

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. И. Капля

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Электронное учебное пособие



Волжский
2020

УДК 004.94(07)
ББК 32.973.202я73
К 203

Рецензенты:
кандидат тех. наук, доцент, зав.кафедрой АТП МЭИ
Болдырев И.А.,
канд. тех. наук, доцент, начальник УКЦ
ООО "Ракурс-инжиниринг"
Бурцев А.Г.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Капля, В. И.

Моделирование информационных систем [Электронный ресурс]: учебное пособие. / В. И. Капля ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 1,03 Мб). – Волжский, 2020. – Режим доступа: <http://lib.volpi.ru>. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9948-3705-4

Пособие содержит сведения о принципах и методах моделирования сложных технических систем. Пособие составлено на основе обобщения современной литературы по данной области знаний. Основное внимание уделено моделям систем массового обслуживания и методам статистического анализа результатов моделирования.

Рекомендуется для использования в учебном процессе по естественным и техническим специальностям при изучении дисциплины "Моделирование систем" для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Ил. 61, табл.7, библиограф.: 17 назв.

ISBN 978-5-9948-3705-4

© Волгоградский государственный
технический университет, 2020
© Волжский политехнический
институт, 2020

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	5
2. АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ	9
3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. МЕТОД ЖРЕБИЯ	10
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ	11
5. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ.....	12
6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.....	13
7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ	18
8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА	19
9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА	20
10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ.....	21
11. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	22
12. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАБОТУ СМО.....	25
13. ПРОЦЕСС ЧИСТОГО РАЗМНОЖЕНИЯ.....	26
14. СИСТЕМА М/М/1 В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ	26
15. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА	27
16. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1.....	28
17. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/ ∞	29
18. ПЕРЕПОЛНЯЮЩИЕ ВЫХОДНЫЕ ПОТОКИ	29
19. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/m БЕЗ ПОТЕРЬ.....	30
20. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/m С ПОТЕРЯМИ.....	31
21. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1/K.....	32
22. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1/M.....	32
23. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М//M.....	33
24. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/m/K/M.....	34
25. ПРИМЕР МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ СМО	34
26. АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ	35
27. ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ.....	36
28. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ	37
29. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА	39
30. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА.....	39
31. ЛОКАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ ДАННЫХ	40
32. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	40
33. ОПИСАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. СЕТИ ПЕТРИ.....	42
34. МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ	44
35. МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ.....	45
36. ТОЧЕЧНОЕ И ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	46
37. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	48
38. СТАНДАРТНЫЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ И ДИСПЕРСИИ	50
39. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.....	51
39.1. КРИТЕРИЙ ПИРСОНА.....	51
39.2. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА.....	52
40. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	54
41. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ.....	55
42. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЕ.....	57

43. ПРОВЕРКА ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА. КРИТЕРИЙ КОХРЕНА	58
44. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ	59
45. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ. КРИТЕРИЙ ФИШЕРА	60
46. D-ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ	61
47. МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БАЛАНСА	63
48. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ РАССЕЯНИЯ МСБ.....	66
49. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА.....	67
50. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	69
51. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	70
52. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	72
53. СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ	73
54. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ.....	74
55. СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНЫХ СИСТЕМ	75
56. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ.....	77
57. ИДЕНТИФИКАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА.....	78
58. ВЛИЯНИЕ НА СИСТЕМУ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО ШУМОВ.....	79
59. НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ ШУМЫ	79
60. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ ШУМЫ.....	80
61. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ	80
62. СИСТЕМА С ОДНИМ ВХОДОМ И НЕСКОЛЬКИМИ ВЫХОДАМИ.....	82
63. КОРРЕКТНОСТЬ И НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ	84
64. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ	85
65. МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ	86
66. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ	87
67. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ	88
68. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА.....	89
69. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ	90
70. ПРИМЕР КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ	91
71. ПРИМЕР НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ.....	92
72. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ	93
ЛИТЕРАТУРА.....	96
<i>Учебное пособие</i>	<i>97</i>

ВВЕДЕНИЕ

Создание новых систем заданного назначения требует совместного использования расчетных методов проектирования и экспериментальных исследований вопросов, для которых нет подходящих теоретических методов. Назначение моделирования состоит в опытно-теоретической проверке научно-технических решений. Моделирование является промежуточным звеном, соединяющим теоретические расчеты и материально-техническое воплощение новых конструкторских, технологических и экономических новаций. Оно позволяет относительно небольшими усилиями проверить правильность планируемых высокочрезвычайных мероприятий.

Развитие вычислительной техники позволило существенно детализировать существовавшие модели и развить новые направления в моделировании. В настоящее время интенсивно развивается специализированное программное обеспечение для решения задач моделирования в различных прикладных сферах деятельности: электронике, механике, строительстве, экономике и п.т. Получили широкое распространение программы универсального математического моделирования MathCad и MatLab, которые хорошо обеспечивают учебный процесс по многим дисциплинам.

Специфической чертой моделирования для специальностей в области информатизации и автоматизации, по мнению авторов, должно являться моделирование информационных потоков от момента их формирования до поступления к потребителю, с учетом накопления, управления, преобразования и транспортирования по каналам связи. Именно поэтому, в пособии основное внимание уделено моделям систем массового обслуживания и методам статистического анализа результатов моделирования.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование – это вид научно-технической деятельности, направленный на определение технических характеристик (ТХ) исследуемой системы или процесса. Эти характеристики необходимы для принятия решения о производстве или применении моделируемой системы или процесса. В зависимости от цели и условий моделирования могут использоваться следующие **виды моделей** [1,2]:

1. **Натурная модель** – это физическая реализация системы с некоторыми упрощениями измерения (уменьшение, увеличение, отдельные элементы). Натурная модель оснащается системой измерений.

2. **Математическая модель** – приближённое описание некоторого класса явлений или объектов внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математическая модель в зависимости от полноты и точности ее структуры может быть отнесена к одному из следующих подвидов:

- расчетная модель – исчерпывающее математическое описание;
- имитационная модель – существенно приближённое описание, в котором сложные элементы и неизвестные процессы замещены случайными.

3. **Экспериментально-теоретическая модель** – математическая модель, параметры которой получаются на основе экспериментов с натуральными моделями отдельных элементов.

Подготовка и проведение моделирования требуют оценки и учета следующих **характеристик модели**:

- стоимость,
- продолжительность создания,
- научно-техническая обеспеченность,
- достоверность (надёжность, точность).

Математическая модель является основным элементом моделирования и в действительности является основой всех видов моделирования. В глобальном подходе математическим моделям присущи специфические этапы существования:

1. Формулировка законов, связывающих основные элементы модели.
2. Решение прямой задачи математического моделирования для прогнозирования поведения объекта моделирования.
3. Решение обратной задачи математического моделирования. Проверка адекватности математической модели. Изучение явлений, недоступных для непосредственного наблюдения.
4. Модернизация модели для построения нового вида математической модели.

Моделирование целесообразно и эффективно при выполнении следующих принципов моделирования:

1. **Принцип информационной достаточности.** Недостаток информации об исследуемой системе делает моделирование невозможным или недостоверным. Полная информация лишает моделирование смысла.
2. **Принцип осуществимости.** Модель должна быть создана за ограниченное время и обеспечить достижение цели с заданной вероятностью.
3. **Принцип множественности модели.** Создаваемая модель должна отражать свойства реальной системы, влияющие на выбранный

показатель эффективности. Детализация модели порождает новые модели.

4. **Принцип агрегирования.** Исследуемая сложная система разбивается на несколько независимых взаимодействующих подсистем, что отражает структуру модели, позволяет гибко перестраивать модель для других задач.
5. **Принцип параметризации.** Изолированные подсистемы заменяются вектором параметров, что позволяет сократить объём вычислений.

Процесс моделирования имеет следующие этапы:

1. Определение целей моделирования.
2. Разработка концепции, т.е. определение структуры моделируемой системы, свойств ее элементов, выявление причинно-следственных связей.
3. Формализация модели: составление схем, графов, формул.
4. Программная реализация.
5. Планирование модельных экспериментов: перебор управляющих факторов, учет случайных факторов.
6. Реализация плана моделирования.
7. Анализ и интерпретация результатов моделирования.

Программное обеспечение процесса моделирования должно обеспечивать высокий уровень автоматизации получения искомого решения: исследователь должен иметь возможность манипулирования структурой системы и видом исходных данных, а задачи реализации плана моделирования и статистической обработки результатов моделирования должны решаться унифицированными программными модулями. Структура программного обеспечения для реализации процессов моделирования должна включать:

- процедуры ввода и генерации исходных данных,
- определения функций, описывающих моделируемые элементы системы,
- определения функций, описывающих преобразование состояний элементов системы,
- цикл экспериментов, то есть перебора значений факторов в соответствии с планом модельного эксперимента,
- цикл параллельных опытов,
- цикл изменения модельного времени,
- алгоритм функционирования модели в соответствии с установленными причинно-следственными связями между элементами модели,
- процедуры накопления результатов моделирования,
- процедуры статистической обработки результатов моделирования.

Типовые обозначения систем моделирования:

D – (dynamic) непрерывные детерминированные модели, динамические модели, системы дифференциальных уравнений.

F – (finite automata) дискретно-детерминированные модели, конечные автоматы, матрицы и графы.

P – (probabilistic automat) дискретно-стохастические модели, вероятностные автоматы с памятью.

Q – (queuing system) непрерывно-стохастические модели, СМО.

N – (Petry nets) сетевые модели, причинно-следственные связи в сложных системах с параллельными процессами.

A – (aggregate system) комбинированные модели, агрегативное представление системы. Независимые агрегаты и схемы их сопряжения.

Воплощением принципа информационной достаточности является разделение исходных данных для моделирования на 2 вида: данные об априорных параметрах модели и данные о случайных параметрах модели. Априорные данные и законы распределения случайных данных задает исследователь, а программное обеспечение генерирует случайные данные и циклически активизирует априорные данные. Программная реализация модели должна учитывать свойства элементов системы соответствовать причинно-следственным связям этих элементов, как показано на рисунке 1.1.

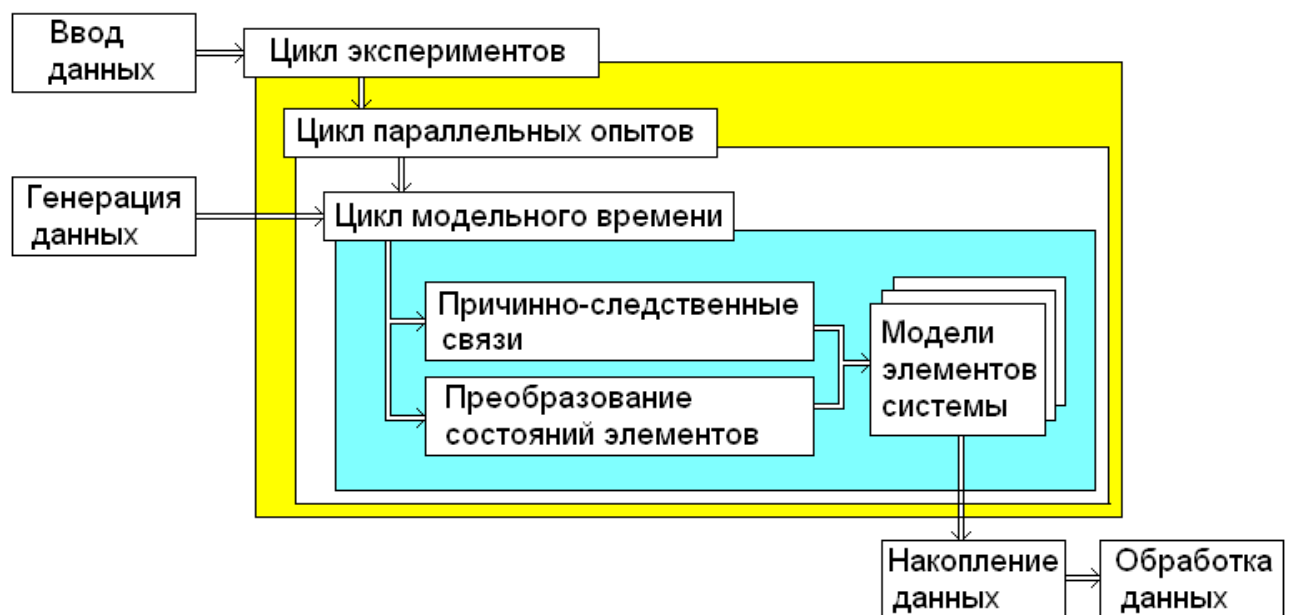


Рис.1.1. Структура программной реализации имитационной модели

Реализация плана моделирования сложных технических систем состоит из последовательности одиночных экспериментов, соответствующих одному циклу работы системы. План моделирования предусматривает

определенное число повторений таких экспериментов при различных сочетаниях управляющих (целевых) факторов и различных реализациях случайных факторов. Сложные комплексные модели могут совмещать в себе элементы имитационного моделирования и элементы натурного моделирования. Схема комплексного модельного эксперимента представлена на рисунке 1.2.

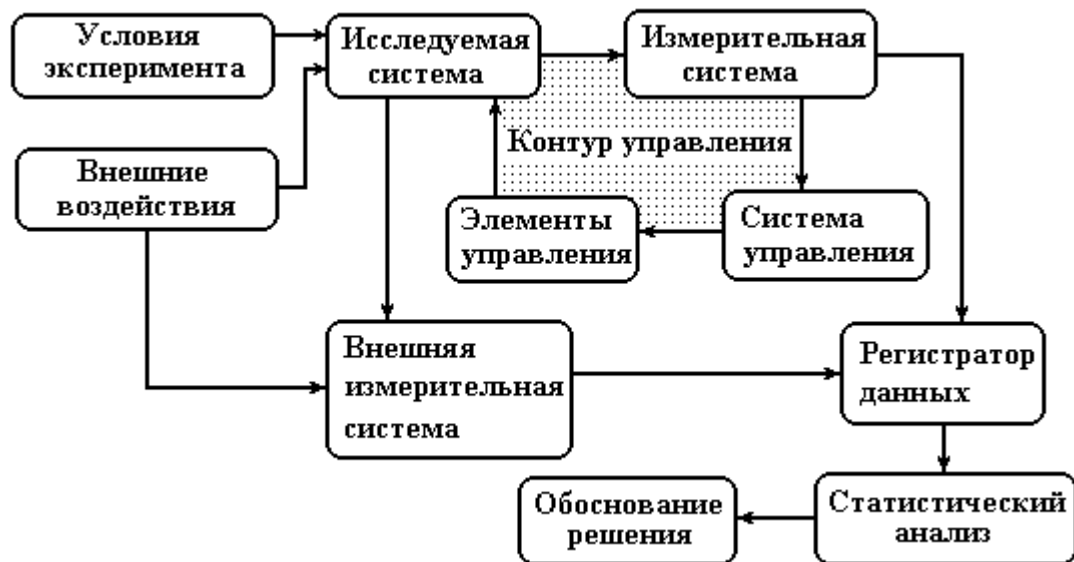


Рис.1.2. Схема комплексного модельного эксперимента

В процессе модельных экспериментов накапливается информация о работе системы управления и состоянии объекта в условиях воздействия внешней среды. Последующий статистический анализ результатов моделирования служит основой для принятия обоснованных решений о технических характеристиках исследуемого объекта.

2. АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

В основе алгоритмов генерации случайной последовательности чисел, подчиняющихся равномерному закону распределения, лежит использование дробной части результатов линейных операций с членами рекуррентной последовательности чисел и иррациональными числами. Простейший алгоритм задается формулой [3]:

$$x_{i+1} = \text{дробная часть} [11 \cdot x_i + \pi],$$

где x_0 - начальное значение последовательности, от которой зависит конкретное содержание последовательности и которая задается исследователем.

Чем больше разрядная сетка, используемая для операций вычисления случайных чисел x_i , тем длиннее псевдослучайная последовательность. Для

ЭМВ, имеющей АЛУ с 40 двоичными разрядами использовали следующее соотношение [3]:

$$x_{i+1} = (2^{40} \cdot x_i + 5^{17}) \bmod 2^{40}.$$

Применение приведенных алгоритмов генерации случайных чисел позволяет использовать для моделирования фиксированный ряд случайных чисел, который не зависит от программного обеспечения и который может легко варьироваться исследователем.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. МЕТОД ЖРЕБИЯ

Случайные факторы в моделировании служат средством для замены реальных неизвестных факторов и сложных подсистем. Виды случайных факторов: случайные события, случайные процессы и случайные поля. В данном параграфе рассмотрим моделирование простых событий.

Предполагается наличие источника случайных чисел $\{x_i\} \in \text{Rav}(a, b)$, подчиненных равномерному закону распределения на отрезке $[a, b]$. Если множество случайных чисел подчинено нормальному закону распределения, то используется обозначение: $y_i \in \text{Norm}(\mu, \sigma)$. Генератор случайных чисел для равномерного закона распределения входит в состав стандартных функций большинства языков программирования и математических программ.

Если задано полное множество независимых событий $\{A_1, A_2 \dots A_n\}$ и соответствующие каждому событию вероятности $\{p_1, p_2 \dots p_n\}$, то генерация последовательности появления этих событий формируется с помощью **метода жребия** [2]. Для реализации этого метода формируется последовательность чисел: $t_i = \sum_{k=1}^i p_k$, с помощью которой разбивают на отрезки единичный отрезок, как показано на рис. 3.1. Это возможно, так как события независимы, то есть $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Метод жребия состоит в том, что генерируется случайное число, принадлежащее отрезку $[0, 1]$, и если оно попало в i -тый интервал отрезка, то считается, что произошло событие A_i .

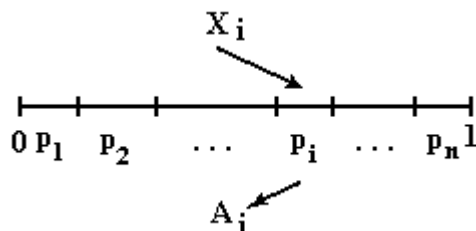


Рис.3.1. Генерация случайного события

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Случайное событие называется сложным, если оно зависит от двух и более простых событий.

Модель двух независимых событий A и B .

Считаются заданным вероятности событий $A \rightarrow P(A)$, $B \rightarrow P(B)$. Совместное появление событий A и B может моделироваться с помощью двух случайных чисел x_n, x_{n+1} путем последовательного применения метода жребия.

Однако для моделирования события (A, B) достаточно использовать одно случайное число, применяя формулу полной вероятности события и метод жребия. Существует четыре варианта совместного появления этих событий, которым соответствуют вероятности:

$$\begin{aligned} P(A, B) &= P(A) \cdot P(B), & P(\bar{A}, B) &= (1 - P(A)) \cdot P(B), \\ P(A, \bar{B}) &= P(A) \cdot (1 - P(B)), & P(\bar{A}, \bar{B}) &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)). \end{aligned}$$

Поскольку сумма этих вероятностей равна 1, то, разбив единичный отрезок на четыре части, величины которых равны этим вероятностям, и применив метод жребия для одного случайного числа, получим некоторое случайное сочетание пары событий.

Модель зависимых событий A и B .

Два события A и B считаются зависимыми, если отлична от нуля условная вероятность появления события B при условии, что имело место событие A : $P(B/A)$. Для генерации пары зависимых событий необходимо задать вероятности: $P(A)$, $P(B)$, $P(B/A)$. Кроме того, необходимо вычислить условную вероятность по формуле Байеса:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A) \cdot P(B/A)}{1 - P(A)}, \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A).$$

Далее, необходимо сгенерировать два случайных числа: $x_i, x_{i+1} \in \text{Rav}(0,1)$. Используя эти числа и алгоритм, приведенный на рисунке 4.1., получим одно случайное из четырех возможных сочетаний зависимых событий.

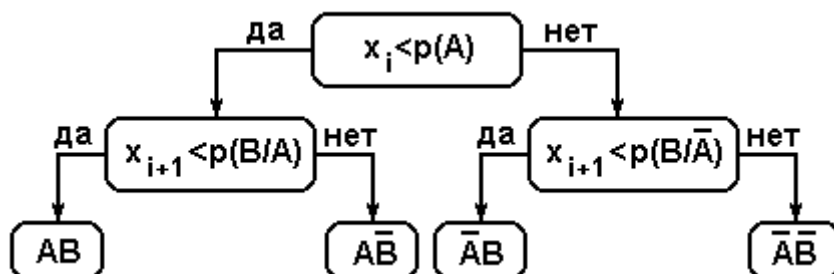


Рис.4.1. Алгоритм генерации сложного события с использованием двух случайных чисел

Однако, приведенную выше задачу можно решить, используя только одно случайное число. Для этого, необходимо предварительно вычислить величины следующих вероятностей:

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B / A), \quad P(\bar{A}, B) = (1 - P(A)) \cdot P(B / \bar{A})$$

$$P(A, \bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B / A)), \quad P(\bar{A}, \bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B / \bar{A})).$$

Сумма вычисленных вероятностей равна 1, следовательно, в данном случае можно применить метод жребия с одним случайным числом $x_i \in \text{Rav}(0,1)$ и получить одно случайное из четырех возможных сочетаний зависимых событий, как показано на рисунке 4.2.

