например, если мы имеем пластину, то в ее середине и т.д.

В пособии представлена упрощенная методика решения задач нестационарной теплопроводности. Полученные результаты обеспечивают приемлемую точность в регулярном режиме теплообмена, т.е. при значительных длительностях процесса. А именно это чаще всего и требуется в инженерных расчетах.

В табл. 4 представлены теплофизические свойства наиболее распространенных полимеров, необходимые для технологических расчетов. В скобках указаны температуры, при которых измерены параметры.

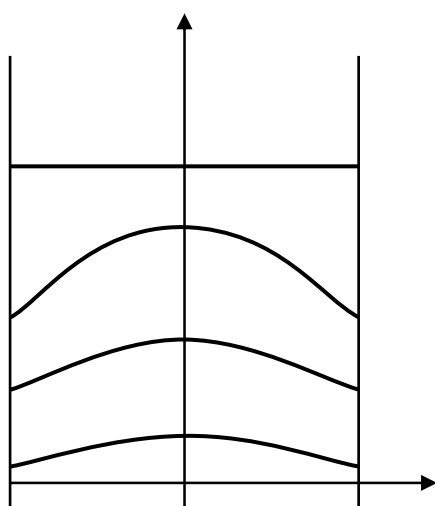
## Ориентировочные технологические свойства полимеров

Показатель	Резина	ПЭНП	ПЭВП	ПП	ПС	ПКА
$\rho, \text{кг/м}^3$	1200	920	951	900	1100	970 (288°C)
$a \times 10^7, \text{м}^2/\text{с}$	1	1,2	1,5	1	1,1	1(220°C)
$\lambda, \text{Вт/мК}$	0,14	0,3	0,4	0,24	0,15	0,24 (240°C)
$C, \text{кДж/кгК}$	2	2,8-3	2,5-3	3,2 (170°C)	1,5	2,6 (240°C)

**Нестационарная теплопроводность пластины.**

Рассматриваемая задача связана с процессом прогрева или охлаждения бесконечной пластины. Полученные результаты могут использоваться при расчете процессов формования плоских полимерных заготовок методом литья под давлением, прогрева резиновых изделий в форме и т.п. процессов нестационарной теплопроводности.

Расчетная схема теплообмена представлена на рис. 5. На поверхности



вертикальной пластины имеет место теплообмен по закону Ньютона, что соответствует граничным условиям 3-го рода. Коэффициент теплоотдачи на наружной стороне пластины  $\alpha$ . Вектор теплового потока одномерен. Внутренние источники тепла отсутствуют. Теплофизические свойства

Рис. 5

материала пластины постоянны. Полутолщина пластины  $\delta$ . Начальная температура пластины  $T_0$ . Температура окружающей среды  $T_c$ . Коэффициент теплопроводности пластины  $\lambda$ . Согласно принятым допущениям краевая задача описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ t=0, \quad T &= T_0, \\ x=0, \quad &= 0, \\ x=\delta, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= +\alpha(T-T_c) = q_{\text{поверх}}. \end{aligned}$$

Здесь первое уравнение – уравнение теплопроводности Фурье-Кирхгофа, вторая строчка – начальное условие для температуры, третья строчка – условие симметрии, четвертая строчка – граничное условие на поверхности (условие третьего рода). Введем безразмерные переменные и параметры

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad X = \frac{x}{\delta}, \quad Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}, \quad Fo = \frac{at}{\delta^2}.$$

Здесь  $\Theta$  - безразмерная температура,  $X$  – безразмерная координата,  $Fo$  – число Фурье (безразмерное время). В безразмерной форме задача имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2},$$

$$Fo = 0, \quad \theta = 1,$$

$$X = 0, \quad \partial \theta / \partial X = 0,$$

$$X = 1, \quad \partial \theta / \partial X + Bi \theta = 0.$$

Точное решение этой задачи можно получить, например, методом Фурье. Однако оно получается в виде бесконечных рядов, вычисление которых представляет определенные трудности. Поэтому получим приближенное решение

задачи, вполне пригодное для инженерного анализа процессов нестационарной теплопроводности.