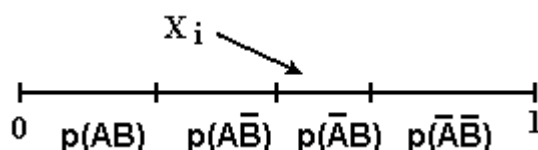


Рис.4.2. Алгоритм генерации сложного события с использованием одного случайного числа

Распространяя приведенную выше методику, можно генерировать сочетания любого числа зависимых (сложных) событий.

5. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. МЕТОД ОБРАЩЕНИЯ

Генерация случайных чисел для произвольных законов распределения осуществляется путем преобразования последовательности случайных чисел, подчиненных равномерному закону распределения, методом обращения. Введем следующие обозначения: X – независимая случайная величина; $Y = f(X)$ – случайная величина, зависящая от случайной величины X ; $f(x)$ – монотонная возрастающая функция, имеющая обратную функцию $f^{-1}(x)$; $P_x(x)$ – известная плотность вероятности случайной величины X .

Требуется определить: $p_y(x)$ – плотность вероятности случайной величины Y . Функция распределения случайной величины Y определяется следующим образом:

$$F_y(x) = P[Y \leq x] = P[f(X) \leq x] = P[X \leq f^{-1}(x)] = F_x(f^{-1}(x)).$$

Дифференцируя полученное выражение, получаем искомую плотность вероятности:

$$P_y(x) = \frac{dF_y(x)}{dx} = p_x(f^{-1}(x)) \cdot \left| \frac{df^{-1}(x)}{dx} \right|.$$

Абсолютная величина производной в полученной формуле позволяет применять формулу и для монотонно убывающих функций $f(x)$.

Закон обращения основывается на полученных соотношениях и выражается следующим уравнением:

$$\int_{-\infty}^{y_i} f(z) dz = x_i.$$

Таким образом, для определения очередного значения обращенной случайной величины необходимо решить полученное уравнение относительно величины y_i , где x_i – известное значение исходной, случайной величины, обычно, подчиняющейся равномерному закону распределения.

Случайные числа со стандартным нормальным распределением могут быть получены с помощью формул [3]:

$$y'_i = \sqrt{2 \cdot \ln(1/x_i)} \cdot \cos(2\pi \cdot x_{i-1}),$$

$$y''_i = \sqrt{2 \cdot \ln(1/x_i)} \cdot \sin(2\pi \cdot x_{i-1}).$$

6. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Моделирование сложных систем предполагает необходимость учета воздействия множества случайных факторов. Существуют аналитические методы описания систем случайных величин [14, 15].

Считая известными законы распределения исходного множества случайных величин, эти методы позволяют определить законы распределения суммы, произведения и отношения заданных случайных величин. Применение аналитических методов для случайных факторов позволяет увеличить достоверность и снизить вычислительные затраты на моделирование системы в целом.

Систему взаимно зависимых случайных величин определяет совместная плотность вероятности. В случае, когда случайная величина Z зависит от двух случайных величин X и Y как функция вида $Z = f(X, Y)$, функцию распределения $F(z)$ определяют по формуле:

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(f(X, Y) \leq z) = \iint_{D(z)} p_{x,y}(x, y) dx dy,$$

где $p_{x,y}(x, y)$ – совместная плотность вероятности случайных величин X и Y , область интегрирования $D(z)$ является множеством значений переменных (x, y) , удовлетворяющих неравенству $f(x, y) \leq z$. Если случайные величины X и Y являются независимыми, то $p_{x,y}(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$.

Плотность вероятности случайной величины Z определяется дифференцированием функции распределения: $p_f(z) = F'(z)$.

Закон распределения суммы случайных величин. Плотность вероятности суммы двух случайных величин определяется на основе того, что функция связи случайных величин имеет вид:

$$z = f(x, y) = x + y.$$

Область интегрирования $D(z)$ в соответствии с функцией связи имеет вид полуплоскости, ограниченной условием $z \leq x + y$, как показано на рисунке 6.1.

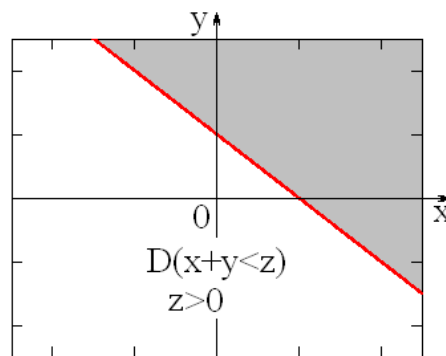


Рис.6.1. Область интегрирования при вычислении закона распределения суммы случайных величин

С учетом конфигурации области интегрирования функцию распределения суммы двух случайных величин можно представить в следующем виде:

$$F_S(z) = \iint_{D(z)} p_{x,y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_{x,y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z-x} p_{x,y}(x, y) dy \right\} dx.$$

Форма границ области интегрирования учтена в функциональной форме пределов интегрирования. Плотность вероятности суммы двух случайных величин вычисляется как производная функции распределения:

$$p_S(z) = F'_S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(z-y, y) dy.$$

Если случайные величины X и Y независимы, то их совместная плотность вероятности может быть представлена в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$p_{x,y}(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y).$$

Плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин вычисляется следующим образом:

$$p_S(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) p_y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(z-y) \cdot p_y(y) dy.$$

Закон распределения произведения случайных величин. Плотность вероятности произведения двух случайных величин определяется на основе того, что функциональная связь случайных величин имеет вид:

$$z = f(x, y) = x \cdot y.$$

Форма области интегрирования $D(z)$ зависит от знака переменной z и в соответствии с функцией связи имеет вид области, которая ограничена двумя гиперболами, как показано на рисунке 6.2. Формула ограничивающей гиперболы имеет вид: $y = \frac{z}{x}$.

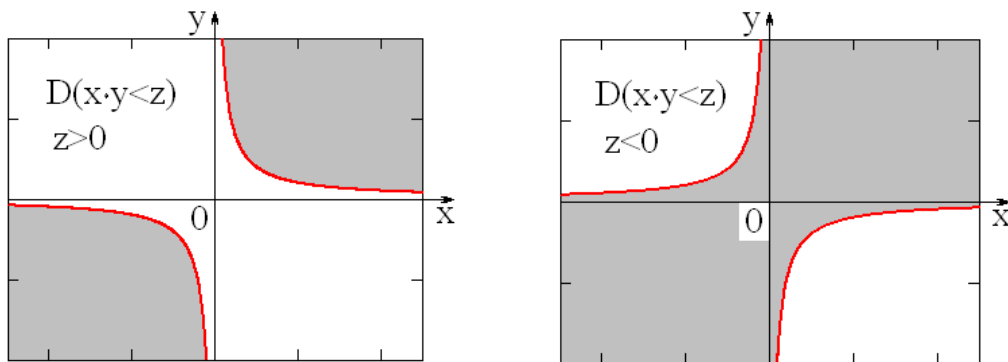


Рис.6.2. Области интегрирования при вычислении закона распределения произведения случайных величин

С учетом конфигурации области интегрирования функцию распределения произведения двух случайных величин можно представить в следующем виде:

$$F_M(z) = \iint_{D(z)} p_{x,y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^0 \left\{ \int_{\frac{z}{x}}^{\infty} p_{x,y}(x,y) dy \right\} dx + \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} p_{x,y}(x,y) dy \right\} dx.$$

Вид полученной формулы не зависит от знака переменной z , не смотря на наличие такой зависимости для области интегрирования. Плотность вероятности произведения двух случайных величин вычисляется как производная функции распределения:

$$p_M(z) = F'_M(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} \cdot p_{x,y}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \cdot p_{x,y}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx.$$

Если случайные величины X и Y независимы, то плотность вероятности произведения двух независимых случайных величин вычисляется следующим образом:

$$p_M(z) = - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} \cdot p_x(x) \cdot p_y\left(\frac{z}{x}\right) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \cdot p_x(x) \cdot p_y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

Следует отметить наличие особенности вида $\frac{1}{x}$ для подынтегральных функций, что может привести к вычислительным проблемам в случае необходимости применения численных методов для интегрирования полученных выражений.

Закон распределения отношения случайных величин. Плотность вероятности отношения двух случайных величин определяется на основе того, что функциональная связь случайных величин имеет вид:

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Форма области интегрирования $D(z)$ зависит от знака переменной z и в соответствии с функцией связи имеет вид области, которая ограничена двумя прямыми, как показано на рисунке 6.3. Формулы ограничивающих прямых имеют вид: $y = \frac{x}{z}$, $y = 0$.

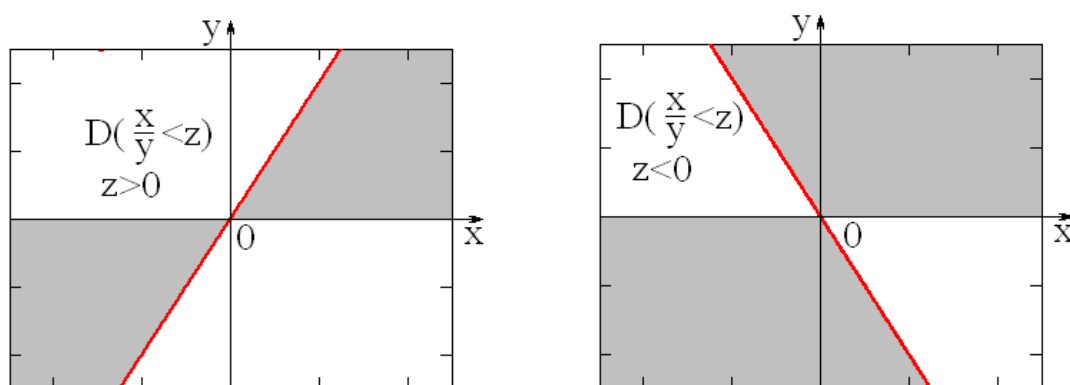


Рис.6.3. Области интегрирования при вычислении закона распределения отношения случайных величин

С учетом конфигурации области интегрирования функцию распределения отношения двух случайных величин можно представить в следующем виде:

$$F_D(z) = \iint_{D(z)} p_{x,y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^0 \left\{ \int_{z \cdot y}^{\infty} p_{x,y}(x,y) dx \right\} dy + \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z \cdot y} p_{x,y}(x,y) dx \right\} dy.$$

Вид полученной формулы не зависит от знака переменной z , не смотря на наличие такой зависимости для области интегрирования. Плотность вероятности *отношения* двух случайных величин вычисляется как производная функции распределения:

$$p_D(z) = F'_D(z) = - \int_{-\infty}^0 y \cdot p_{x,y}(z \cdot y, y) dy + \int_0^{\infty} y \cdot p_{x,y}(z \cdot y, y) dy.$$

Если случайные величины X и Y независимы, то плотность вероятности *отношения* двух независимых случайных величин вычисляется следующим образом:

$$p_D(z) = - \int_{-\infty}^0 y \cdot p_{x,y}(z \cdot y) \cdot p_{x,y}(y) dy + \int_0^{\infty} y \cdot p_{x,y}(z \cdot y) \cdot p_{x,y}(y) dy.$$

В качестве иллюстрации рассмотренных методов для определения законов распределения систем случайных чисел рассмотрим систему, образованную числами, подчиняющимися равномерному закону распределения. В качестве исходных случайных величин рассматриваются случайные числа A и B . Функции плотности вероятности этих чисел показаны на рисунке 6.4.

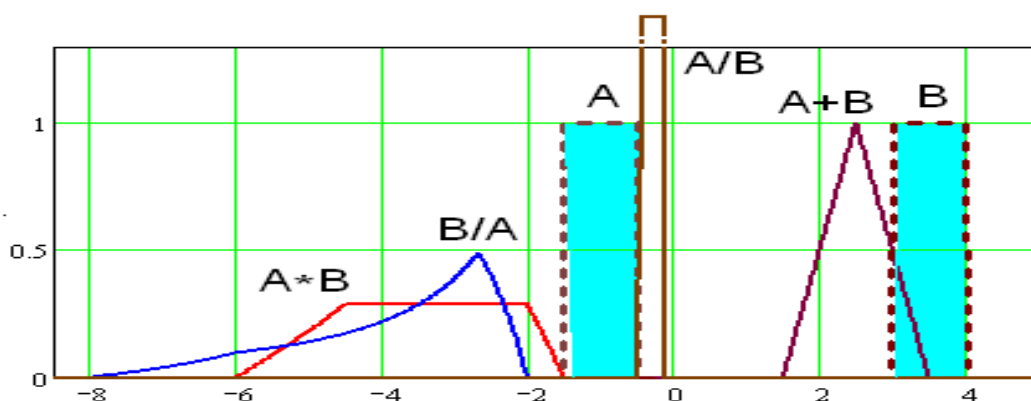


Рис.6.4. Функции плотности вероятности систем случайных чисел, подчиняющихся равномерным законам распределения

Множество случайных чисел A равномерно распределено на отрезке $[-1.5, -0.5]$, а числа B — на отрезке $[3, 4]$. Плотность вероятности суммы этих чисел имеет форму треугольника и называется распределением Симпсона.

Системы двух случайных чисел с нормальными законами распределения, отличающимися величинами математического ожидания показаны на рисунке 6.5.

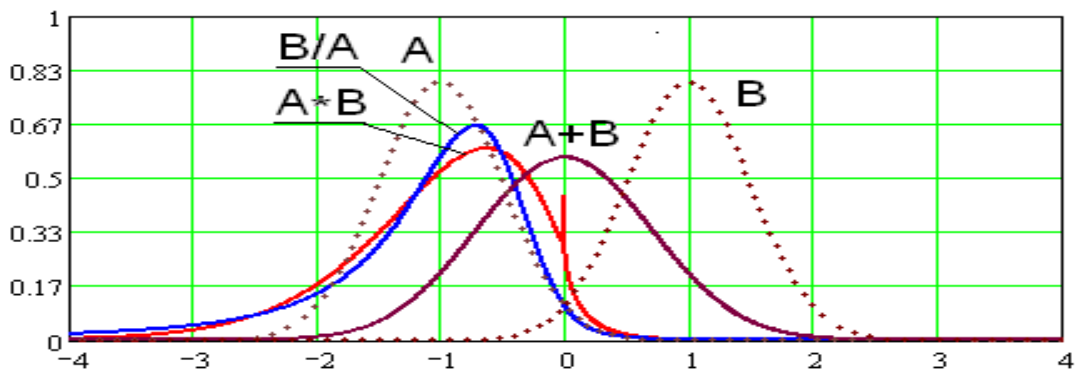


Рис.6.5. Функции плотности вероятности систем случайных чисел, подчиняющихся нормальным законам распределения

Графики на рисунке 6.5 построены по точкам, полученным численными методами. График плотности вероятности произведения случайных чисел имеет не отредактированную особенность в окрестности точки $x=0$. Численное интегрирование в этой окрестности требует особого подхода, так как стандартные методы приводят к ошибке, показанной на рисунке 6.5.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ХИ-КВАДРАТ

Статистическая обработка результатов экспериментов требует использования специальных законов распределения. К таковым следует отнести хи-квадрат, Стьюдента и Фишера распределения. Эти распределения порождаются нормальными случайными величинами.

Распределение хи-квадрат и одноименную случайную величину обозначают χ_v^2 . Интерпретация: случайная величина χ_v^2 – это сумма квадратов взаимно простых независимых стандартных нормальных случайных величин:

$$\chi_v^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2.$$

Параметр v – степень свободы. Введем обозначение: $\{x_i\}_{i=1,v} \sim N(0,1)$ – множество стандартных нормальных случайных величин. Плотность вероятности для $x > 0$ имеет вид: $p_{\chi_v^2}(x) = k_v \cdot e^{-x/2} \cdot x^{v/2-1}$, где $k_v = (\Gamma(v/2) \cdot 2^{v/2})^{-1}$ – нормирующий множитель. Графики плотности

вероятности, функции распределения и квантили приведены на рисунке 7.1-7.3.

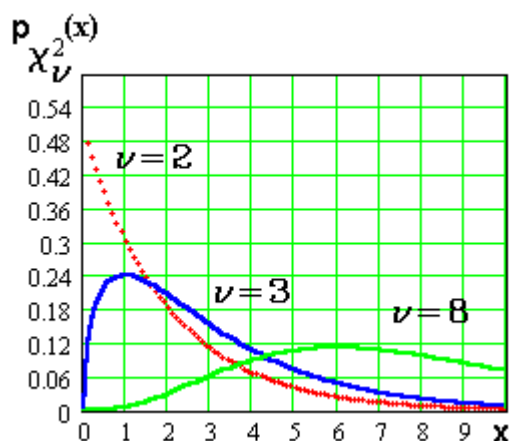


Рис.7.1. Плотность вероятности χ^2_ν - распределения

При $\nu=1$, плотность вероятности имеет особенность в точке $x=0$. Математическое ожидание и дисперсия χ^2_ν - распределения имеют вид:

$$M\{\chi^2_\nu\} = \nu, \quad D\{\chi^2_\nu\} = 2\nu.$$

Свойство устойчивости: сумма независимых случайных величин, имеющих χ^2_ν - распределение, имеет χ^2_ν - распределение. При $\nu \rightarrow \infty$, χ^2_ν - распределение асимптотически нормально с центром ν и дисперсией 2ν .

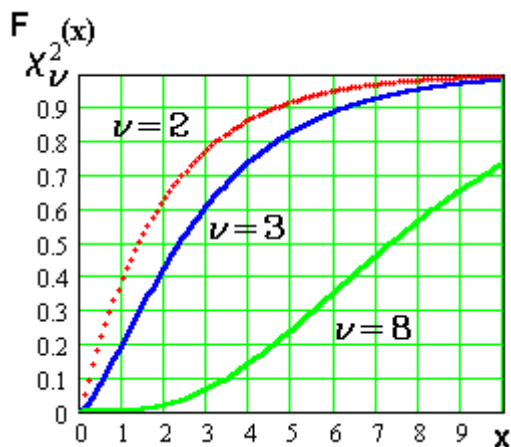


Рис.7.2. Функция χ^2_ν - распределения

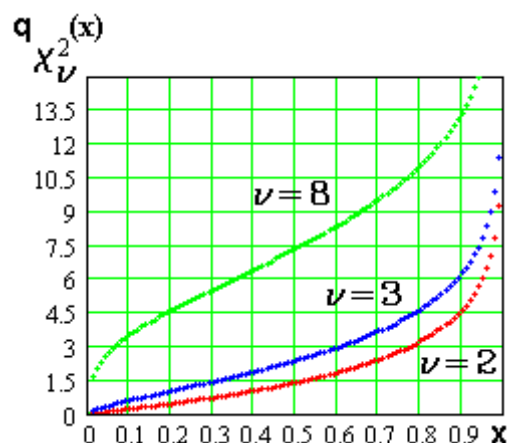


Рис.7.3. Квантиль χ^2_ν - распределения

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Распределение Стьюдента (Госсета) называют t-распределением и случайную величину обозначают t_ν . Интерпретация: случайная величина t_ν – это функция от $\nu+1$ взаимно простых независимых нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием:

$t_v = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{1}{v}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2)}}$. Параметр v – степень свободы. Введем обозначение:

$\{x_i\}_{i=0,v} \sim N(0, \sigma_x^2)$ – множество нормальных случайных величин.

Случайная величина t_v не зависит от дисперсии σ_x^2 . Плотность вероятности

имеет вид: $p_{t_v}(x) = k_v \cdot \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1/2)}$, где $k_v = \frac{\Gamma(v+1/2)}{\left(\Gamma(v/2) \cdot \sqrt{\pi v}\right)}$ –

нормирующий множитель. Графики плотности вероятности и функции распределения приведены на рисунке 5.1, 5.2. Математическое ожидание и дисперсия t – распределения имеют вид:

$$M\{t_v\} = 0, D\{t_v\} = \frac{v}{v-2}.$$

При $v \rightarrow \infty$, t – распределение асимптотически стандартно нормально.

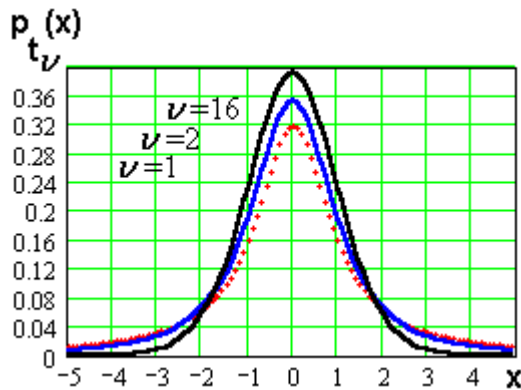


Рис.8.1. Плотность вероятности t – распределения

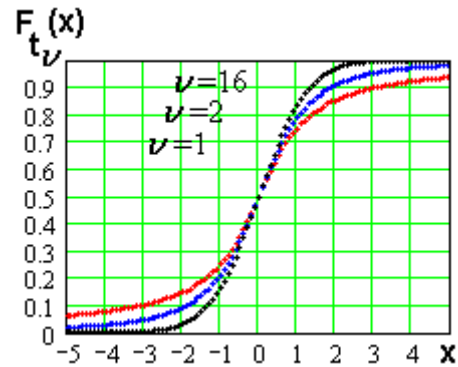


Рис.8.2. Функция t – распределения

9. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

Распределение Фишера называют F -распределением и случайную величину обозначают $F_{v1,v2}$. Интерпретация: случайная величина $F_{v1,v2}$ – это функция от $v1+v2$ взаимно простых независимых нормальных случайных

величин с нулевым математическим ожиданием: $F_{v1,v2} = \frac{\frac{1}{v1} \sum_{i=1}^{v1} x_i^2}{\frac{1}{v2} \sum_{i=v1+1}^{v1+v2} x_i^2} = e^z$.

Параметры $v1, v2$ – степени свободы. Введем обозначение:

$\{x_i\}_{i=1,v1+v2} \sim N(1, \sigma_x^2)$ – множество нормальных случайных величин.

Случайная величина F_{ν_1, ν_2} не зависит от дисперсии σ_x^2 . Плотность вероятности имеет вид: $p_{F_{\nu_1, \nu_2}}(x) = k_\nu \cdot x^{\frac{\nu_1-2}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} x\right)^{-(\nu_1+\nu_2/2)}$,

где $k_\nu = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^{-1} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{-1}$ – нормирующий множитель. Графики плотности вероятности и функции распределения приведены на рис.7,8. Математическое ожидание и дисперсия F_{ν_1, ν_2} – распределения имеют вид:

$$M\{F_{\nu_1, \nu_2}\} = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \quad D\{t_\nu\} = \frac{2 \cdot \nu_2^2 (\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1 (\nu_2 - 2)^2 (\nu_2 - 4)}.$$

При $\nu_1, \nu_2 \rightarrow \infty$, величина z распределена асимптотически нормально.

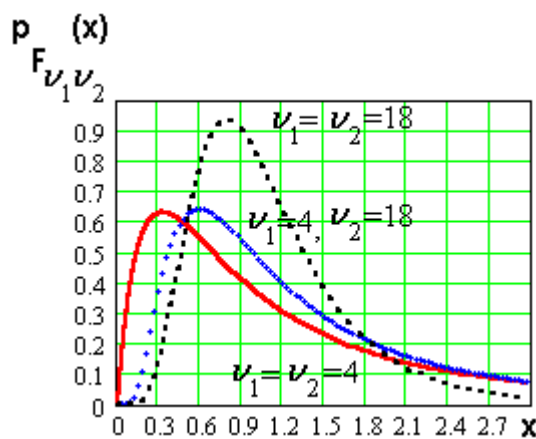


Рис.9.1. Плотность вероятности F-распределения

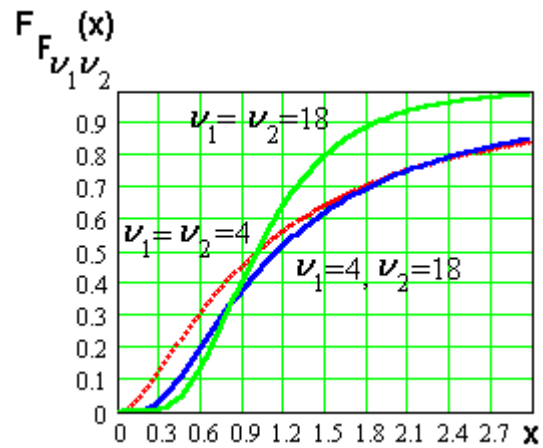


Рис.9.2. Функция F - распределения

10. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Алгоритмы решения задач моделирования часто требуют наличия случайных полей. В случае одного измерения, случайное поле соответствует случайному процессу, имеющему в качестве аргумента время. В случае двух измерений, случайное поле интерпретируют как некоторый рельеф, карту или изображение. Трехмерные поля используют для моделирования температурных или электромагнитных полей.

Характеристики случайных полей:

$m_\xi(\bar{x}) = M[\xi(\bar{x})]$ – математическое ожидание,

$\sigma^2[\xi(\bar{x})] = M[(\xi(\bar{x}) - m_\xi(\bar{x}))^2]$ – дисперсия,

$B_{\xi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = M[\xi(\bar{x}_1) \cdot \xi(\bar{x}_2)]$ – ковариация,

$k_{\xi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = M[(\xi(\bar{x}_1) - m_{\xi}(\bar{x}_1)) \cdot (\xi(\bar{x}_2) - m_{\xi}(\bar{x}_2))]$ – корреляция.

Поле называется однородным в широком смысле, если выполняются условия: $m_{\xi}(x) = m_{\xi} = \text{const}$, $k_{\xi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = k_{\xi}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$.

Параметрическая модель случайного поля [4]:

$$\xi(\bar{x}, \bar{\Omega}) = m_{\xi} + \frac{\sigma_{\xi}}{N} \cdot \sum_{i=1}^N A_i \cdot \sin((\bar{x} + \bar{x}_0^T) \cdot \bar{V}_i + \frac{\pi}{4}),$$

$$\bar{\Omega} = (m_{\xi}, \sigma_{\xi}, \{A_i\}, \{\bar{V}_i\}).$$

Данное поле имеет математическое ожидание m_{ξ} и среднее квадратичное σ_{ξ} . Множество $\{A_i\}$ и $\{\bar{V}_i\}$ генерируется по заданным законам распределения, которые определяют корреляционные свойства поля. Моделирование соответствует сложению пространственных гармоник, имеющих различные частоты и направления распространения. Пример двумерного, случайного поля приведен на рис. 10.1.

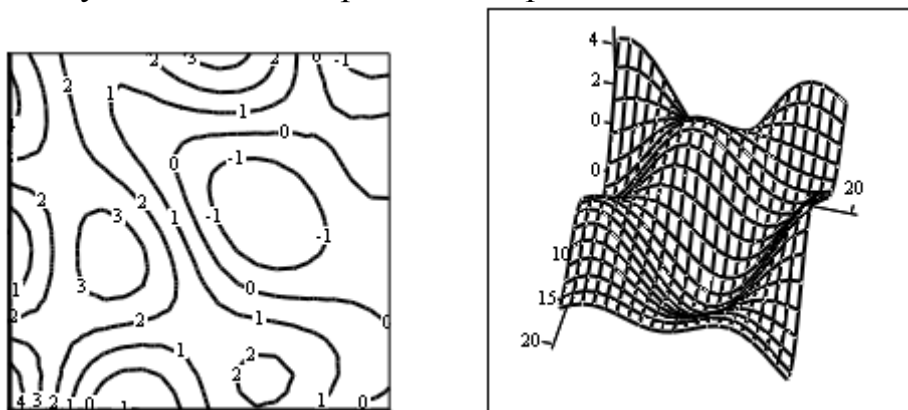


Рис.10.1. Пример генерации случайного поля

11. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Системы массового обслуживания (СМО) – это обобщенное название объектов определенной структуры, имеющих заданные связи и взаимодействующие ("обслуживающие") с неограниченным числом перемещаемых особых объектов, называемых "требованиями" или "заявками" [5]. В качестве типичного примера СМО принято рассматривать телефонную сеть, которая имеет в качестве связующих элементов структуры – коммутаторы, а в качестве требований – телефонные вызовы. Более современный пример – сеть ЭВМ для обмена пакетами информации. Структура простейшей структуры СМО и пример более сложной структуры приведены на рисунке 11.1.

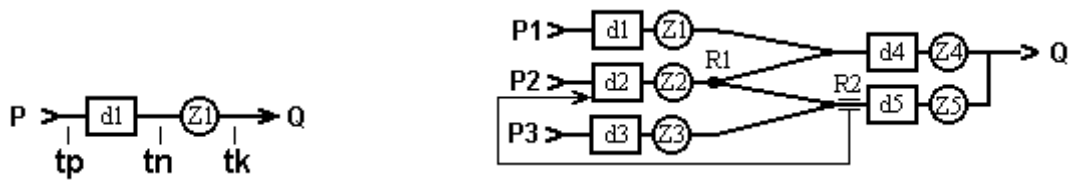


Рис.11.1. Структура простейшей структуры СМО и сложной СМО

Основные элементы СМО: P – входной поток требований, $d1$ – очередь (накопитель) поступающих требований, $Z1$ – обслуживающая система, Q – поток обслуженных требований, $R1$ – элемент деления потока требований, $R2$ – элемент организации обратного потока требований. Процесс обслуживания каждого i -того требования в простейшей СМО характеризуется следующими моментами времени: tp_i – время прибытия, tn_i – начало обслуживания, tk_i – время конца обслуживания.

Входной поток требований P задаётся вектором $\bar{a}$, компонентами которого являются интервалы между поступающими заявками. Каждому поступившему требованию соответствует некоторая длительность его пребывания в очереди w_i и длительность обслуживания b_i , которые образуют соответственно вектора $\bar{w}$ и $\bar{b}$. Перечисленные параметры описывают процесс прохождения требования через два уровня СМО, что иллюстрирует диаграмма на рис.11.2.

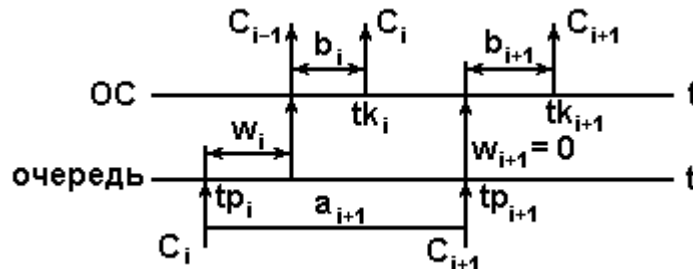


Рис.11.2. Диаграмма процесса работы простейшей СМО

Время прибытия i -того требования равно:

$$tp_i = tp_{i-1} + a_i.$$

Время конца обслуживания i -того требования определяется выражением:

$$tk_i = \text{if}(tp_i > tk_{i-1}, tp_i + b_i, tk_{i-1} + b_i)$$

Для индикации факта нахождения i -того требования в СМО используется функция присутствия требования к системе:

$$fp(i, t) = \text{if}(tp_i < t < tk_i, 1, 0),$$

где t – текущее непрерывное время.

Количество требований в системе в момент времени t определяется следующим образом:

$$N(t) = \sum_{i=0}^m fp(i, t).$$

Дисциплина СМО – это порядок принятия заявок в очередь или к обслуживанию.

СМО является системой с отказами, если в ней существуют очереди с ограниченным временем пребывания заявки. После истечения допустимого интервала заявки могут исчезать из системы или возвращаться к её входному потоку. Возможные правила дисциплин:

1. Линии занимаются в порядке прибытия заявок.
2. Заявки извлекаются из очереди в произвольном порядке.
3. Заявки применяются к обслуживанию по минимальному остатку длительности ожидания.
4. Заявки принимаются к обслуживанию, по какому-либо вторичному признаку заявки.

Моменты поступления требований и длительности их обслуживания – случайные величины. Если законы распределения этих случайных величин известны, то используется следующая система обозначений простейших СМО:

$$A/B/m/K/M,$$

где **A** – тип закона распределения интервалов между соседними требованиями,

B – тип закона распределения длительности обслуживания требований,

m – количество однотипных параллельных обслуживающих систем,

K – емкость накопителя (очереди),

M – мощность источника требований (количество телефонных аппаратов, подключенных к коммутатору).

Обозначение типов законов распределения:

M – показательное распределение: $p(x) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot x}$,

E_r – распределение Эрланга,

H_k – гипергеометрическое распределение,

D – равномерное распределение,

G – произвольное распределение.

Основные соотношения теории СМО:

$\rho = \lambda \cdot \bar{x}$ – где ρ – коэффициент использования СМО, λ – средняя скорость поступления требований, $\bar{x}$ – среднее время обслуживания.

$\rho = \frac{\lambda \cdot \bar{x}}{m}$ – коэффициент использования СМО, состоящей из m приборов.

$0 \leq \rho \leq 1$ – условия стабильности работы СМО.

$T = \bar{x} + W$ – среднее время пребывания требования в системе, W – среднее время пребывания в очереди.

$\bar{N} = \lambda \cdot T$ – формула Литтла, $\bar{N}$ – среднее число требований в системе.
 $\bar{N}_q = \lambda \cdot W$ – средняя длина очереди.

12. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАБОТУ СМО

Каждому состоянию СМО можно сопоставить определенный номер, который соответствует количеству требований, находящихся в системе. Для многих практических интерпретаций СМО целесообразно предполагать, что смена состояний допустима только путем перехода в одно из соседних состояний. Такое предположение соответствует требованию, что в течение короткого интервала времени может поступить или быть обслуженным только одно требование. Диаграмма переходов СМО между различными состояниями приведена на рис. 12.1, где: n – номер состояния.

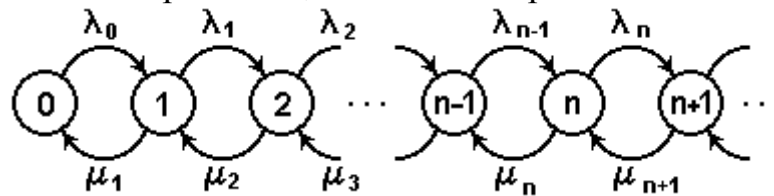


Рис.12.1. Диаграмма состояний СМО

Такая система характеризуется следующими параметрами:
 λ_n – интенсивность поступления требований в СМО,
 μ_n – интенсивность обслуживания поступивших в СМО требований.

Так как временные интервалы между поступающими требованиями и длительности обслуживания требований считаются случайными величинами, то и состояния СМО принято характеризовать вероятностным параметром: $P_n(t)$ – вероятность того, что СМО в момент времени t находится в состоянии n . Система дифференциальных уравнений, описывающая данный процесс, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n(t) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 \cdot P_1(t) - \lambda_0 \cdot P_0(t) \end{cases} .$$

Интерпретируется данная система следующим образом: скорость изменения вероятности n -го состояния равна разности вероятности возникновения этого состояния и вероятности покидания этого состояния (элементы уравнения со знаком минус).

Получена бесконечная система дифференциальных уравнений. Система соответствует простейшей цепи Маркова.

13. ПРОЦЕСС ЧИСТОГО РАЗМНОЖЕНИЯ

Система дифференциальных уравнений, полученная в предыдущем параграфе, имеет биологическое приложение для описания процессов размножения и гибели элементов популяции организмов. Если параметр $\mu_n = 0$, то такому случаю соответствует факт отсутствия обслуживания требований, то есть процесс чистого размножения. В этом случае система дифференциальных уравнений приобретает следующий вид и легко решается:

$$\begin{cases} \frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_k(t) + \lambda \cdot P_{k-1}(t) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \end{cases}$$

Система решается рекуррентной процедурой, начиная с нулевого неизвестного. Вероятность "опустошенности" $P_0(t)$ определяется непосредственно из второго уравнения приведенной выше системы уравнений и имеет вид:

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ – что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение. Далее можно получить вероятность нахождения в системе только одного требования из уравнения, полученного подстановкой в следующее уравнение значения вероятности опустошенности системы: $\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_1(t) + \lambda \cdot e^{-\lambda t}$.

Решение этого уравнения имеет вид: $P_1(t) = \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$.

Общее решение системы является распределением Пуассона и имеет следующий вид: $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$. $MO\{P_n(t)\} = \lambda t$ – математическое ожидание, $D\{P_n(t)\} = (\lambda t)^2$ – дисперсия распределения Пуассона.

Пуассоновский процесс – это процесс, для которого время появления требований с интенсивностью λ в интервале времени $(0 - t)$ подчинено закону Пуассона.

Распределение Пуассона хорошо моделирует естественные и производственные процессы, вызовы на телефонные станции, интенсивность потоков в цепях.

14. СИСТЕМА М/М/1 В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Система М/М/1 имеет в своем составе один обслуживающий прибор, а накопитель очереди и мощность нагрузки не имеют ограничений. Из этого следует, что данная система имеет бесконечное число возможных состояний. Величины временных интервалов между требованиями и длительности

обслуживания имеют экспоненциальное распределение. Для упрощения соотношений с целью получения свернутых аналитических выражений обычно полагают: $\begin{cases} \lambda_k = \lambda \\ \mu_k = \mu \end{cases}$. Соответствующая диаграмма состояний системы приведена на рисунке 14.1.

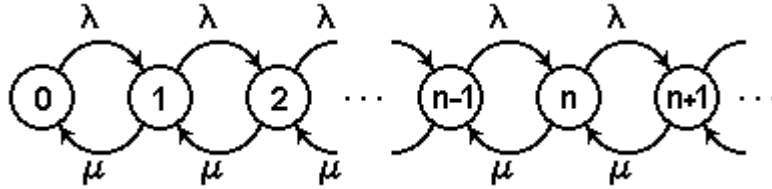


Рис.14.1. Диаграмма состояний системы М/М/1

Система дифференциальных уравнений для данной СМО имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n(t) \\ \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 \cdot P_1(t) - \lambda_0 \cdot P_0(t) \end{cases}.$$

Система решается методом производящих функций. Система имеет точное аналитическое решение, выражающееся через функции Бесселя:

$$P_k(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \cdot \sum_{i=1}^k \left[p^{\frac{(k-i)}{2}} \cdot I_{i-1}(a \cdot t) + p^{(k-i-1)} \cdot I_{k+i+1}(a \cdot t) + (1-p) \cdot p^k \cdot \sum_{j=k+i+2}^{\infty} p^{\frac{j}{2}} \cdot I_j(a \cdot t) \right]$$

где $p = \frac{\lambda}{\mu}$ -интенсивность нагрузки, $a = 2 \cdot \mu \cdot p^{\frac{1}{2}}$.

Полученное выражение позволяет анализировать воздействие на СМО различных возмущений, в том числе особенности протекания переходных процессов.

15.ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

Стационарный режим СМО – это режим работы системы, при котором ее вероятностные характеристики постоянны во времени, то есть $P_n(t) = p_n$ и $\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = 0$. Диаграммы состояний СМО в стационарном режиме такая же, как и в общем случае (рис.14.1). Система дифференциальных уравнений для стационарного процесса получается из общей системы уравнений и имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_{n-1} \cdot p_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n) \cdot p_n \\ 0 = \mu_1 \cdot p_1 - \lambda_0 \cdot p_0 \end{cases}$$

где: p_n – вероятность n -го состояния, p_0 – вероятность опустошенности системы.

Полученная система уравнений имеет рекурсивный тип, и ее решение находят последовательно, начиная с состояния опустошенности:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0, p_2 = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot p_1, \dots,$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p_{n-1} = \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_n} \cdot p_0 = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}.$$

Определение вероятности опустошенности осуществляется на основе свойства полноты множества событий: $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Таким образом, эта

величина равна: $p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1}.$

16. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1

Система имеет один обслуживающий прибор и неограниченные по величине накопитель и мощность нагрузки. Параметры системы: $\begin{cases} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{cases}.$

Обслуживание требований осуществляется в порядке их поступления.

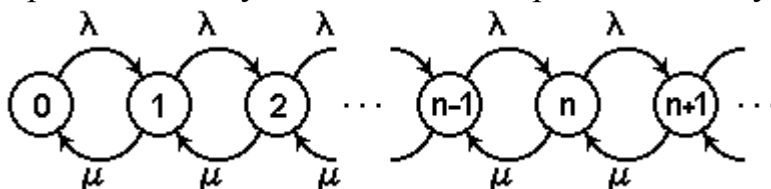


Рис.16.1. Диаграмма состояний системы М/М/1

Вероятность наличия в системе n требований равна:

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n, \text{ где } p_0 = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right]^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Отношение интенсивности поступления требований к интенсивности их обслуживания в СМО называется коэффициентом использования: $\rho = \lambda/\mu$. Система устойчива, если $0 \leq \rho < 1$.