Решение задачи ведем методом Галеркина – методом ортогональных проекций. Ищем решение  $\bar{\theta}$  в виде произведения двух функций: первой, зависящей от числа Фурье, второй – от координаты

$$\bar{\theta} = A(F_0)(a + bX^2)$$

В этом выражении постоянные, являющиеся параметрами координатной функции, а и b определяются методом неопределенных коэффициентов так, чтобы эта функция удовлетворяла граничным условиям. Первому граничному условию координатная функция удовлетворяет автоматически. Подстановка во второе граничное условие дает алгебраическое уравнение для неизвестных коэффициентов

$$2b + Bi(a + b) = 0.$$

Откуда получаем следующую связь между коэффициентами

$$a = -\frac{Bi + 2}{Bi} b.$$

Следовательно, с точностью до постоянного множителя, можем записать для безразмерной температуры приближенное выражение

$$\bar{\theta} = A(F_0) \left[ \frac{Bi + 2}{Bi} - X^2 \right].$$

Условие ортогональности невязки к координатной функции имеет вид

$$\int_0^1 L(\bar{\theta}) \left( \frac{Bi + 2}{Bi} - X^2 \right) dX = 0$$

где  $L(\bar{\theta}) = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial F_0} - \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial X^2}$  - дифференциальный оператор от координатной функции.

В развернутой форме невязка имеет вид

$$L(\bar{\theta}) = A'(Fo) \left( \frac{Bi+2}{Bi} - X^2 \right) + 2A.$$

Штрих означает производную по числу Фурье.

Соответственно, условие ортогональности в развернутой форме имеет вид

$$\int_0^1 \left\{ A' \left( \frac{Bi+2}{Bi} - X^2 \right) + 2A \right\} \left( \frac{Bi+2}{Bi} - X^2 \right) dX = 0,$$

Выполнив интегрирование, получим дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции

$$A' \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{5} \right] + 2A \frac{Bi+2}{Bi} - \frac{2A}{3} = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем с учетом начального условия для неизвестной функции А

$$\int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = - \frac{2 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - \frac{1}{3} \right)}{\left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{5} \right]} \int_0^{Fo} dFo.$$

Получим следующую зависимость для функции А

$$\ln \left( \frac{A}{A_0} \right) = - \frac{2(2Bi+6)}{3Bi \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{3} \right]} Fo,$$

или

$$A = A_0 \exp \left\{ \frac{-4(Bi+3)Fo}{3Bi \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{5} \right]} \right\}.$$



Неизвестную постоянную  $A_0$  найдем из начального условия, записанного в интегральном виде. Т.е. заменим условие однородности начальной температуры  $F_0=0$ ,  $\bar{\theta} = 1$ , на условие  $F_0=0$ ,  $\int_0^1 \bar{\theta} dX = 1$ . При этом получим следующее выражение для неизвестной постоянной

$$A_0 \int_0^1 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - X^2 \right) dX = 1.$$

Таким образом, получили расчетное выражение для определения температуры любой точки пластины в любой момент времени. Форма выражения позволяет рассчитывать температуру для заданного момента времени или найти момент времени, соответствующий достижению какой-либо заданной температуры. Можно описывать процессы прогрева и охлаждения.

В случае высокой интенсивности теплообмена на поверхности (большой коэффициент теплоотдачи и большое число Био) граничное условие третьего рода можно заменить граничным условием первого рода. Для этого достаточно в расчетных выражениях принять их предел при увеличении числа Био до бесконечности. В этом случае расчетное выражение для безразмерной температуры будет иметь вид

$$\bar{\theta} = A(Fo)(1 - X^2).$$

Соответственно, выражение для функции  $A$  примет вид

$$A = 1,5 \exp\{-2,5Fo\}.$$

#### Задача 5.

Методом выдувного формования получают бутылку. Материал – полиэтилен. Коэффициент температуропроводности  $10^7$  м<sup>2</sup>/с. Толщина стенки 2 мм. Считая, что на свободной поверхности теплообмен отсутствует, найти время охлаждения от начальной температуры 160 °С до 60 °С (на поверхности). Температура стенки формы 20 °С.