Среднее количество требований в системе:

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = (1 - \rho) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Дисперсия числа требований в системе:

$$\sigma_N^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - N)^2 \cdot p_n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Среднее время пребывания требования в системе: $T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\rho}.$

17. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/∞

В системе бесконечное количество приборов, т.е. каждое требование начинает немедленно обслуживаться. Параметры системы: $\begin{cases} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = n \cdot \mu \end{cases}.$

Диаграмма состояния системы:

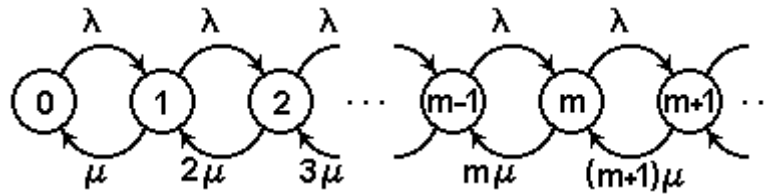


Рис.17.1. Диаграмма состояний системы с бесконечным количеством приборов

Вероятность пребывания в системе k требований равно:

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{i+1} \cdot \mu = \frac{(\lambda \cdot \mu)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Среднее количество требований в системе $\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu}.$

18. ПЕРЕПОЛНЯЮЩИЕ ВЫХОДНЫЕ ПОТОКИ

Для некоторых систем интенсивность поступления требований уменьшается по мере занятости СМО из-за того, что ослабевает мощность источника требований. Один из вариантов такой системы имеет следующие

параметры: $\begin{cases} \lambda_n = \frac{\alpha}{(n+1)}, \text{ где } n - \text{номер состояния СМО.} \\ \mu_n = \mu \end{cases}$

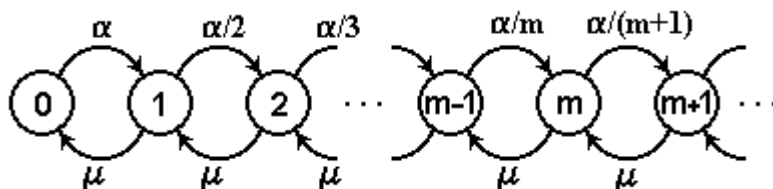


Рис.18.1. Диаграмма состояний системы с переполняющими входными потоками

Используя формулы для стационарного режима и значения параметров СМО, получаем следующие значения вероятностных параметров системы:

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{(i+1) \cdot \mu} = \frac{\alpha^n}{\mu^n \cdot n!} \cdot p_0, \quad p_0 = \left[1 + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right]^{-1} = e^{-\left(\frac{\alpha}{\mu} \right)},$$

$$p_n = \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^n}{n!} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{\mu} \right)} - \text{функция распределения Пуассона.}$$

Коэффициент использования СМО в этом режиме равен:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - p_0 = 1 - e^{-\left(\frac{\alpha}{\mu} \right)}.$$

Число требований, находящихся в системе с переполняющимися выходными потоками, соответствует распределению Пуассона.

$$\text{Среднее количество требований в системе: } \bar{N} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \frac{\alpha}{\mu}.$$

$$\text{Среднее время пребывания требования в системе: } T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\alpha}{(\lambda \cdot \mu)}.$$

Система устойчива, то есть ее очередь имеет ограниченную длину, если $\frac{\alpha}{\mu} < 1$.

19. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/м БЕЗ ПОТЕРЬ

Система состоит из m обслуживающих приборов; следовательно, производительность СМО будет расти за счет подключения резервных приборов до тех пор, пока все приборы системы не окажутся занятыми. После исчерпания резерва требования будут накапливаться в очереди, то есть они не окажутся потерянными. СМО такого типа может иметь следующие свойства по отношению к входному и выходному потокам:

$\begin{cases} \lambda_k = \lambda \\ \mu_k = \min[k \cdot \mu, m \cdot \mu] \end{cases}$. Диаграмма состояний системы приведена на рисунке 19.1.

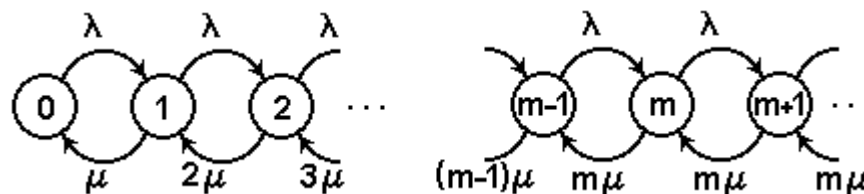


Рис.19.1. Диаграмма состояний системы М/М/м без потерь

Вероятность нахождения системы в k -том состоянии равна:

$$p_k = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu \cdot (i+1)} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}, \text{ если } k < m,$$

$$p_k = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{m^{m-k}}{m!}, \text{ если } k \geq m.$$

Вероятность опустошенности СМО равна:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}.$$

Вероятность того, что очередное поступающее требование окажется в очереди, равна: $P_{\text{очереди}} = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = C(m, \lambda/\mu)$. Полученная функция называется функцией Эрланга.

20. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/м С ПОТЕРЯМИ

Система состоит из m обслуживающих приборов, следовательно, производительность СМО будет расти за счет подключения резервных приборов до тех пор, пока все приборы системы не окажутся занятыми. После исчерпания резерва поступающие требования будут получать "отказ" и безвозвратно теряться, то есть данная система не имеет накопителя для создания очереди. СМО такого типа может иметь следующие свойства по отношению к входному и выходному потокам: $\begin{cases} \lambda_k = \lambda \\ \mu_k = k \cdot \mu \end{cases}$. Диаграмма состояний системы приведена на рисунке 20.1.

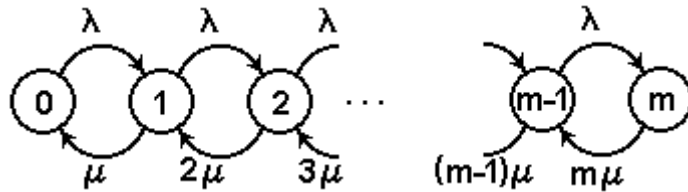


Рис.20.1. Диаграмма состояний системы М/М/м с потерями

Вероятность пребывания системы в n -м состоянии равна:

$$p_n = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}, \text{ где } p_0 = \left[\sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right]^{-1}.$$

Рассматриваемая система характеризуется специальным параметром, который называется вероятностью полной занятости:

$$P_m = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} \bigg/ \left(\sum_{n=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \right).$$

Эта формула также называется формулой потерь Эрланга. Система рассмотренного вида всегда устойчива.

21. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1/К

Система состоит из одного обслуживающего аппарата и накопителя длиной К. Требования, получившие отказ, считаются потерянными.

Параметры системы: $\begin{cases} \lambda_k = \lambda \\ \mu_k = \mu \end{cases}$. Диаграмма приведена на рисунке 21.1.

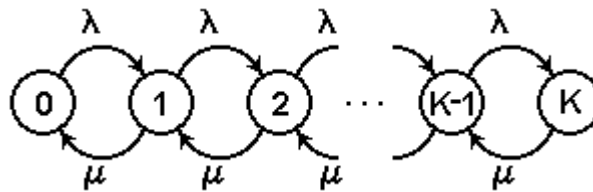


Рис.21.1. Диаграмма состояний системы М/М/1/К

Вероятность пребывания системы в **n**-м состоянии равна:

$$p_n = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad \text{где} \quad p_0 = \frac{1 - (\lambda/\mu)}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}.$$

Система рассмотренного вида всегда устойчива.

22. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/1//М

Система имеет один обслуживающий прибор, конечное число источников нагрузки и неограниченную емкость очереди. Конечное число источников нагрузки можно интерпретировать как конечное число телефонных аппаратов, подключенных к одному общему коммутатору, причем, чем больше абонентов в данный момент разговаривают по телефону, тем меньше вероятность того, что поступит новый запрос на соединение.

Параметры системы: $\begin{cases} \lambda_n = (M - n) \cdot \lambda \\ \mu_n = \mu \end{cases}$. Диаграмма состояний системы имеет

вид:

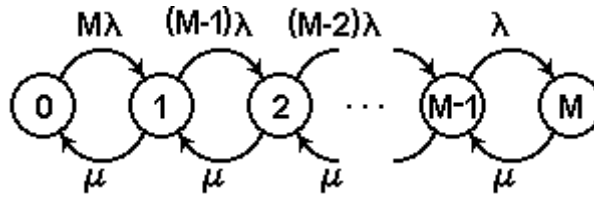


Рис.22.1. Диаграмма состояний системы M/M/1/M

Вероятность пребывания системы в n-м состоянии равна:

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda \cdot (M-i)}{\mu} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{M!}{(M-n)!}, \text{ где } p_0 = \sum_{n=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{M!}{(M-n)!}.$$

Система рассмотренного вида всегда устойчива.

23. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО M/M///M

Система имеет конечное число источников нагрузки и неограниченные емкость очереди и количество обслуживающих приборов. Параметры системы: $\begin{cases} \lambda_n = (M-1) \cdot \lambda \\ \mu_n = n \cdot \mu \end{cases}$. Диаграмма состояний системы имеет вид:

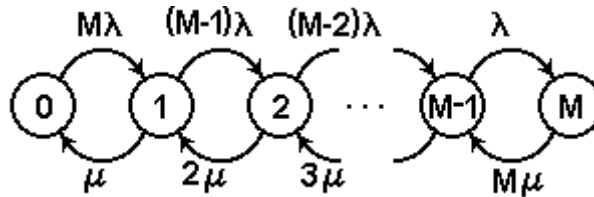


Рис.23.1. Диаграмма состояний системы M/M///M

Вероятность пребывания системы в n-м состоянии равна:

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = p_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda \cdot (M-i)}{\mu \cdot (i+1)} = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \binom{M}{n} = \frac{(\lambda/\mu)^n \cdot \binom{M}{n}}{(1 + \lambda/\mu)^M},$$

где $\binom{M}{n} = C_n^M = \frac{M!}{n!(M-n)!}$ - количество сочетаний из M по n,

вероятность опустошенности системы:

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^M \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \binom{M}{n} \right]^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right)^{-M}.$$

Среднее количество требований в системе: $\bar{N} = \sum_{k=0}^M \lambda \cdot P_k = \frac{M \cdot \lambda/\mu}{1 + \lambda/\mu}.$

24. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ДЛЯ СМО М/М/м/К/М

Система имеет m обслуживающих приборов, способна накапливать до K требований и мощность нагрузки равна M . Предполагается, что между этими параметрами справедливо следующее соотношение: $m \leq K \leq M$.

Параметры системы:
$$\begin{cases} \lambda_n = (M-n) \cdot \lambda \\ \mu_n = \begin{cases} n \cdot \mu, & \text{при } n \leq m \\ m \cdot \mu, & \text{при } n > m \end{cases} \end{cases}$$

Диаграмма системы имеет следующий вид:

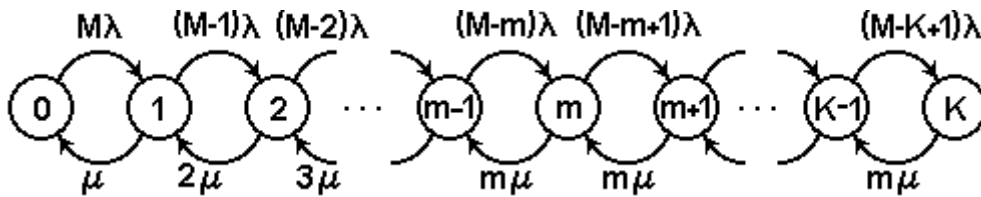


Рис.24.1. Диаграмма состояний системы М/М/м/К/М

В области $0 \leq n \leq m-1$ вероятность n -го состояния выражается зависимостью: $p_n = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \binom{M}{n}$, а в области $m \leq n \leq K$ выражается

так: $p_n = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \binom{M}{n} \cdot \frac{n!}{m!} \cdot m^{m-n}$. Система всегда устойчива.

25. ПРИМЕР МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ СМО

Рассмотрим пример модели предприятия на основе элементов СМО. Будем считать, что предприятие производит электронные приборы из получаемых от поставщиков комплектующих двух видов. Будем полагать, что накопители очереди соответствуют складским элементам производства, а обслуживающие элементы – производственным участкам. Введем следующие обозначения: P – поток закупаемых микросхем, Q – поток закупаемых электромеханических компонентов, z_1 – участок программирования микросхем, z_2 – участок сборки, z_3 – участок контроля, z_4 – участок реализации, d_5 – поток забракованных изделий, d_6 – склад готовой продукции.

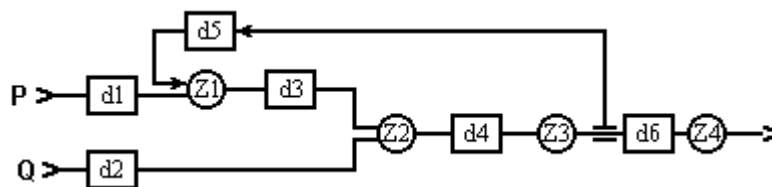


Рис.25.1. Пример модели технологического процесса на основе СМО

Зная параметры потоков P и Q, с помощью данной модели можно оценить нагрузку на производственные участки и складские элементы, предвидеть возможность затоваривания или недостатка продукции.

26. АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аппроксимация – это замена одних математических объектов другими, которые в определённом смысле близки к исходным данным и более просты или удобны для применения. Исходными данными для аппроксимации в задачах моделирования могут являться эмпирические данные или результаты предварительного моделирования отдельных наиболее сложных элементов модели. Кроме того, часто практикуется замена точных сложных моделей на приближенные, но значительно более простые соотношения с целью сокращения времени моделирования.

Наиболее часто исходными данными для аппроксимации является множество табличных данных, которые называют узловыми точками:

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=0, N-1}.$$

Виды аппроксимации:

1. **Интерполяция** – аппроксимирующая функция должна проходить через все узловые точки. Цель – получение значений в промежутках между узловыми точками. Пример изображен на рисунке 26.1.
2. **Регрессия** – аппроксимирующая функция минимизирует расстояние между аппроксимирующей функцией и узловыми точками по определённому критерию (и проходить через узловые функции не обязана). Пример изображен на рисунке 26.2.
3. **Экстраполяция** – получение значений аппроксимируемой функции за пределами интервала, в котором заданы узловые точки. Для рисунков 26.1 и 26.2 отрезок $x > 3$ следует считать участком экстраполяции имеющихся данных.

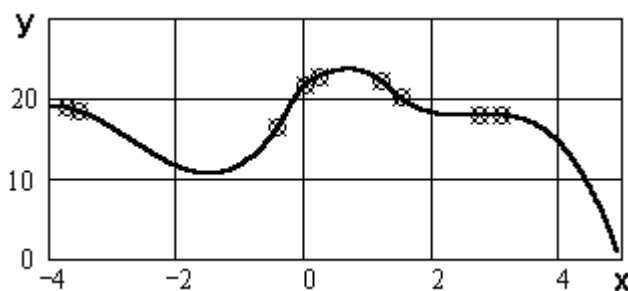


Рис.26.1. Интерполяция данных

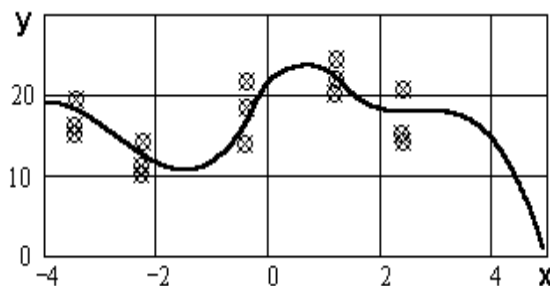


Рис.26.2. Регрессия данных

Для оценки точности аппроксимации в одной точке используется величина разности между известным значением $y_i(x_i)$ и полученным в результате аппроксимации $f(x_i)$, которая называется **невязкой**:

$$\varepsilon_i = y_i - f(x_i) .$$

Оценка точности для всего участка аппроксимации проводится на основе интегральной величины: **меры близости**, способы вычисления которой зависят от характера решаемой задачи. Наиболее часто используют следующие меры:

1. $\mu_1 = \max |f(x_i) - y_i|$ – абсолютная мера,
2. $\mu_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_i) - y_i|$ – усредненная мера,
3. $\mu_3 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_i) - y_i|^2$ – средняя квадратичная мера близости.

Типичные аппроксимирующие функции:

1. Многочлены: $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$.
2. Полиномы: $g(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x)$, где множество функций $\{\varphi_i(x)\}$ должно обладать свойствами ортогональности. Например, тригонометрические, гиперболические или эллиптические функции.
3. Рациональные дроби: $g(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

27. ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Аппроксимация многочленами является достаточно универсальной и удобной для многих практических задач формой обобщения набора числовых данных. Разложение функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки является одним из вариантов получения аппроксимирующего многочлена. Приведенные ниже теоремы позволяют

получить представление о возможностях полиномиальной аппроксимации: о пределах точности и о единственности результата аппроксимации.

Теорема 1.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $g(x)$ степени $m = m(\varepsilon)$, абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше ε , то есть $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Теорема устанавливает факт достижимости любой точности с помощью многочлена. Обеспечение высокой степени точности требует соответствующей степени полинома. Если требуется аппроксимировать множество узловых точек с несовпадающими абсциссами, и степень полинома равна числу точек, то отклонение равно нулю.

Теорема 2:

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве G , и любого натурального числа m существует многочлен $g(x)$ степени не выше m , абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ минимально, причем такой многочлен единственный.

Теорема о существовании и единственности оптимального по точности аппроксимирующего многочлена позволяет обоснованно использовать многочлены для решения задач аппроксимации.

28. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Кубический сплайн – это математическая модель гибкого тонкого стержня. Стержень закреплён в двух точках с заданными углами наклона. Приобретаемая стержнем форма соответствует минимуму потенциальной энергии. Уравнение равновесия стержня. $\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0$. Решением уравнения является кубический многочлен.

Аппроксимация сплайнами позволяет для заданного множества узловых точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, \overline{N-1}}$ построить сопряженную систему кубических многочленов. В промежутках между каждой парой узловых точек $[x_{i-1}, x_i]$ строится своя интерполяционная функция $\varphi_i(x)$, которая является многочленом третьей степени:

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3.$$

Результат аппроксимации сплайнами показан на рисунке 28.1.

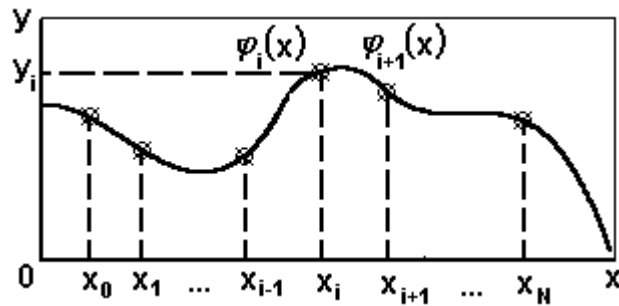


Рис.28.1. Интерполяция сплайнами

Задача интерполяции сплайнами состоит в определении коэффициентов $\{(a_i, b_i, c_i, d_i)\}_{i=1, \overline{N}}$ по координатам узловых точек. $N \cdot 4$ – общее количество неизвестных коэффициентов. В узловых точках функция $\varphi_i(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$y_{i-1} = \varphi_i(x_{i-1}) = a_i,$$

$$y_i = \varphi_i(x_i) = a_i + b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3,$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ – интервал между смежными узлами. Общее количество уравнений для вычисления коэффициентов равно $2 \cdot N$.

Первая и вторая производные сплайнов в узловых точках должны быть непрерывны, поэтому справедлива система из $(N-1) \cdot 2$ соответствующих уравнений:

$$\varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(x_i),$$

$$\varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}''(x_i),$$

где $\varphi_i'(x_i) = b_i + 2 \cdot c_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1})^2,$

$$\varphi_i''(x_i) = 2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1}).$$

Преобразование уравнений полученных уравнений приводит их к следующему виду:

$$b_i + 2 \cdot c_i \cdot h_i + 3 \cdot d_i \cdot h_i^2 = 2 \cdot b_{i+1},$$

$$c_i + 3 \cdot d_i \cdot h_i = c_{i+1}.$$

Два последних уравнения, обеспечивающих равенство числа неизвестных и числа уравнений, определяются неоднозначно. Наиболее часто используются следующие условия:

$$\varphi_1''(x_0) = 0, \quad \varphi_N''(x_N) = 0.$$

Преобразование этих уравнений дает следующее:

$$C_1 = 0, \quad C_N + 3 \cdot d_N \cdot h_N = 0.$$

Приведенные уравнения образуют полную систему, матрица которой может быть приведена к трехдиагональному виду, что обеспечивает быстрое и корректное решение, несмотря на большую размерность системы. Следует

отметить, что данный метод не гарантирует хорошей точности, если функция резко изменяется за 1 шаг сетки.

29. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА

Данная интерполяция является глобальной, то есть строится один многочлен для всех узлов отрезка аппроксимации. Интерполяционный многочлен имеет вид:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_N \cdot x^N.$$

В узловых точках $\{(x_i, y_i)\}_{i=0, N-1}$ должно выполняться условие: $\varphi(x_i) = y_i$. Система линейных уравнений относительно неизвестных $\{a_i\}_{i=0; N}$ имеет единственное решение в том случае, если нет совпадений узлов по координате x . Интерполяционный полином Лагранжа представляют в виде линейной комбинации многочленов $L_i(x)$:

$$L(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x),$$

Полиномы $L_i(x)$ обращаются в ноль во всех узловых точках за исключением i -ой точки, где $L_i(x_i) = 1$. Такие интерполяционные полиномы строятся следующим образом:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_N)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)}.$$

Теорема: многочлен Лагранжа – единственный многочлен степени N , принимающий в узловых точках заданные значения.

Главным положительным качеством многочлена Лагранжа можно считать простоту алгоритма его построения; однако, это достигается за счет относительно большого объема вычислений коэффициентов этого многочлена.

30. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН НЬЮТОНА

Если расположение узловых точек по оси x является равномерным с шагом h , то используют интерполяционный многочлен Ньютона, который имеет вид:

$$N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n+1}).$$

Коэффициенты полинома определяют из условия $N(x) = y_i$:

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}.$$

Формула удобна при реализации методов численного интегрирования и дифференцирования. Интерполяционные многочлены Ньютона и Лежандра отличаются способом вычисления, но дают тождественные формулы.

31. ЛОКАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ ДАННЫХ

Сглаживание – одна из форм регрессии, которая заменяет вектор исходных значений ординат $\{y_i\}$ узловых точек на вектор ординат $\{\bar{y}_i\}$ сглаженных значений. Сглаживание применяют в случаях, когда исходные данные содержат случайные ошибки для получения более плавных зависимостей. В большинстве случаев считается, что узлы расположены с равномерным шагом по оси x . Для нахождения сглаженного значения по обе стороны от узла выбирают k (k – четное число) соседних значений: $\{y_{i-k/2}, \dots, y_i, \dots, y_{i+k/2}\}$, и строится многочлен степени m методом наименьших квадратов ($m \leq k$).

Рассмотрим несколько примеров сглаживающих функций:

$$\text{если } m = 1, k = 2, \text{ то } \bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i + y_{i+1}}{3},$$

$$\text{если } m = 1, k = 4, \text{ то } \bar{y}_i = \frac{y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}}{5},$$

$$\text{если } m = 3, k = 4, \text{ то } \bar{y}_i = \frac{-3 \cdot y_{i-2} + 12 \cdot y_{i-1} + 17 \cdot y_i + 12 \cdot y_{i+1} - 3 \cdot y_{i+2}}{35}.$$

Сглаживание крайних точек интервала либо не проводится, либо задаётся специальным правилом, так как возникает "краевой эффект", состоящий в том, что указанные соотношения для сглаживания не могут применяться к k крайним точкам интервала.

32. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Требование равенства аппроксимирующей функции к эмпирическим значениям оправдано лишь в случае высокой достоверности и точности исходных данных. В таких случаях аппроксимирующая функция должна опираться на усредненные данные и не обязана точно совпадать с ними.

Предполагается, что вид аппроксимирующей функции известен:

$$\varphi(x) = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

где $(a_0, a_1, \dots, a_m)^T$ – вектор параметров, которые необходимо определить.

Введем следующие обозначения:

$\{(x_i, y_i)\}_{i=0, N-1}$ – множество заданных узловых точек, $\varepsilon_i = \varphi(x_i) - y_i$ – невязка,

$E = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i^2$ – целевая функция, которая минимизируется, $n=N-1$.

Требуется найти такие значения вектора параметров $(a_0, a_1, \dots, a_m)$, которые обеспечивают минимальные величины E . Условие минимума целевой функции имеет вид системы уравнений: $\left\{ \frac{\partial E(\bar{a})}{\partial a_i} = 0 \right\}_{i=0; \overline{m}}$

Если в качестве функции $\varphi(x)$ задан многочлен $\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m \cdot x^m$, то и система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i] = 0$$

$\vdots$

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m] = 0$$

Собирая коэффициент при неизвестных компонентах a_i , можно получить:

$$n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i$$

$\vdots$

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2 \cdot m} = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^m$$

Получена система линейных уравнений для $m+1$ неизвестного.

В матричном виде система имеет вид: $A \cdot \bar{a} = B$,

где $A_{k,e} = \sum_{i=1}^n x_i^{k+1}$ и $B_k = \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i^k$.

Решение системы имеет вид: $\bar{a} = A^{-1} \cdot B$.

Метод наименьших квадратов позволяет получить решение, если $m \leq n$. Метод применяется для обработки серий повторяющихся экспериментов. В теории вероятности доказывается, что полученным методом значения вектора параметров $\bar{a}$ наиболее вероятны, если значения невязок ε_i подчиняются нормальному закону распределения.

33. ОПИСАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. СЕТИ ПЕТРИ

Обычные схемы алгоритмов не приспособлены для наглядного описания и представления параллельных процессов. Для решения задач формализации дискретных параллельных процессов были разработаны специальные сетевые модели и в первую очередь сети Петри (1960г, С. Petry). Этап алгоритмизации модели реализуется с наибольшим успехом, если модель можно представить достаточно наглядно и формально.

Сети Петри – это математическая модель дискретных динамических систем, ориентированных на качественный анализ и синтез системы. Сети Петри хорошо описывают параллельные процессы.

Элементы сети Петри:

1. Вершины:
 - а) позиции “О” – условное возникновение событий;
 - б) переходы “|” – сами события.
2. Дуги – связывающие разнотипные вершины.
3. Фишки (метки) – объект представления динамического процесса.

Активный переход – в каждой входной позиции есть хотя бы одна фишка.

Разметка сети – это конфигурация расположения фишек в сети.

Аналитическая форма сети Петри представляется в виде вектора:

$$P = (B, D, I, O, M),$$

где $B = \{b_2\}$ – множество позиций, $D = \{d_2\}$ – множество переходов,

$I = B \times D$ – множество входов, $O = D \times B$ – множество выходов, M – разметка сети.

Условие срабатывания перехода d_j :

$$\forall b_i \in I(d_j) \{M(b_i) \geq 1\}.$$

Это условие означает, что во всех входных позициях перехода d_j находится хотя бы по одной фишке. Срабатывание перехода d_j изменяет разметку сети следующим образом:

$$M(B) = M(B) - I(d_j) + O(d_j).$$

При срабатывании перехода: изымают по одной фишке из всех его входных позиций и добавляют по одной фишке во все его выходные позиции. В позициях может накапливаться несколько фишек. Пример срабатывания переходов и перемещений фишек приведен на рисунке 33.1.

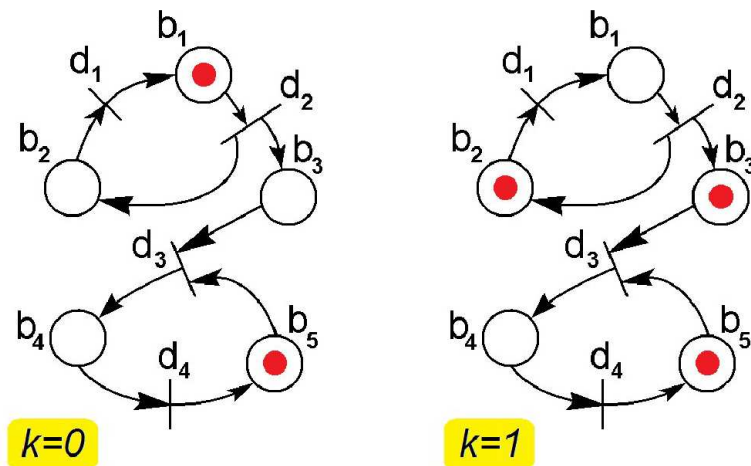
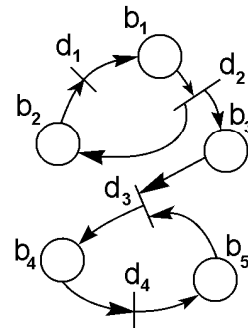


Рис.33.1. Две фазы состояний сети Петри
Матрица входов (входных позиций каждого перехода):

	d_1	d_2	d_3	d_4
b_1	1	0	0	0
b_2	0	1	0	0
b_3	0	1	0	0
b_4	0	0	1	0
b_5	0	0	0	1

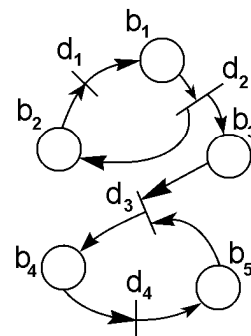
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Матрица выходов (выходных позиций каждого перехода):

	d_1	d_2	d_3	d_4
b_1	0	1	0	0
b_2	1	0	0	0
b_3	0	0	1	0
b_4	0	0	0	1
b_5	0	0	1	0

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Основные направления анализа сетей Петри:

1. **Проблема достижимости** – требуется определить, возникла ли разметка M' при работе сети при начальной разметке M_0 .
2. **Свойство живости** – выявление элементов, где не появляются фишки при заданной начальной разметке M_0 .

3. **Безопасность сети** – исследование возможности появления более одной фишки в позиции для заданной начальной разметки M_0 .

Формально сети Петри определяются двумя матрицами: матрицей входов и матрицей выходов.

34. МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ

Рассмотрим пример математической модели развития эпидемии. Введем следующие обозначения:

I – количество инфицированных животных,

S – количество восприимчивых животных,

D – количество умерших животных,

R – количество выживших животных.

Процесс протекания эпидемии начинается из-за попадания в стадо инфицированных животных, что отображается в виде начальных условий для решения следующей системы рекуррентной системы уравнений:

$$\begin{cases} I_{i+1} = 0,0001 \cdot S_i \cdot I_i \\ S_{i+1} = S_i - 0,0001 \cdot S_i \cdot I_i \\ D_{i+1} = D_i + 0,55 \cdot I_i \\ R_{i+1} = R_i + 0,45 \cdot I_i \end{cases}$$

где i – номер дня протекания эпидемии.

Векторная форма начальных условий и системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ D_0 \\ R_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 50 \\ 22000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_{i+1} \\ S_{i+1} \\ D_{i+1} \\ R_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0,0001 \cdot S_i \cdot I_i \\ S_i - 0,0001 \cdot S_i \cdot I_i \\ D_i + 0,55 \cdot I_i \\ R_i + 0,45 \cdot I_i \end{pmatrix}.$$

Результат решения приведен в виде графика на рисунке 34.1.

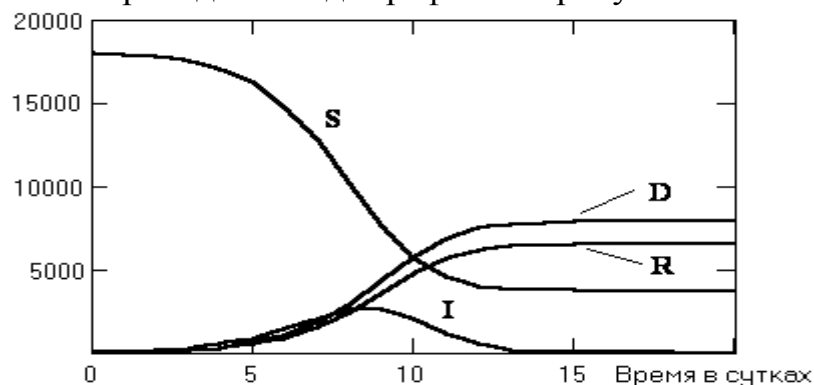


Рис.34.1. Процесс протекания эпидемии

35. МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Рассмотрим модель социальных (этнических, экономических и т.п.) отношений. Эта модель позволяет проанализировать процесс появления, развития и управления различными социальными отношениями. Построение модели основано на установлении аналитических соотношений для численности различных социальных групп. Общество делится на группы по некоторому многомерному признаку, например, по отношению к какой-то социальной идее: восприимчивые, поддерживающие и разочарованные. Введем следующие обозначения:

V – матрица социальных отношений,

i и j – номера социальных групп,

V_{ii} – самооценка i -той социальной группы,

V_{ij} – это оценка i -той группой достоинств j группы,

$V_i^* = V_{ii} - V_{ij}$ – социоцентризм,

$|V_{ij} - V_{ji}| = \varepsilon$ – степень сходства взаимных оценок.

Система дифференциальных уравнений, определяющих социальные соотношения, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = -\alpha \cdot k \cdot V^* \cdot N_1 \cdot N_2 + \beta \cdot N_2 + q \cdot N_3 \\ \dot{N}_2 = \alpha \cdot k \cdot V^* \cdot N_1 \cdot N_2 - (b + \beta) \cdot N_2 \\ \dot{N}_3 = b \cdot N_2 - q \cdot N_3 \\ \dot{V}^* = V^* \cdot (C_0 + C_1 \cdot k \cdot N_1 - m \cdot (N_2 + N_3)) \end{cases},$$

где: N_1 – фаза восприимчивости социальных идей (численность подгруппы),

N_2 – фаза поддержки социальной идеи,

N_3 – фаза разочарования,

$N_1 + N_2 + N_3 = \text{const} = 0$

$$\dot{N}_i = \frac{\partial N_i}{\partial t}$$

$\alpha, k, C_0, C_1, m, b, \beta, q$ – коэффициенты чувствительности,

$\alpha \cdot k \cdot V^* \cdot N_1 \cdot N_2$ – скорость распространения социальной идеи (скорость заражения),

$\beta \cdot N_2$ – поток несогласных с социальной идеей,

$b \cdot N_2$ – поток разочарованных.

Система решается исходя из начальных значений социальных групп. Отношения между социальными группами учитываются путём увеличения количества уравнений системы в два и более раз. Производная по времени

заменяется разностью: $\dot{N}_i \Rightarrow N_{i+1} - N_i$, а шаг интегрирования уравнения выбирается равным 10^{-nt} . Типичный вариант решения системы дифференциальных уравнений приведен на рисунке 35.1.

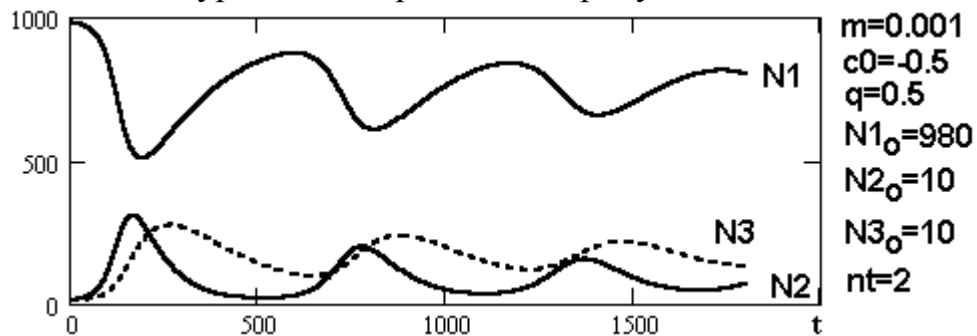


Рис.35.1. Процесс развития социальных отношений

Можно получить три вида качественно отличающихся решений:

1. Сохранение интегральной связи между группами, после возникновения кратковременной конфликтной ситуации.
2. Нарушение интегральных связей с периодически повторяющимися конфликтами между группами (рис.35.1).
3. Снижение уровня интегральных связей в течение большого промежутка времени без повторных конфликтов.

Модель позволяет учитывать финансовое управление процессом социальных отношений. Для этого необходимо полагать: $C_0 \sim F$, где F - объём финансирования. Можно доказать, что $V_{ii} \sim F^2$, то есть самооценка пропорциональна квадрату вложенных на развитие идеи затрат. Именно эта величина существенно влияет на качественный характер развития рассматриваемой социальной идеи.

36. ТОЧЕЧНОЕ И ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Оценка – значение исследуемого параметра, вычисленная по выборке. Оценка является случайной величиной, так как она вычисляется по выборке, объединяющей случайные результаты измерений. Свойства оценок определяются видом закона распределения исследуемой генеральной совокупности. Каждая оценка соответствует определенному параметру генеральной совокупности. Наиболее часто оценивают следующие параметры:

m_x – математическое ожидание генеральной совокупности;	$\bar{x}$ – оценка математического ожидания;
σ_x^2 – дисперсия генеральной совокупности;	S_x^2 – оценка дисперсии.

Существует два вида оценок: точечные и интервальные. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии имеют вид:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Коэффициент корреляции между двумя выборками вычисляют по формуле:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{(N-1)S_x S_y} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Точечные оценки менее информативны, чем интервальные. Например, точечная оценка не дает информации о степени близости оценки $\bar{x}$ к соответствующему параметру m_x .

Интервальное оценивание имеет целью построение интервалов, в которых с заданной степенью достоверности должны оказаться оцениваемые параметры. Такой вид оценки требует задания величины особого вероятностного параметра – доверительной вероятности – p . Этот параметр рекомендуется задавать из стандартного ряда: 0.8, 0.9, 0.95, 0.98, 0.99, 0.995. Границы доверительного интервала определяют из следующего соотношения:

$$P[b_1 < \theta < b_2] = p,$$

где b_1, b_2 – нижняя и верхняя границы доверительного интервала, θ – оцениваемый параметр. Оценка называется двухсторонней, если рассчитываются две границы, или односторонней, если рассчитывается одна граница, а вторая – считается бесконечной. Значения границ рассчитывают на основе величины доверительной вероятности или уровня значимости: $q=1-p$.

Интервальные оценки математического ожидания и дисперсии для нормальных генеральных совокупностей оценивают на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \bar{x} - u_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \leq m_x \leq \bar{x} + u_{\alpha} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \\ \bar{x} - t_{1-\alpha, \nu} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{N}} \leq m_x \leq \bar{x} + t_{\alpha, \nu} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{N}}, \\ \nu \cdot \frac{s_x^2}{\chi_{1-\alpha, \nu}^2} \leq \sigma_x^2 \leq \nu \cdot \frac{s_x^2}{\chi_{\alpha, \nu}^2}, \end{aligned}$$

где $u_{1-\alpha}$, $t_{\alpha, \nu}$, $\chi_{\alpha, \nu}^2$, – квантили стандартного нормального, Стьюдента и хи-квадрат распределений соответственно, $q=1-p$, $\alpha = q/2$, $\nu = N-1$, p -

доверительная вероятность. Если необходима односторонняя оценка, то приведенные двойные неравенства преобразуются в односторонние неравенства, а параметр $\alpha = q$. Геометрическая интерпретация процесса расчета величины симметричного доверительного интервала приведена на рис.36.1.



Рис.36.1. Расчет величины доверительного интервала

Свойства доверительного интервала:

- Увеличение доверительной вероятности p приводит к увеличению доверительного интервала $[b_1, b_2]$, при постоянстве прочих параметров.
- Увеличение количества опытов N сужает доверительный интервал $[b_1, b_2]$, при постоянстве прочих параметров.
- Двойственность трактовки доверительного интервала: $P_1(\bar{X} - \varepsilon < m_x < \bar{X} + \varepsilon) = P_2(m_x - \varepsilon < \bar{X} < m_x + \varepsilon)$, где P_1 – вероятность того, что точное значение оцениваемого параметра m_x будет накрыто доверительным интервалом, P_2 – вероятность того, что случайная оценка $\bar{X}$ попадет в заданный интервал.
- Положение границ доверительного интервала $[b_1, b_2]$ таково, что длина его минимальна для заданной доверительной вероятности p .

37. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистическая гипотеза – это некоторое предположение относительно свойств генеральной совокупности, из которой извлекается выборка. Простая гипотеза соответствует одному распределению и одной точке

пространства параметров. Сложная гипотеза – выбор распределения из множества распределений или точки пространства параметров из интервала. Проверяемая гипотеза обозначается H_0 , а альтернативная гипотеза – H_1 .

Критерий статистической гипотезы – правило, позволяющее принять или отвергнуть данную гипотезу на основании выборки.

Статистика – функция от результатов повторяющихся опытов $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$, которая обладает свойством роста предсказуемости с увеличением количества опытов. Такое свойство называется свойством статистической устойчивости. Статистическая устойчивость в каждой конкретной ситуации есть эмпирический закон, который может быть проверен только опытом. Примеры статистики: точечная оценка математического ожидания, точечная оценка дисперсии.

Область возможных значений статистики делят на две части: область принятия гипотезы и критическую область.

Общая схема проверки гипотез:

- формулируется основная гипотеза,
- задается уровень значимости гипотезы q ,
- выбирается статистика $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ и определяется ее закон распределения,
- вычисляются критические значения статистики $g_{kr}(q, N)$ на основе данных о количестве опытов N ,
- по данным выборки вычисляют экспериментальное значение статистики,
- сравнивают критические значения и экспериментальное значение статистики,
- если экспериментальное значение попало в область принятия гипотезы, то гипотезу считают подтвержденной по результатам опытной выборки.

В процессе проверки гипотезы возможны правильные и ложные решения, возможные варианты приведены в таблице.