Решение.

Расчетное выражение для температуры при  $Bi=\infty$

$$\theta = 1,5(1 - X^2) \exp\{-2,5Fo\}.$$

Внутренней поверхности соответствует координата  $X=0$ . Искомое время входит в число Фурье, поэтому разрешим расчетное выражение относительно числа Фурье

$$Fo = -\frac{1}{2,5} \ln\left(\frac{\theta}{1,5}\right),$$

или

$$t = -\frac{\delta^2}{2,5 \cdot a} \ln\left(\frac{\theta}{1,5}\right).$$

Найдем безразмерную температуру поверхности стенки

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{60 - 20}{160 - 20} = 0,2857.$$

Подставим все численные значения в выражение для времени

$$t = -\frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{2,5 \cdot 10^{-7}} \ln\left(\frac{0,2857}{1,5}\right) = 26,53 \text{ с}.$$

### **Нестационарная теплопроводность неограниченного цилиндра.**

Задача связана с процессами формования термопластов и реактопластов. Многие формуемые изделия содержат в качестве элементов цилиндрические участки. Без большой погрешности можно пренебречь продольной теплопроводностью и учитывать только радиальную теплопроводность. В этом случае цилиндрический элемент можно рассматривать как бесконечный цилиндр. Представленное решение задачи одинаково правомерно для случаев нагрева или

охлаждения цилиндра. На поверхности цилиндра имеет место теплообмен по закону Ньютона.

Рассмотрим граничные условия 3-го рода. Имеет место регулярный тепловой режим. Расчетная схема и система координат представлены на рис. 6, а.

Уравнение энергии и краевые условия для данной задачи, с учетом условия отсутствия продольного теплового потока  $\partial T / \partial z = 0$ , имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right);$$

$$t = 0, \quad T = T_0,$$

$$r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = R_1, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha(T - T_0).$$

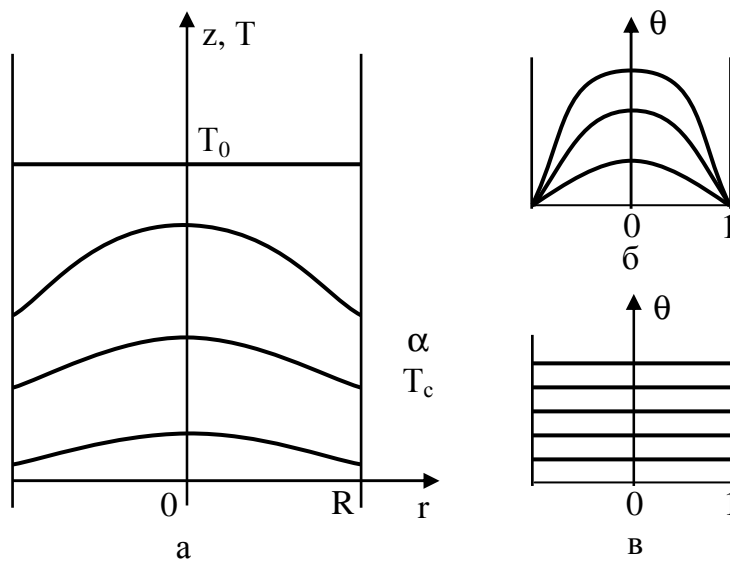


Рис. 6

Введем безразмерные переменные и параметры

$$x = \frac{r}{R}, \quad Fo = \frac{at}{R^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}.$$

При этом задача примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} &= \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \\ Fo = 0, \quad \theta &= 1, \\ x = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ x = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi\theta &= 0. \end{aligned}$$

Ищем приближенное решение  $\bar{\theta}$  в форме, удовлетворяющим граничным условиям

$$\bar{\theta} = a(Fo) \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right).$$

Таким образом, мы имеем фиксированный профиль температуры в поперечном сечении цилиндра. Незвестная функция безразмерного времени  $a$  определяется методом Галеркина из уравнения теплопроводности.