Таблица 1

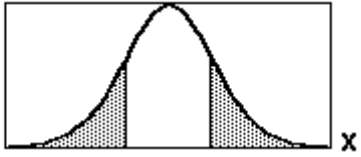
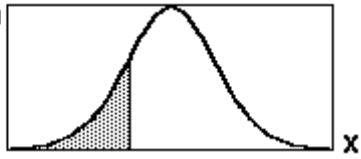
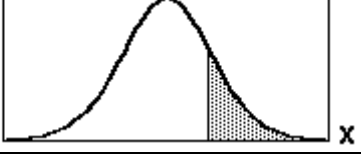
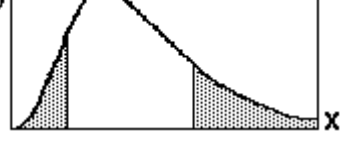
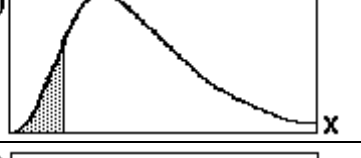
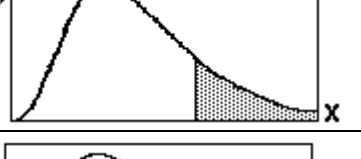
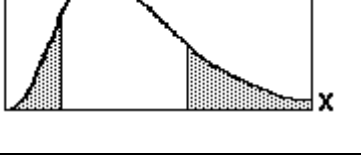
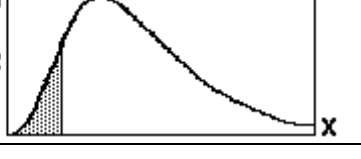
Гипотеза	Объективно верна	Объективно не верна
Принимается	Правильное решение	Ошибка 2-го рода
Отвергается	Ошибка 1-го рода	Правильное решение

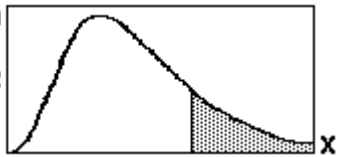
Уровень критерия значимости q соответствует вероятности ошибки первого рода, вероятность ошибки второго рода называют мощностью критерия. Надежность критерия: $p=1-q$.

38. СТАНДАРТНЫЕ КРИТЕРИИ ПОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОЖИДАНИИ И ДИСПЕРСИИ

Стандартные критерии проверки гипотез о значениях математических ожиданий и дисперсий нормальных генеральных совокупностей при независимых наблюдениях в выборке приведены в таблице 2.

Таблица 2

Номер гипотезы	Вид гипотезы	Статистика	График
1	$H_0 : m_x = m_0$ $H_1 : m_x \neq m_0$	$t = \frac{\bar{x} - m_0}{S_x} \cdot \sqrt{N}$ $g_{kr1} = t_{q/2, N-1}$ $g_{kr2} = t_{1-q/2, N-1}$	
2	$H_0 : m_x = m_0$ $H_1 : m_x < m_0$	$t = \frac{\bar{x} - m_0}{S_x} \cdot \sqrt{N}$ $g_{kr} = t_{q, N-1}$	
3	$H_0 : m_x = m_0$ $H_1 : m_x > m_0$	$t = \frac{\bar{x} - m_0}{S_x} \cdot \sqrt{N}$ $g_{kr} = t_{1-q, N-1}$	
4	$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = (N-1) \cdot \frac{S_x^2}{\sigma_0^2}$ $g_{kr1} = \chi_{q/2, N-1}^2$ $g_{kr2} = \chi_{1-q/2, N-1}^2$	
5	$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma_x^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = (N-1) \cdot \frac{S_x^2}{\sigma_0^2}$ $g_{kr} = \chi_{q/2, N-1}^2$	
6	$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma_x^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 = (N-1) \cdot \frac{S_x^2}{\sigma_0^2}$ $g_{kr} = \chi_{1-q/2, N-1}^2$	
7	$H_0 : \sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2$ $H_1 : \sigma_{x1}^2 \neq \sigma_{x2}^2$	$F = \frac{\max(S_{x1}^2, S_{x2}^2)}{\min(S_{x1}^2, S_{x2}^2)}$ $g_{kr1} = F_{q/2, N1-1, N2-1}$ $g_{kr2} = F_{1-q/2, N1-1, N2-1}$	
8	$H_0 : \sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2$ $H_1 : \sigma_{x1}^2 < \sigma_{x2}^2$	$F = \frac{S_{x1}^2}{S_{x2}^2}$ $g_{kr} = F_{q/2, N1-1, N2-1}$	

9	$H_0 : \sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2$ $H_1 : \sigma_{x1}^2 > \sigma_{x2}^2$	$F = \frac{S_{x2}^2}{S_{x1}^2}$ $g_{kr} = F_{1-q/2, N1-1, N2-1}$	
---	---	--	---

Критические области показаны на рисунках в таблице 2 в виде заштрихованных областей. В третьем столбце таблицы приведены значения границ критических областей, выраженные с помощью квантилей соответствующих распределений. Гипотезы 1, 4, 7 соответствуют двухсторонней оценке параметра, а остальные гипотезы – односторонней.

39. КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ СОГЛАСИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Типичной задачей, возникающей при обработке результатов моделирования, является задача поиска закона распределения случайной величины, множество значений которой получено в результате проведенного моделирования. Существует два вида методов решения этой задачи: параметрические критерии и непараметрические критерии. Параметрические критерии основаны на сравнении гипотетической плотности вероятности с эмпирическими данными. Непараметрические методы реализуются путем сопоставления гипотетической и эмпирической функций распределения.

39.1. КРИТЕРИЙ ПИРСОНА

Критерий согласия – критерий проверки гипотезы, состоящей в том, что генеральная совокупность имеет распределение заданного типа. Критерий позволяет контролировать согласованность гипотетических вероятностей с их опытными относительными частотами (рис. 39.1).

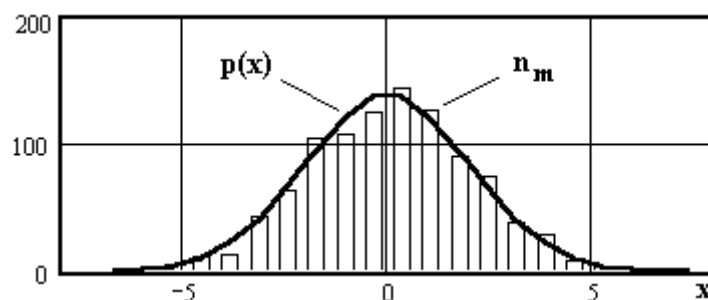


Рис.39.1 Гипотетическая функция распределения и гистограмма

Статистика критерия Пирсона имеет χ^2 – распределение и реализуется в соответствии со следующим алгоритмом:

- По выборке строят гистограмму n_m , где m – номер интервала. Если в каком-либо интервале число наблюдений меньше пяти, то его объединяют с соседним интервалом.
- Задается вид гипотетической функции распределения и по вектору выборки (или по гистограмме) вычисляют точечные оценки r параметров распределения (например, математическое ожидание и дисперсию, тогда $r=2$).
- Определяется вектор p_m теоретической вероятности попадания случайной величины в каждый интервал гистограммы.
$$p_m = \frac{1}{x_{m+1} - x_m} \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x) dx$$
- Вычисляется значение статистики по вектору выборки:
$$g = \sum_{m=1}^K \frac{(n_m - N \cdot p_m)^2}{N \cdot p_m},$$
 где K – число интервалов группирования, p_m – теоретическая вероятность попадания в интервал гистограммы, n_m – опытная частота попадания в интервал гистограммы.
- Вычисляется критическое значение статистики: $g_{кр} = \chi_{q,v}^2$, где $v = K - r - 1$, r – число параметров распределения (проверяемых), q – заданный уровень значимости.
- Гипотеза считается подтвержденной, если $g \leq g_{кр}$.

39.2. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

Критерии, основанные на сравнении теоретической и эмпирической функций распределения вероятностей, являются более эффективной статистикой для проверки гипотез о виде закона распределения вероятностей случайной величины. Одним из основных критериев согласия подобного вида является критерий Колмогорова-Смирнова [17]. Эмпирическая функция распределения случайной величины x_i , соответствующая порядковой статистике $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, имеет вид:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1; \\ i/n, & x_i < x < x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ 1, & x \geq x_n. \end{cases}$$

Пример сопоставления эмпирической и гипотетической функций распределения приведен на рисунке 39.2.

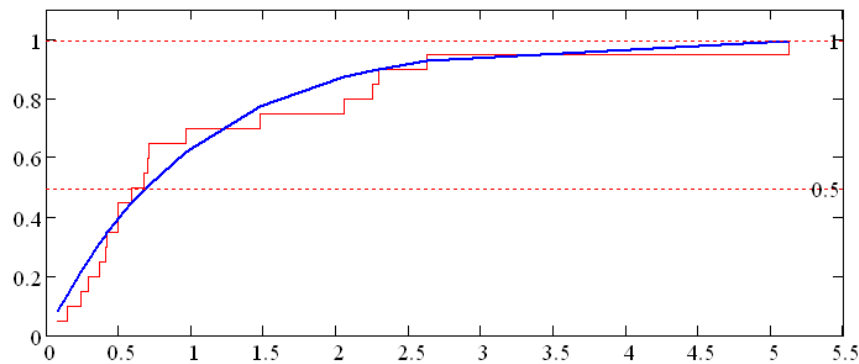


Рис.39.2. Эмпирическая и гипотетическая функции распределения

Проверка гипотезы основана на рассмотрении величины расстояния между эмпирической $F_n(x)$ и теоретической $\Phi(x)$ функциями распределения случайной величины:

$$D_n = \sup_{|x| < \infty} |F_n(x) - \Phi(x)|;$$

$$D_n^+ = \sup_{|x| < \infty} (F_n(x) - \Phi(x)); \quad D_n^- = - \inf_{|x| < \infty} (F_n(x) - \Phi(x)),$$

где $\sup$, $\inf$ – точные верхняя и нижняя границы соответствующих разностей.

В качестве функции статистики используется следующая величина:

$$\sqrt{n} \cdot D_n.$$

Предельное распределение указанной статистики определяется по следующей формуле:

$$P(\sqrt{n} \cdot D_n < z) \rightarrow K(z),$$

где $K(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \cdot \exp(-2 \cdot m^2 \cdot z^2)$ – распределение Колмогорова.

Гипотеза о согласии эмпирического и гипотетического распределений считается подтвержденной, если выполняется неравенство:

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{z_{\alpha}}{\sqrt{n}},$$

где α – уровень значимости критерия, z_{α} – квантиль распределения Колмогорова, то есть решение уравнения: $K(z) = 1 - \alpha$. Известно [5] выражение для приближенного вычисления для критического значения статистики $D_n(\alpha)$:

$$D_n(\alpha) = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{2}{1-\alpha} \right) \right)^{-1}.$$

Гипотеза считается подтвержденной, если $D_n \leq D_n(\alpha)$. Критерий Колмогорова-Смирнова может быть распространен и на цензурированные выборки случайных величин, но вычисление квантилей осуществляется по более сложным формулам.

Известно несколько критериев проверки гипотезы о согласии эмпирического и гипотетического распределений [5]. Разные критерии имеют различную мощность по отношению к различным альтернативам, т. е. предположениям, противостоящим выдвинутой гипотезе. Для того чтобы наилучшим способом противостоять наиболее „опасной“ альтернативе, необходим достаточно широкий арсенал статистических инструментов. Проблема выдвижения альтернатив и оценка их „нежелательности“ не является задачей математической статистики, это проблема иных наук, занимающих исследователя.

40. РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Цель регрессионного анализа: планирование экспериментов для получения линейной или неполной степенной математической модели статистики сложного объекта. Вариация входных воздействий на систему и регистрация соответствующих состояний системы позволяет получить систему уравнений для определения параметров системы.

Математическая модель системы задается в виде следующего соотношения:

$$Y(X) = \eta(X, \beta) + \varepsilon,$$

где $Y(X)$ – реакция системы (измеряемый параметр),

$X = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ – вектор факторов (входных переменных),

$\eta(X, \beta)$ – параметрическая функция регрессии,

$\beta = (\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_d)^T$ – вектор параметров, которые необходимо определить по результатам измерений, d – количество параметров, k – количество факторов, ε – случайные воздействия на исследуемую систему.

Модель называется линейной регрессионной моделью, если она линейна относительно компонент вектора параметров. Уравнение линейной регрессионной модели:

$$Y(X) = r(X)^T \cdot \beta + \varepsilon = \sum_{i=1}^d \beta_i \cdot r(X)_i + \varepsilon,$$

где $r(X)$ – вектор регрессоров, длина которого равна длине вектора параметров.

Уравнение регрессии в виде полинома второй степени:

$$\hat{y}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j}^k c_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^k d_i x_i^2,$$

где $\hat{y}$ – расчетное значение отклика системы,

$\{a_0, b_i, c_{i,j}, d_i\}$ – коэффициенты уравнения регрессии, которые требуется определить.

Форма задания уравнения регрессии в общем случае произвольна. Полиномиальная форма соответствует разложению в ряд Тейлора уравнения регрессии в окрестности точки a_0 .

Уравнение регрессии второго порядка для трех факторов:

$$y(x_1, x_2, x_3) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_1 x_3 + a_6 x_2 x_3 + a_7 x_1^2 + a_8 x_2^2 + a_9 x_3^2.$$

Вектор регрессоров для этого уравнения имеет вид:

$$r(X) = (1, x_1, x_2, x_3, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2)^T.$$

Первым элементом вектора регрессоров является 1, так как отсутствие этого элемента влечет за собой равенство $y(X=0)=0$ для любых значений параметров β , что недопустимо в общем случае.

Условия задачи множественного регрессионного анализа:

1. Результаты наблюдений $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ должны представлять собой независимые, нормально распределенные случайные величины.
2. Выборочные оценки дисперсии $S_g^2\{y\}$ однородны.
3. Погрешность измерения факторов $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$ пренебрежимо мала относительно их диапазона изменения.

Этапы реализации регрессионного анализа:

1. Планирование экспериментов.
2. Проведение экспериментов на исследуемой системе.
3. Получение математической модели системы.
4. Проверка воспроизводимости экспериментов.
5. Проверка адекватности математического описания.

41. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Цель планирования экспериментов: минимизация общего объема испытаний при соблюдении требований к достоверности и точности получаемых результатов. План экспериментов представляет собой

множество точек факторного пространства (множества допустимых значений факторов), заданных по определенному правилу, соответствующему цели исследований. Центр плана – точка факторного пространства, соответствующая средним значениям факторов. Обычно план соответствует равномерному распределению выбранных точек в факторном пространстве.

Компоненты вектора управляющих факторов нормируют так, чтобы диапазон их варьирования соответствовал интервалу $[-1; +1]$. Формула такого нормирования:
$$Z_i = \frac{X_i - \min(X_i)}{\max(X_i) - \min(X_i)} \cdot 2 - 1.$$

План полного факторного эксперимента (ПФЭ) представляет собой множество всех возможных сочетаний уровней факторов. Если уровней два, то план состоит из 2^k экспериментов.

Центральный композиционный план представляет собой комбинацию ПФЭ для двух уровней факторов (± 1), дополненный центральной точкой факторного пространства и вариантами изменения факторов по одному на уровнях $(\pm \alpha)$, где определяется из уравнения $4 \cdot \alpha^4 + 4 \cdot 2^k \cdot \alpha^2 - 2^k \cdot (2k + 1) = 0$.

Аналитической формой плана экспериментов служит матрица планирования, которая образуется из транспонированных векторов регрессоров, вычисленных для различных запланированных N точек факторного пространства:

$$F = (r(X_1)^T, r(X_2)^T, \dots, r(X_N)^T)^T = \begin{pmatrix} r(X_1)_1 & \dots & r(X_1)_d \\ \dots & \dots & \dots \\ r(X_N)_1 & \dots & r(X_N)_d \end{pmatrix},$$

где $r(X_j)_i$ – i -тая компонента вектора регрессоров в j -той точке факторного пространства, $X_1, X_2, \dots, X_N$ – множество точек факторного пространства, образующее выбранный план экспериментов, N – количество экспериментов.

Матрица центрального композиционного плана второго порядка для трех факторов (строки соответствуют различным точкам факторного пространства, столбцы – искомым параметрам модели):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Независимыми являются 1-4 столбика, а остальные сформированы как линейные комбинации первых четырех столбиков. На рисунке 41.1 приведено множество точек плана ПФЭ в виде вершин куба, а 6 точек композиционной части плана соответствуют пересечению осей координат со сферой, описанной вокруг этого куба.

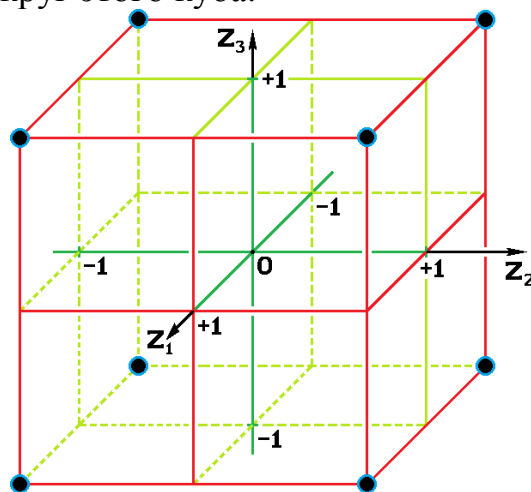


Рис.41.1. Точки плана ПФЭ в факторном пространстве

42. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Эксперименты проводятся в соответствии с планом, результаты экспериментов образуют вектор результатов измерений. Порядок реализации

сочетаний факторов назначают случайным, что называется рандомизацией плана экспериментов.

Для повышения достоверности исследований могут проводиться параллельные опыты для каждого запланированного сочетания факторов. Обычно, число параллельных опытов для всех сочетаний факторов назначается одинаковым.

Введем следующие обозначения:

m – количество параллельных опытов;

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ – вектор результатов наблюдений отклика системы в различных запланированных точках факторного пространства при отсутствии параллельных опытов ($m=1$);

$YM = \begin{pmatrix} y_{1,1} & \dots & y_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N,1} & \dots & y_{N,m} \end{pmatrix}$ – матрица наблюдений отклика системы в различных

запланированных точках факторного пространства при проведении параллельных опытов ($m>1$).

В процессе экспериментов результаты измерений (моделирования) регистрируются в виде векторов Y или матриц YM . Пример результатов измерений приведен на рисунке 42.1. Сплошная линия соединяет средние значения параллельных опытов для каждого сочетания факторов.

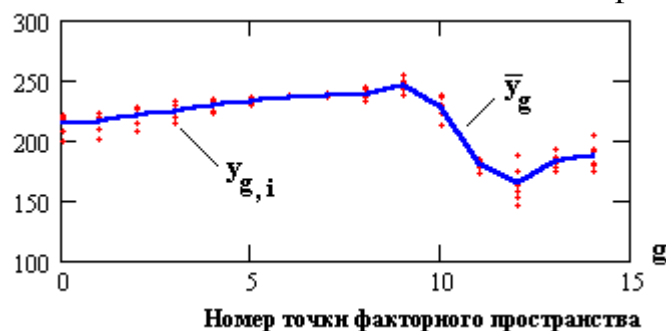


Рис.42.1. Результаты экспериментов с параллельными опытами

43. ПРОВЕРКА ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА. КРИТЕРИЙ КОХРЕНА

Проверка воспроизводимости эксперимента состоит в проверке гипотезы о равенстве генеральных дисперсий:

$\sigma^2(YM^{T<1>}) = \sigma^2(YM^{T<2>}) = \dots = \sigma^2(YM^{T<N>})$ параллельных опытов при экспериментах в соответствующих точках факторного пространства $X_1, X_2, \dots, X_N$. Обозначение $YM^{<i>}$ используется для выделения i -того столбика из матрицы YM , а обозначение $YM^{T<i>}$ – соответствующей строки.

Усреднение результатов m параллельных (для одной точки факторного пространства) опытов и вычисление дисперсий проводится по следующим формулам:

$$\bar{y}_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{g,i}, \quad s_g^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_{g,i} - \bar{y}_g)^2.$$

Дисперсия воспроизводимости определяется следующим образом:

$$s_{vos}^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{g=1}^N s_g^2.$$

Проверка воспроизводимости эксперимента осуществляется с помощью критерия Кохрена (Кокрена), который использует следующее определение статистики:

$$G = \frac{\max\{S_g^2\}}{N \cdot s_{vos}^2}.$$

Критическое значение статистики вычисляется с использованием квантилей F-распределения по следующей формуле:

$$G_{kr} = G(q, m-1, (m-1)(N-1)) = \frac{F_{1-q/N, m-1, (N-1)(m-1)}}{(k-1) + F_{1-q/N, m-1, (N-1)(m-1)}},$$

где q – заданный уровень значимости, m – количество параллельных опытов, N – количество экспериментов с разными сочетаниями факторов.

Гипотеза о воспроизводимости эксперимента считается подтвержденной, если:

$$G \leq G_{kr}.$$

Если гипотеза не подтверждена, то рекомендуется:

- либо увеличить число параллельных опытов,
- либо использовать модификацию метода наименьших квадратов, пригодную при невыполнении предположения о воспроизводимости эксперимента.

44. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

Метод наименьших квадратов позволяет определить коэффициенты регрессии по результатам отклика системы. Необходимым условием решения задачи является ее переопределенность: длина вектора независимых наблюдений отклика системы $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ должна быть не меньше длины вектора коэффициентов уравнения регрессии $\beta = (\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_d)^T$, то есть $N \geq d$.