Запишем условие ортогональности невязки уравнения теплопроводности к координатной функции

$$\int_0^1 L(\tilde{\theta}) \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) x dx = 0.$$

Невязка имеет вид

$$L = a'_{Fo} \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) + 4a.$$

имеем интеграл

$$\int_0^1 \left\{ a' \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) + 4a \right\} \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) x dx = 0.$$

Раскроем скобки в подынтегральном выражении

$$\int_0^1 \left\{ a \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - 2 \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) x^2 + x^4 \right] + 4a \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) \right\} x dx = 0.$$

Выполнив интегрирование, получим дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции  $a$

$$a \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{6} \right] + 4a \left( \frac{Bi+2}{2Bi} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем с учетом начального условия

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a} = - \frac{4 \left( \frac{Bi+2}{2Bi} - \frac{1}{4} \right)}{\frac{1}{2} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{2}} \int_0^{Fo} dFo.$$

Получим расчетное выражение для функции  $a$

$$a = a_0 \exp \left\{ - \frac{4 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{Bi+2}{Bi} + \frac{1}{3}} Fo \right\}$$

Постоянная  $a_0$  находится из интегрального начального условия

$$\int_0^1 \tilde{\theta} \Big|_{Fo=0} x dx = 1.$$

В раскрытой форме условие имеет вид

$$a_0 \int_0^1 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) x dx = 1.$$

Выполнив интегрирование, найдем значение постоянной

$$a_0 = \frac{4Bi}{Bi+4}$$

Предельные случаи. При высокой интенсивности охлаждения можно положить  $Bi \rightarrow \infty$ . Граничное условие третьего рода переходит в граничное

условие 1-го рода. Расчетное выражение для безразмерной температуры при этом будет иметь вид

$$\tilde{\theta} = (1 - x^2) 4 \exp \left\{ - \frac{4 \frac{1}{2}}{x - x + \frac{1}{3}} Fo \right\} = 4(1 - x^2) \exp(-6Fo).$$

При низкой интенсивности теплообмена можно считать, что  $Bi < 0,1$ , т.е. задача внешняя. Расчетное выражение для безразмерной температуры в этом случае примет вид

$$\tilde{\theta} = \left( \frac{2}{Bi} - x^2 \right) Bi \exp \left\{ - \frac{4 \left( \frac{2}{Bi} - \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{Bi} + \frac{1}{3}} Fo \right\}.$$

Или после упрощений

$$\tilde{\theta} = (2 - Bix^2) \exp\{-2BiFo\},$$

где  $BiFo = \alpha t / (\rho c R)$ . Интересно отметить, что в этом случае коэффициент теплопроводности материала цилиндра не влияет на теплообмен. Интенсивность теплообмена определяется значением коэффициента теплообмена и теплоемкостью материала цилиндра.

#### Задача 6.

Полимерная цилиндрическая заготовка охлаждается на воздухе. Начальная температура  $100^\circ\text{C}$ . Сколько времени потребуется для достижения температуры в центре  $40^\circ\text{C}$ ? Температура окружающей среды  $20^\circ\text{C}$ . Диаметр заготовки 2 см. Коэффициент теплоотдачи  $20 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ . коэффициент теплопроводности  $0,4 \text{ Вт/мК}$ , температуропроводности  $4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Решение.

Найдем число Био

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{20 \cdot 10^{-2}}{0,4} = 0,5.$$

Следовательно, внутреннее и внешнее термические сопротивления соизмеримы. Используем расчетную формулу для общего случая

$$\theta = \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) \frac{4Bi}{Bi+4} \exp \left\{ - \frac{4 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{Bi+2}{Bi} + \frac{1}{3}} Fo \right\}.$$

Центру отвечает координата  $x=0$ . Найдем безразмерную температуру центра

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{40 - 20}{100 - 20} = 0,25.$$

Подставим численные значения в формулу

$$0,25 = \left( \frac{2,5}{0,5} \right) \frac{4 \cdot 0,5}{4,5} \exp \left\{ - \frac{4 \left( \frac{2,5}{0,5} - \frac{1}{2} \right)}{(5)^2 - 5 + \frac{1}{3}} Fo \right\}.$$

Выполнив математические действия, запишем

$$0,25 \frac{4,5}{10} = \exp \left( - \frac{4 \cdot 4,5}{20,33333} Fo \right).$$

Найдем число Фурье

$$Fo = - \frac{20,333}{18} \ln \left( \frac{4,5}{40} \right) = 2,467.$$

Откуда находим время

$$t = \frac{Fo \cdot R^2}{a} = \frac{2,467 \cdot (10^{-2})^2}{4 \cdot 10^{-7}} = 616 \text{ с}.$$

Приблизительно 10 минут.

### Нестационарная теплопроводность шара при граничных условиях 3-го рода.

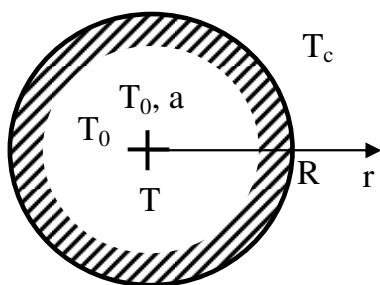


Рис. 7

В технологии переработки полимеров часто встречается технологическая операция, связанная с прогревом или охлаждением изделий, имеющих форму близкую к форме шара. Например, вулканизация резиновых изделий (имеет место прогрев материала), охлаждение в литьевой форме изделий из термопластов после формования. Во всех

указанных случаях, а так же в ряде других имеет место нестационарная теплопроводность тела шарообразной формы. Задачей является определение необходимого времени для достижения внутренней точкой изделия нужной температуры. Поскольку именно это время определяет продолжительность технологического процесса, а следовательно и производительность оборудования.

Считаем задачу центральносимметричной т.е.  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Расчетная схема представлена на рис. 7.

Уравнение энергии, описывающее нестационарное поле в шаре, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

$$t=0; \quad T=T_0,$$

$$r=0; \quad \partial T/\partial r = 0,$$

$$r=R, \quad -\lambda \partial T/\partial r = \alpha(T - T_c),$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $T_0$  – начальная температура материала шара,  $T_c$  – температура окружающей среды.



Введем безразмерные переменные и параметры

$$x = \frac{r}{R}; \quad Fo = \frac{at}{R^2}; \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}; \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}.$$

Тогда задача примет форму

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right),$$

$$Fo=0; \quad \theta = 1,$$

$$x=0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

$$x=1; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi\theta = 0.$$

Приближенное решение ищем в формуле

$$\bar{\theta} = a(Fo) \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right)$$

Элемент объема в сферических координатах

$$dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Следовательно, условие ортогональности имеет вид

$$\int_0^1 L(\tilde{\theta}) x^2 dx = 0.$$

Невязка уравнения энергии для заданного температурного поля имеет вид

$$L(\tilde{\theta}) = \frac{da}{dFo} \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) + 6a.$$

В развернутой форме условие ортогональности имеет вид

$$\int_0^1 \left[ \frac{da}{dFo} \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) + 6a \right] \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) x^2 dx = 0.$$

Раскроем скобки в подынтегральном выражении

$$\int_0^1 \left\{ \frac{da}{dFo} \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 x^2 - 2 \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) x^4 + x^6 \right] + 6a \left[ \frac{Bi+2}{Bi} x^2 - x^4 \right] \right\} dx = 0.$$

После выполнения интегрирования, получим дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции  $a$

$$\frac{da}{dFo} \left[ \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \frac{Bi+2}{Bi} + \frac{1}{7} \right] + 6a \left[ \frac{Bi+2}{3Bi} - \frac{1}{5} \right] = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем с учетом начального условия

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a} = - \frac{6 \left( \frac{Bi+2}{3Bi} - \frac{1}{5} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{7}} \int_0^{Fo} dFo$$

В результате получим выражение для функции  $a$

$$a = a_0 \exp \left[ - \frac{6 \left( \frac{Bi+2}{3Bi} - \frac{1}{5} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{7}} Fo \right]$$

Для определения постоянной  $a_0$  используем интегральное условие

$$a_0 \int_0^1 \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) x^2 dx \left[ \int_0^1 x^2 dx \right]^{-1} = 1.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$a_0 = \frac{5Bi}{2Bi+10}.$$

Таким образом, имеем следующее выражение для расчета безразмерной температуры любой точки внутри шара

$$\theta = \left( \frac{Bi+2}{Bi} - x^2 \right) \frac{5Bi}{2Bi+10} \exp \left[ - \frac{6 \left( \frac{Bi+2}{3Bi} - \frac{1}{5} \right)}{\frac{1}{3} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{Bi+2}{Bi} \right) + \frac{1}{7}} Fo \right].$$

В случае высокой интенсивности теплообмена ( $Bi \gg 1$ ) можно считать на поверхности шара граничное условие первого рода. В этом случае расчетное выражение для температуры существенно упрощается

$$\theta = (1 - x^2) 2,5 \exp\left(-\frac{63}{4} Fo\right).$$

Наиболее медленно изменяется температура внутренней точки шара, находящейся в центре, т.е. имеющая координату  $x=0$ . Температура в центре шара

$$\theta = 2,5 \exp\left(-\frac{63}{4} Fo\right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. –600 с.
2. Цой П.В. Методы расчета задач теплопереноса.- М.: Энергоатомиздат, 1984.- 416с.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. школа, 1978. –328с.
4. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. Учебник для вузов. –М.: Энергия, 1975. – 488 с.
5. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. –М.:Химия, 1971. –784с.
6. Теплофизические свойства полимерных материалов. Справочник. Пивень А.Н., Гречаная Н.А., Чернобыльский И.И. –К.: Вища школа, 1976. –180 с.
7. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990. 367с.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В 2 т. М.: Наука, 1973. Т.1. 535 с.
9. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 т. М.: МГТУ, 1998. Т.1. 367 с.
10. Башта Т.М., Руднев С.С. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. М.; Машиностроение, 1982. 423 с
11. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Гос. изд. ф–н лит–ры, 1962, 284 с.

## Содержание

Понятие сплошной среды	3
Деформации твердого тела.	5
Подходы к изучению движения деформируемых сред.	6
Гидромеханика	15
Гидродинамика	15
Основные характеристики движения жидкостей	15
Уравнение неразрывности (сплошности) потока	17
Дифференциальные уравнения движения Эйлера	21
Дифференциальные уравнения движения Навье – Стокса	25
Уравнение Бернулли	27
Основы теории подобия	28
Движение тел в жидкости	32
Осаждение частиц под действием силы тяжести	35
Пример гидравлического расчета трубопровода	38
Пример расчета барабанного вакуум-фильтра	46
Расчет и подбор диаметра трубопровода	49
Расчет рабочей поверхности греющей камеры	51
Контрольные задачи	56
Нестационарная теплопроводность	67
Нестационарная теплопроводность пластины.	68
Нестационарная теплопроводность неограниченного цилиндра.	73
Нестационарная теплопроводность шара при граничных условиях 3-го рода.	79

Электронное учебное издание

Светлана Владимировна **Лапшина**

## Введение в механику сплошной среды

*Учебное пособие*

*Электронное издание сетевого распространения*

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2018 г. Поз. № 26.

Подписано к использованию 01.10.2018. Формат 60x84 1/16.

Гарнитура Times. Усл. печ. л. 5,31.

Волгоградский государственный технический университет.  
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.  
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.