Уравнение регрессии имеет следующий вид:

$$F \cdot \beta = Y.$$

Коэффициенты уравнения регрессии можно вычислить с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Оценки МНК не содержат систематических ошибок (несмещенность оценок). Если случайные ошибки наблюдений независимы и подчиняются нормальному закону, то оценки МНК получаются с наименьшей дисперсией, то есть являются эффективными. Применение метода наименьших квадратов для вычисления коэффициентов регрессии позволяет получить следующую оценку для вектора коэффициентов регрессии:

$$\beta = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y.$$

Если для определения коэффициентов используются параллельные опыты, то формула приобретает вид:

$$\beta = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Mr\{YM\},$$

где $Mr\{.\}$ – оператор вычисления средних значений по строкам матрицы YM .

Найденные значения коэффициентов регрессии позволяют вычислить значения отклика системы, которые принято обозначать следующим образом:

$$\hat{Y} = F \cdot \beta.$$

Пример вычисления значений функции регрессии приведен на рисунке 44.1.

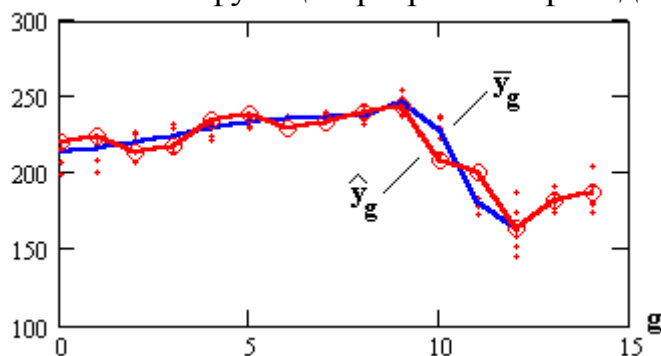


Рис.44.1. Значения функции регрессии и экспериментальные данные

45. ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ. КРИТЕРИЙ ФИШЕРА

Проверка адекватности математического описания по опытным данным представляет собой оценку отклонения предсказанной по полученному уравнению регрессии величины отклика системы $\hat{Y}$ от результатов наблюдений Y в одних и тех же точках факторного пространства. Рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии, оценивающего истинную функцию отклика, можно охарактеризовать с помощью дисперсии адекватности [7,16]:

$$s_{ad}^2 = \frac{m}{N \cdot m - d} \sum_{g=1}^N (y_g - \bar{y}_g)^2,$$

где $\bar{y}_g$ – значение отклика системы, усредненное по множеству параллельных опытов, на g -тое сочетание управляющих факторов; y_g – значение отклика, вычисленное по полученной функции регрессии, m – число параллельных опытов, d – количество коэффициентов в регрессионной модели.

Функция статистики для оценки адекватности определяется как отношение оценки дисперсии адекватности к оценке дисперсии воспроизводимости:

$$F_{ad} = \frac{s_{ad}^2}{s_{vos}^2}$$

Критическое значение статистики определяется с помощью функции квантили распределения Фишера и следующего соотношения:

$$F_{ad,kr} = F_{q_{ad}, \nu_1, \nu_2} = qF(q_{ad}, \nu_1, \nu_2),$$

где $\nu_1 = N - d > 0$, $\nu_2 = N \cdot (m - 1)$.

Гипотеза об адекватности функции регрессии экспериментальным данным считается подтвержденной, если выполняется неравенство критерия Фишера:

$$F_{ad} \leq F_{ad,kr}.$$

Если гипотеза об адекватности отвергнута, то рекомендуется:

- перейти к более сложной форме математического описания или
- уменьшить интервал варьирования факторов до 10%-60% от первоначального.

Однако уменьшение интервала варьирования приводит к снижению отношения сигнал/шум, что влечет за собой увеличение числа параллельных опытов.

46. D-ОПТИМАЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ

План P_D , минимизирующий определитель ковариационной матрицы оценок коэффициентов регрессии на множестве всех возможных планов P в области M_P , называется D-оптимальным:

$$det(P_D) = \min_{P \in M_P} det(F^T F)^{-1}.$$

D-оптимальный план минимизирует объем доверительного эллипсоида на множестве всех допустимых планов M_P .

Алгоритм построения D-оптимального плана не является композиционным, т.е. для каждого числа экспериментов N необходимо строить новую матрицу плана F, так как не удастся использовать ранее вычисленные матрицы для других объемов экспериментов. Вычисление точного D-оптимального плана имеет сложный алгоритм и требует использования численных методов. Приближенные D-оптимальные планы строят с помощью более простого алгоритма на основе последовательных процедур. Такой алгоритм имеет следующие этапы:

- Выбирают невырожденный начальный план F_0 , соответствующий N экспериментам, то есть множеству $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ точек факторного пространства, образующих план экспериментов.

- Координаты новой точки плана X_{N+1} находят из соотношения:

$$X_{N+1} = \arg \max_{X \in M_X} r(X)^T (F^T F)^{-1} r(X), \text{ где } M_X - \text{множество}$$

допустимых значений точек факторного пространства, $r(X)$ – вектор регрессоров.

- Матрицу плана F дополняют новой строкой, соответствующей новой точке плана X_{N+1} : $F_{i+1} = \begin{pmatrix} F_i \\ r(X_{N+1})^T \end{pmatrix}$.

- Алгоритм построения плана завершают, если выполняется условие: $\delta_D \leq \varepsilon_D$, в противном случае продолжают наращивание матрицы плана в соответствии с двумя предыдущими этапами. ε_D – заданная величина допустимого отличия создаваемого плана от точного,

$$\delta_D = \frac{\max_{X \in M_X} r(X)^T (F^T F)^{-1} r(X) - (d+1)}{d+1},$$

где d – число оцениваемых коэффициентов регрессии.

Правило останова в приведенном алгоритме можно определить на основе анализа точности получаемого результата, т.е. по заданным величинам доверительной вероятности p_D и дисперсии коэффициентов регрессии – ρ^2 .

D – оптимальный план является реализацией одного из возможных критериев оптимальности, кроме него находят применение следующие виды планов:

- A – оптимальный план, минимизирующий среднюю дисперсию оценок коэффициентов.
- E – оптимальный план, минимизирующий максимальное собственное число ковариационной матрицы оценок.

- G – оптимальный план, обеспечивающий наименьшую величину максимальной дисперсии.
- MV – оптимальный план, минимизирующий максимальный диагональный элемент ковариационной матрицы оценок.

47. МЕТОД СЛУЧАЙНОГО БАЛАНСА

При описании многофакторного объекта основным этапом является получение математической модели, адекватно описывающей статический объект в изучаемом диапазоне изменения его входных переменных (факторов). При этом следует стремиться к тому, чтобы математическое описание было возможно более простым при максимуме подобия. Такое сочетание особенно необходимо при разработке способов и систем оптимального управления, когда важно достичь или поддерживать глобальный, а не локальный экстремум. Решение этой задачи в реальных условиях обычно связано с серьезными трудностями, вызванными весьма большим количеством переменных, в той или иной степени влияющих на объект. Привлечение всего множества переменных к составлению математического описания может потребовать большого объема экспериментальной и вычислительной работы, что зачастую невыполнимо в силу технологических, экономических и прочих ограничений. Возникает необходимость предварительного отсеивания несущественных переменных и выделения тех входных воздействий, которые оказывают наиболее заметное влияние на целевую функцию.

Если число всех возможных факторов, влияющих на объект, не превышает 6-7, то для предварительного изучения объекта можно применить методы дробного или полного факторного эксперимента. Однако при большом числе рассматриваемых факторов эти методы оказываются слишком громоздкими и трудоемкими для постановки отсеивающих опытов.

Метод случайного баланса (МСБ) использует перенасыщенные планы, при которых выполняется условие: $u+1 > N$, где u – общее количество исследуемых переменных, N – число строк матрицы планирования, соответствующее числу точек факторного пространства, в которых ставятся опыты.

Важнейшей теоретической предпосылкой МСБ является априорное знание того, что из всей совокупности рассматриваемых переменных только небольшое их число являются действительно существенными, остальные же могут быть отнесены к шумовому полю. *Вклады существенных факторов должны намного (минимум на порядок) превышать погрешность измерения, определяемую шумовым полем.* Кроме того, предполагается, что:

- ♦ объект управляем;

- ◆ между отдельными составляющими дисперсии функции отклика и входными переменными может быть установлено соответствие;
- ◆ опыты воспроизводимы;
- ◆ отдельные измерения случайны и независимы друг от друга.

При использовании МСБ математическую модель сложного объекта расщепляют на части:

$$\bar{y} = \bar{a}_0 + \sum_{i=1}^h \bar{a}_i z_i + \sum_{r=h+1}^n \bar{a}_r z_r + \varepsilon,$$

где: h – число значимых переменных; $(h-u)$ – число незначимых переменных; ε – случайная составляющая (помехи). Под z_i и z_r понимаются нормированные линейные факторы и парные взаимодействия.

Построение матрицы планирования для проведения отсеивающих опытов выполняют на основе предпосылки, что исследуемые факторы должны быть смешаны случайным образом. Все линейные факторы z_i ($i=1,2,...,n$) разбивают на группы. При этом стремятся заведомо взаимодействующие факторы включить в одну группу. Если же нет априорных сведений о физике процесса, то разбивку факторов по группам можно производить формально, с использованием таблицы случайных чисел. В этом случае предварительно составляют пронумерованный список факторов, а затем с помощью таблицы случайных чисел каждому фактору присваивают свой случайный порядковый номер, после чего факторы случайным образом объединяют в группы. Для каждой группы составляют матрицу планирования. Все групповые матрицы планирования должны иметь одинаковое количество строк, чтобы их можно было состыковать. Число N строк каждой групповой матрицы должно удовлетворять условию $u+1 > N$ и равенству: $N=2^p$, причем p выбирается обычно наименьшим, при котором выполняется неравенство $N > n$, где n – число линейных факторов. План отсеивающего эксперимента образуют путем стыковки групповых матриц планирования случайным смешиванием их строк.

ПРИМЕР. Пусть требуется исследовать 6 факторов $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ и 15 их парных взаимодействий. Необходимо выделить самые существенные из них, используя МСБ.

Разобьем 6 факторов на две группы. Каждой группе из трех факторов соответствует матрица, содержащая 2^3 строк. Пусть G_I и G_{II} – номера строк в этих матрицах.

Таблица 3

Группа I					Группа II			
G_I	z_1	z_2	z_3		G_{II}	z_4	z_5	z_6
1	-1	-1	-1		1	-1	-1	-1
2	+1	-1	-1		2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1		3	-1	+1	-1
4	+1	+1	-1		4	+1	+1	-1
5	-1	-1	+1		5	-1	-1	+1
6	+1	-1	+1		6	+1	-1	+1
7	-1	+1	+1		7	-1	+1	+1
8	+1	+1	+1		8	+1	+1	+1

Проведем рандомизацию строк матриц полного факторного эксперимента с помощью таблицы случайных чисел. Введем нумерацию G строк общей матрицы планирования.

Таблица 4

	Группа I				Группа II			
G	G_I	z_1	z_2	z_3	G_{II}	z_4	z_5	z_6
1	3	-1	+1	-1	4	+1	+1	-1
2	4	+1	+1	-1	7	-1	+1	+1
3	7	-1	+1	+1	8	+1	+1	+1
4	5	-1	-1	+1	5	-1	-1	+1
5	2	+1	-1	-1	3	-1	+1	-1
6	8	+1	+1	+1	6	+1	-1	+1
7	6	+1	-1	+1	2	+1	-1	-1
8	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1

Составим общую матрицу планирования для МСБ путем построчной стыковки матриц планирования обеих групп после рандомизации:

Таблица 5

G	k	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	y_G	y_G^1
1	5	-1	+1	-1	+1	+1	-1	27	39.5
2	4	+1	+1	-1	-1	+1	+1	49	49
3	8	-1	+1	+1	+1	+1	+1	31	43.5
4	6	-1	-1	+1	-1	-1	+1	39	39
5	2	+1	-1	-1	-1	+1	-1	64	64
6	7	+1	+1	+1	+1	-1	+1	40	52.5
7	3	+1	-1	+1	+1	-1	-1	42	54.5
8	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	47	47

В графе k указан случайный порядок проведения опытов по строкам матрицы планирования. Для уменьшения влияния помех и получения оценки дисперсии воспроизводимости могут выполняться параллельные опыты.

48. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММ РАССЕЯНИЯ МСБ

Результаты МСБ анализируются с помощью диаграмм рассеяния либо с помощью выборочных ортогональных матриц планирования.

Пусть исследуется влияние шести факторов в соответствии с планом, приведенном в таблице 5. Результаты эксперимента указаны в этой же таблице. Для каждого фактора проводится своя ордината. Слева и справа от нее отмечаются символами “•” и “◊” (соответственно) те значения отклика y_G , которые соответствуют положению данного фактора на нижнем уровне варьирования $z_{iG} = -1$ и на верхнем $z_{iG} = +1$ (i – номер фактора; G – номер строк матрицы планирования). Затем определяются частные медианы – отдельно для случайного рассеяния точек “•” и точек “◊”.

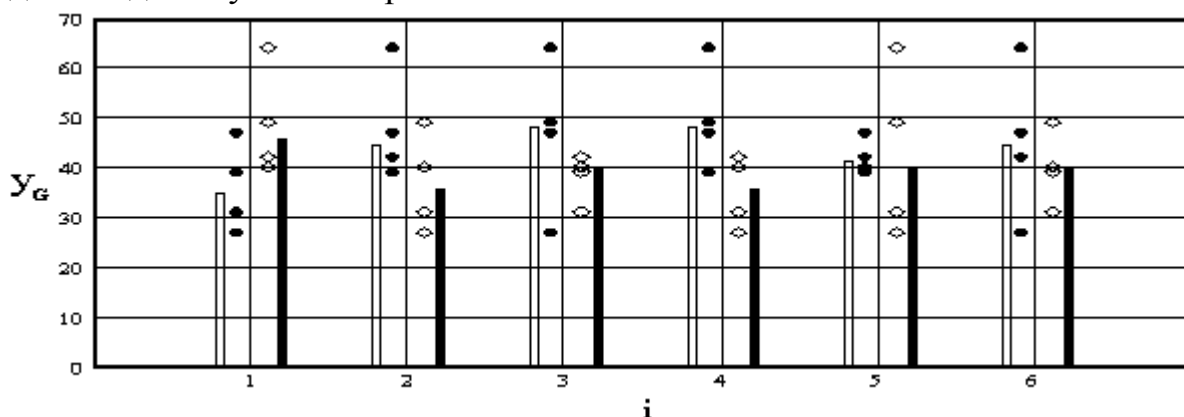


Рис.48.1. Диаграмма рассеяния

Выборочной оценкой медианы $\hat{y} = \hat{Me}\{y\}$ для дискретных данных в математической статистике называется такое значение случайной величины y , по обе стороны которого лежат равные количества точек измерения y , независимо от их конкретных значений. Если количество точек четное ($2N$), то медиана лежит посередине между N -й и $(N+1)$ -й точками, если же – нечетное ($2N+1$), то медианой является $(N+1)$ -я точка. Медианы для $z_i = -1$ и $z_i = +1$ называются “медианой слева” и “медианой справа”. Значения медиан слева и справа для каждого фактора данного примера соответствуют высоте столбцов I и II , показанных на рисунке 48.1. Разность между медианой справа $\hat{Me}\{y\}_{z_i=+1}$ и медианой слева $\hat{Me}\{y\}_{z_i=-1}$ называется вкладом фактора z_i в целевую функцию y и обозначается B_{z_i} :

$$B_{z_i} = \hat{Me}\{y\}_{z_i=+1} - \hat{Me}\{y\}_{z_i=-1}.$$

Из диаграммы, построенной по данным таблицы, находим:

$$B_{z_1} = 45.5 - 35.0 = 10.5$$

$$B_{z_4} = 35.5 - 48.0 = -12.5$$

$$B_{z_2} = 35.5 - 44.5 = -9.0$$

$$B_{z_5} = 40.0 - 41.0 = -1.0$$

$$B_{z_3} = 39.5 - 48.0 = -8.5$$

$$B_{z_6} = 39.5 - 44.5 = -5.0$$

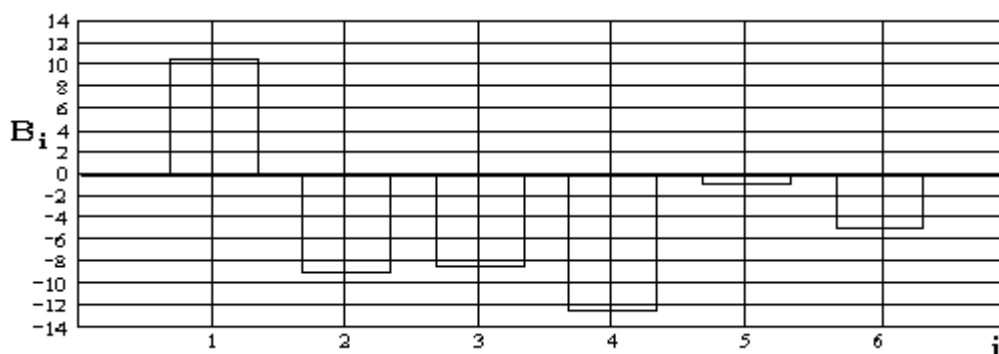


Рис.48.2. Вклады факторов

Визуальное и численное сравнение вкладов дает возможность обнаружить наиболее существенные переменные: вклады для них являются наибольшими. Но в ряде случаев абсолютная величина вкладов не является достаточным критерием наибольшей существенности переменных. Поэтому используют также дополнительные критерии: коррелированность вектор-столбцов, наличие, число и характер выделяющихся точек.

Поясним понятие “выделяющейся точки“, используя диаграмму рассеяния. Для фактора z_2 на уровне $z_2 = -1$ имеется одна точка, расположенная выше, чем самая высокая точка на уровне $z_2 = +1$, а на уровне $z_2 = +1$ имеются две точки, расположенные ниже, чем самая низкая точка на уровне $z_2 = -1$. Таким образом, фактор z_2 имеет три выделяющихся точки. Факторы z_1 и z_4 имеют по пять выделяющихся точек, а факторы z_3, z_5 и z_6 ни одной. Поэтому, несмотря на примерно одинаковые вклады факторов z_2 и z_3 , фактор z_3 признается несущественным по сравнению с z_2 и тем более с z_4 и z_1 . Факторы z_3, z_5 и z_6 не имеют выделяющихся точек потому, что у этих трех факторов размах точек на одном из уровней превышает размах точек на другом уровне, причем на уровне, где размах меньше, нет точек, расположенных ни выше, ни ниже. Необходимо учитывать и характер расположения выделяющихся точек: располагаются ли они согласно знаку вклада или противоположно ему.

49. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

В практической деятельности встречаются объекты исследования, состояние которых определяется входными факторами, не имеющими количественного описания. Такими факторами могут быть переменные,

которые по каким-либо причинам не доступны для измерения, однако их уровни варьирования можно произвольно выбирать и фиксировать во времени. Например, на качество изготавливаемой продукции могут влиять следующие факторы: комплектующие, которые могут поступать от разных поставщиков, производственное оборудование однотипных производственных участков, технология изготовления, конкретные работники различных участков и смен.

Постановка задач дисперсионного анализа предполагает известным:

- Отклик системы Y зависит от k независимых управляемых факторов $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$, не имеющих количественного описания.
- Каждый фактор x_i может варьироваться на u_i уровнях.
- Полный факторный эксперимент состоит из $N = u_1 \cdot u_2 \dots u_k$ серий независимых наблюдений.
- Каждая j -тая серия содержит m_j наблюдений параллельных опытов.

Требуется определить меру влияния каждого фактора на отклик системы Y и выделить наиболее существенные факторы.

Дисперсионный анализ базируется на следующих допущениях:

- Результаты измерений выходного сигнала Y – нормально распределенные случайные величины.
- Дисперсия единичного наблюдения σ_ε^2 обусловлена случайными ошибками ε и постоянна во всех опытах и не зависит от сочетания входных факторов.

В качестве показателя влияния фактора x принимают дисперсию фактора, то есть дисперсию выходной величины, обусловленную вариацией данного входного фактора:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u (y_i - \bar{y})^2, \text{ где } \bar{y} = \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u y_i.$$

Сравнение дисперсий σ_X^2 и σ_ε^2 соответствует сравнению влияния фактора x и фактора случайности ε . Величина σ_ε^2 считается известной, в противном случае ее оценка совпадает с оценкой воспроизводимости. Результаты экспериментов позволяют вычислить оценку выборочной дисперсии:

$$S_0^2 = \frac{1}{u-1} \sum_{i=1}^u (y_i - \bar{y})^2.$$

Если отличие S_0^2 от σ_ε^2 незначительно, то влияние фактора не существенно, иначе – существенно. Дисперсия фактора может быть оценена по следующей формуле:

$$\sigma_X^2 = S_0^2 - \sigma_\varepsilon^2, \text{ так как } S_0^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\varepsilon^2.$$

Дисперсионный анализ основан на разложении оценки общего рассеивания выходного сигнала на составляющие: зависящие от факторов и зависящие от случайных величин.

50. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Исследуется влияние только одного фактора x . Результаты эксперимента сводятся в следующую таблицу. Таблица 6 содержит результаты равночисленных параллельных опытов.

Таблица 6

Уровень варьирования	Номер параллельного опыта				Результаты расчета
	1	2	...	m	
1	$y_{1,1}$	$y_{1,2}$	...	$y_{1,m}$	$\bar{y}_1$
2	$y_{2,1}$	$y_{2,2}$	...	$y_{2,m}$	$\bar{y}_2$
...	...	...	...	...	...
u	$y_{u,1}$	$y_{u,2}$	...	$y_{u,m}$	$\bar{y}_u$

Вычисляются средние значения по множеству параллельных опытов для каждого уровня фактора $\bar{y}_g$ и общее среднее арифметическое по всем уровням:

$$\bar{y}_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{g,i}, \quad \bar{y} = \frac{1}{u} \sum_{g=1}^u \bar{y}_g.$$

Фактор случайности σ_ε^2 проявляется в рассеивании наблюдений серий параллельных опытов на каждом уровне x_i вокруг $\bar{y}_g$ своей серии изменчивости. Входной фактор x вызывает повышенное рассеивание средних арифметических $\bar{y}_g$ относительно общего среднего $\bar{y}$. Оценка фактора случайности проводится по следующей формуле:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{u(m-1)} \sum_{g=1}^u \sum_{i=1}^m (y_{g,i} - \bar{y}_g)^2.$$

Оценка дисперсии фактора x вычисляется по формуле:

$$S_x^2 = \frac{1}{u-1} \sum_{g=1}^u (\bar{y}_g - \bar{y})^2.$$

Проверка гипотезы о существенности фактора x используется следующая функция статистики:

$$F = \frac{S_x^2}{S_\varepsilon^2}.$$

Критическое значение статистики определяется с помощью следующего соотношения:

$$F_{kr} = F_{q, \nu_1, \nu_2} = qF(q, \nu_1, \nu_2),$$

где $\nu_1 = u - 1$, $\nu_2 = u \cdot (m - 1)$.

Гипотеза о существенности фактора считается подтвержденной, если выполняется неравенство:

$$F \leq F_{kr}.$$

Если серии наблюдений состоят из разного числа опытов, то степени свободы распределения Фишера рассчитывают следующим образом:

$$\nu_1 = u - 1, \nu_2 = \sum_{j=1}^u m_j - u.$$

5.1. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Изучается влияние двух одновременно действующих входных факторов x_1 и x_2 . Введем следующие обозначения:

$\{y_{j,g,k}\}$ – множество результатов измерений,

j – номер уровня x_1 , $j = 1 \dots u_1$,

g – номер уровня x_2 , $g = 1 \dots u_2$,

k – номер параллельного уровня, $k = 1 \dots u_2$,

$u_1 \cdot u_2 \cdot m$ – общее число наблюдений.

Результаты экспериментов и расчетов сводятся в следующую таблицу 7.

Таблица 7

j	g				Результаты расчета
	1	2	...	u_2	
1	$y_{1,1,1}$	$y_{1,2,1}$	...	$y_{1,u_2,1}$	$\bar{y}_1$
	$y_{1,1,2}$	$y_{1,2,2}$	...	$y_{1,u_2,2}$	
	...	...	...	...	
	$y_{1,1,m}$	$y_{1,2,m}$	...	$y_{1,u_2,m}$	
...	...	...	...	...	...
u_1	$y_{u_1,1,1}$	$y_{u_1,2,1}$	...	$y_{u_1,u_2,1}$	$\bar{y}_{u_1}$
	$y_{u_1,1,2}$	$y_{u_1,2,m}$	...	$y_{u_1,u_2,2}$	
	...	...	...	...	
	$y_{u_1,1,m}$	$y_{u_1,2,m}$	...	$y_{u_1,u_2,m}$	
	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	...	$\bar{y}_{u_1}$	$\bar{\bar{y}}$

Вычисляют средние значения выходного сигнала по уровням каждого фактора и общее среднее по следующим формулам:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{m \cdot u_2} \sum_{g=1}^{u_1} \sum_{k=1}^m y_{j,g,k}, \quad \bar{y}_g' = \frac{1}{m \cdot u_1} \sum_{j=1}^{u_2} \sum_{k=1}^m y_{j,g,k},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{u_2} \sum_{g=1}^{u_2} \bar{y}_g' = \frac{1}{u_1} \sum_{j=1}^{u_1} \bar{y}_j.$$

На рассеивание средних значений по строкам таблицы оказывает влияние фактор x_1 , так как значения другого фактора усреднены. На рассеивание средних величин по столбцам оказывает влияние фактор x_2 . Общая выборочная дисперсия определяется следующим соотношением:

$$S_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{m(u_1 - 1)(u_2 - 1)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{u_2} \sum_{g=1}^{u_1} (y_{j,g,k} - \bar{y}_{j,g})^2$$

Оценки дисперсий факторов x_1 и x_2 вычисляются по формулам:

$$S_{x_1}^2 = \frac{1}{u_1 - 1} \sum_{j=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{y})^2, \quad S_{x_2}^2 = \frac{1}{u_2 - 1} \sum_{g=1}^{u_2} (\bar{y}_g' - \bar{y})^2,$$

$$S_{x_1, x_2}^2 = \frac{1}{\sqrt{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}} \sum_{j=1}^{u_2} \sum_{g=1}^{u_1} (\bar{y}_j - \bar{y})(\bar{y}_g' - \bar{y}).$$

Существенность влияния двух и более факторов определяется как их относительное влияние, а фактор случайности ε считается малозначительным. Оценивание существенности влияния факторов реализуется с помощью следующих функций статистик:

$$F_{x_1} = \frac{S_{x_1}^2}{S_{x_1, x_2}^2}, \quad F_{x_2} = \frac{S_{x_2}^2}{S_{x_1, x_2}^2}.$$

Критические значения статистик определяются с помощью следующих соотношений:

$$F_{kr1} = F_{q_1, \nu_{x_1}, \nu_{x_2, x_2}} = qF(q_1, \nu_{x_1}, \nu_{x_1 x_2}), \\ F_{kr2} = F_{q_2, \nu_{x_2}, \nu_{x_2, x_2}} = qF(q_2, \nu_{x_2}, \nu_{x_1 x_2}),$$

где $\nu_{x_1} = u_1 - 1$, $\nu_{x_2} = u_2 - 1$, $\nu_{x_1, x_2} = (u_1 - 1) \cdot (u_2 - 1)$.

Гипотезы о существенности факторов считаются подтвержденными, если выполняются неравенства:

$$F_{x_1} > F_{kr1}, \quad F_{x_2} > F_{kr2}.$$

При многофакторном анализе последовательность операций аналогична, но значительно усложняются таблицы наблюдений и расчетные формулы.

Существенность факторов может быть оценена относительно фактора случайности ε или фактора общего рассеивания выходной величины:

$$S_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{u_1 \cdot u_2 \cdot (m-1)} \cdot \sum_j \sum_g \sum_h \left(y_{j,g,h} - \bar{y} \right)^2$$

Существенность влияния двух и более факторов определяется как их сравнение с фактором случайности ε . Оценивание существенности влияния факторов реализуется с помощью следующих функций статистик:

$$F_{X1} = \frac{S_{X1}^2}{S_{\varepsilon}^2}, \quad F_{X2} = \frac{S_{X2}^2}{S_{\varepsilon}^2}.$$

Критические значения статистик определяются с помощью следующих соотношений:

$$F_{kr1,\varepsilon} = F_{q1,\nu_{X1},\nu_{\varepsilon}} = qF(q_1, \nu_{X1}, \nu_{\varepsilon}),$$

$$F_{kr2,\varepsilon} = F_{q2,\nu_{X2},\nu_{\varepsilon}} = qF(q_2, \nu_{X2}, \nu_{\varepsilon}),$$

где $\nu_{X1} = u_1 - 1$, $\nu_{X2} = u_2 - 1$, $\nu_{\varepsilon} = u_1 \cdot u_2 (m - 1)$.

Гипотезы о существенности факторов считаются подтвержденными, если выполняются неравенства:

$$F_{X1} > F_{kr1,\varepsilon}, \quad F_{X2} > F_{kr2,\varepsilon}.$$

52. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Физические явления, которые рассматриваются в инженерных задачах, описываются, как правило, функциями времени, называемыми реализациями процесса. Существуют физические явления, будущее поведение которых с вполне приемлемой точностью можно предсказать на основе физических законов и (или) по данным прошлых наблюдений. Такие явления называют детерминированными. Физические явления и порождаемые ими процессы считаются случайными, если будущее поведение реализации, полученной в результате эксперимента, нельзя предсказать с точностью, лежащей в пределах ошибок измерения. Такая реализация представляет лишь одно событие из множества событий, которые могли бы осуществиться при данном эксперименте. Для того чтобы получить полное представление о процессе, нужно исходить из свойств всего ансамбля реализаций, соответствующих изучаемому процессу. Случайный процесс $\{x(t)\}$, описывающий изучаемое явление, задается ансамблем реализаций $x_i(t)$, $i=1,2,3,\dots$ (рис.49.1.).

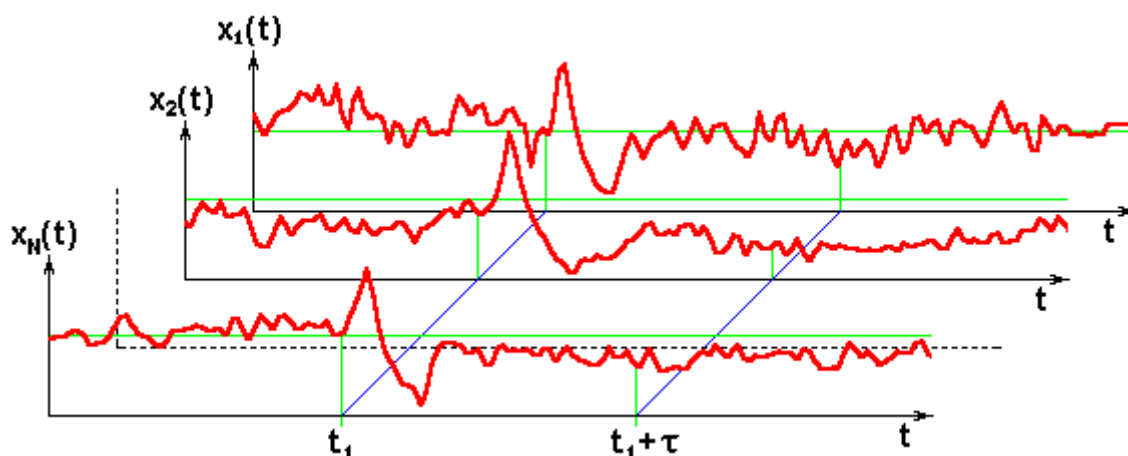


Рис.52.1. Ансамбль реализаций случайного процесса

Средние характеристики процесса $\{x(t)\}$, заданного ансамблем его реализаций, можно определить для любого заданного момента времени t_1 путем усреднения по ансамблю. Среднее значение и среднее значение квадрата процесса в момент t_1 определяются выражениями:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \quad (52.1)$$

$$\psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2(t_1) \quad (52.2)$$

Среднее произведение значений процесса в моменты t_1 и $t_1 + \tau$, называется ковариационной функцией при сдвиге τ :

$$R_{xx}(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \cdot x_i(t_1 + \tau) \quad (52.3)$$

Для описания двух связанных процессов $\{x(t)\}$ и $\{y(t)\}$ вводится взаимная ковариационная функция, определяемая формулой:

$$R_{xy}(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i(t_1) \cdot y_i(t_1 + \tau) \quad (52.4)$$

Подобным образом можно определить сколь угодно много средних характеристик более высокого порядка. Если средние значения не зависят от выбора момента t_1 , то случайный процесс называется стационарным. В общем случае, когда одно или несколько таких средних значений меняются с изменением момента t_1 , процесс называется нестационарным.

Эргодический процесс – стационарный процесс, у которого средние характеристики по ансамблю совпадают со средними характеристиками по времени.

53. СВОЙСТВА КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

По определению ковариационная функция – всегда четная функция:

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau) \quad (53.1)$$

Взаимная ковариационная функция не обладает свойством четности или нечетности, но удовлетворяет соотношению:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (53.2)$$

Значение ковариационной функции в нуле равно среднему квадрату процесса:

$$R_{xx}(0) = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (53.3)$$

Если случайный процесс не содержит иных детерминированных компонент, кроме ненулевого среднего, то с ростом τ ковариационная функция стремится к квадрату среднего:

$$R_{xx}(\infty) = \mu_x^2 \quad (53.4)$$

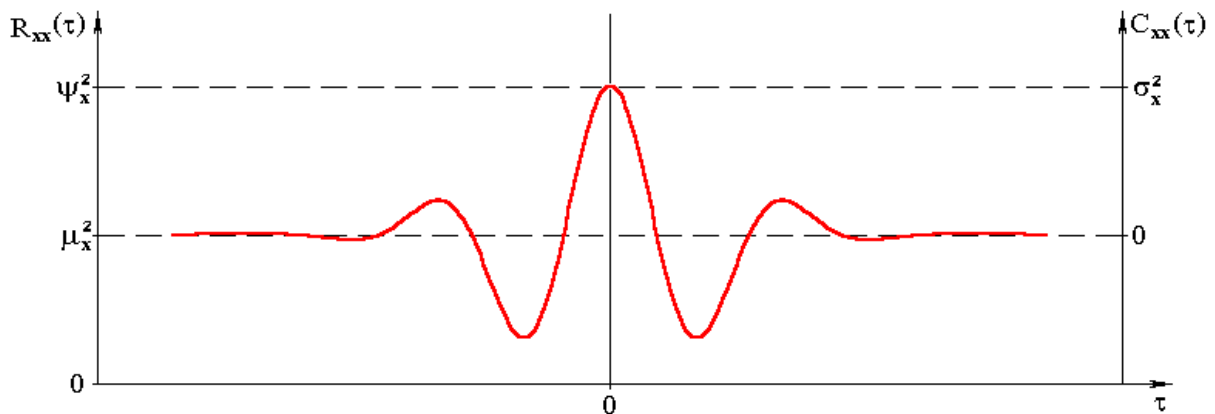


Рис.53.1. Ковариационная и корреляционная функции.

Для взаимной ковариационной функции имеет место неравенство:

$$R_{xy}(\tau) \leq \sqrt{R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0)} \quad (53.5)$$

54. СВОЙСТВА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Спектральная плотность двух реализаций $x(t)$ и $y(t)$ стационарных эргодических процессов $\{x(t)\}$ и $\{y(t)\}$ определяется как преобразование Фурье их ковариационной функции:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (54.1)$$

В частном случае, когда $\{x(t)\} = \{y(t)\}$:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \quad (54.2)$$

Функция $S_{xx}(f)$ называется спектральной плотностью (спектром) $x(t)$.

Спектральные плотности (1) и (3) определены для всех частот, как положительных, так и отрицательных. Поэтому они называются

двусторонними спектрами. Из свойств симметрии ковариационных функций следует, что:

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f), \quad S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f) \quad (54.3)$$

Двусторонние спектральные плотности удобны для аналитического изучения, но на практике удобнее пользоваться односторонними спектрами, определенными только для неотрицательных частот:

$$G_{xy}(f) = \begin{cases} 2 \cdot S_{xy}(f) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (54.4)$$

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} 2 \cdot S_{xx}(f) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau, & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (54.5)$$

Ковариационные функции – четные функции, поэтому спектры задаются только действительной частью преобразования Фурье:

$$G_{xx}(f) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau = 4 \cdot \int_0^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (54.6)$$

Обратное преобразование дает ковариационную функцию:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} df = \int_0^{+\infty} G_{xx}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) df \quad (54.7)$$

Из (6) и (3) при $\tau=0$ следует:

$$R_{xx}(0) = \int_0^{+\infty} G_{xx}(f) df = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (54.8)$$

В общем случае средний квадрат процесса в полосе частот $[f_1; f_2]$ спектра определяется интегралом:

$$\psi_x^2(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_{xx}(f) df \quad (54.9)$$

55. СВОЙСТВА ИДЕАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Система называется идеальной, если она физически осуществима, устойчива, имеет постоянные параметры, линейна. Основные свойства идеальной физической системы описываются ее импульсной переходной функцией, или весовой функцией. Весовая функция представляет реакцию системы на возмущение в виде дельта-функции.

Пусть на вход системы поступает некоторая гладкая функция $x(t)$, а на выходе наблюдается гладкая функция $y(t)$. Импульсная переходная функция системы (весовая функция) определяется уравнением:

$$h(t) = y(t) \quad \text{при} \quad x(t) = \delta(t), \quad (55.1)$$

причем отсчет времени t начинается с момента, когда на вход системы подается δ -функция. Реакция $y(t)$ системы на произвольный входной процесс $x(t)$ определяется интегралом свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \quad (55.2)$$

Реакция системы $y(t)$ есть взвешенная линейная сумма всех прошлых и будущих значений входного процесса $x(t)$.

Физическая система считается системой с постоянными параметрами, если ее импульсная переходная функция не зависит от момента поступления вынуждающей силы на вход системы:

$$h(t, \tau) = h(\tau) \quad \text{при} \quad -\infty < t < \infty \quad (55.3)$$

Физически осуществимая система не может реагировать на возмущение до тех пор, пока оно не поступило на вход системы. Математически это утверждение имеет вид:

$$h(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < 0 \quad (55.4)$$

Поэтому, для физически осуществимых систем нижний предел интегрирования в (55.2) равен нулю.

Физическая система называется устойчивой, если при произвольной допустимой ограниченной функции на ее входе функция на выходе также является ограниченной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (55.5)$$

Линейная система обладает свойствами аддитивности и однородности. Пусть входные процессы x_1 и x_2 генерируют выходные процессы y_1 и y_2 соответственно. Система называется аддитивной, если входной процесс $(x_1 + x_2)$ генерирует на выходе системы процесс $(y_1 + y_2)$. Система называется однородной, если входному процессу $s \cdot x_1$ соответствует выходной процесс $s \cdot y_1$ (здесь s – произвольная постоянная).

В случае линейной системы весовая функция $h(\tau)$ не зависит от процесса $x(t)$:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \quad \text{при всех } x(t) \quad (55.6)$$

Случайный входной процесс с гауссовским распределением вероятностей порождает на выходе линейной системы процесс также с гауссовским распределением вероятностей.

В практических ситуациях линейность относится к числу наиболее редко выполняемых свойств. В частности, значение входного случайного процесса может измениться столь резко, что отклик системы не будет пропорционален значению входного процесса, как это требуется из условия однородности. Если изучаемая система не является сильно нелинейной, то рассматриваемые в дальнейшем в этом учебном пособии методы

корреляционного и спектрального анализа приведут в большинстве случаев к вполне разумным результатам, описывающим наилучшие линейные приближения для исследуемой системы.

56. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

Идентификация частотной характеристики системы – это оценка частотной характеристики системы по наблюдениям входных и выходных процессов. Задача должна учитывать возможность наличия шумов. Простейшая структура системы представлена на следующем рисунке:

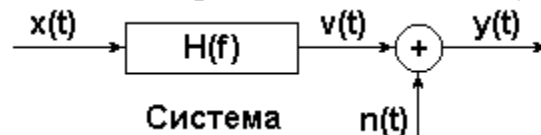


Рис.56.1. Система с одним входом и одним выходом; шум воздействует на выход системы

Такая ситуация характерна для многих физических задач, в которых наблюдения входного процесса $x(t)$ принципиально свободны от шума, а наблюдение выходного процесса $y(t)$ равно сумме идеальной линейной реакции $v(t)$ на входной процесс и случайного возмущения $n(t)$. Оценка частотной характеристики $H(f)$ по наблюдениям только $x(t)$ и $y(t)$ определяется отношением:

$$H(f) = G_{xy}(f) / G_{xx}(f) \quad (56.1)$$

Когерентный спектр выходного процесса $y(t)$, линейно вызванный процессом $x(t)$:

$$G_{vv}(f) = \gamma_{xy}^2(f) \cdot G_{yy}(f) \quad (56.2)$$

Остаточный спектр выходного процесса $y(t)$, остающийся после выделения из него реакции на $x(t)$ имеет вид:

$$G_{nn}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] \cdot G_{yy}(f) \quad (56.3)$$

Функция когерентности определяется из (5.2):

$$\gamma_{xy}^2(f) = G_{vv}(f) / G_{yy}(f) \quad (56.4)$$

Поскольку $G_{vv}(f) \leq G_{yy}(f)$ для всех f , то функция когерентности удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1 \quad (56.5)$$

Оптимальность частотной характеристики трактуется как достижение минимального уровня шума в выходном сигнале. Использование финитного преобразования Фурье для представленной системы дает следующее соотношение:

$$Y(f, T) = H(f) \cdot X(f, T) + N(f, T) \quad (56.6)$$

где T – длина реализации, $X(f,T)$ – образ входного сигнала, $Y(f,T)$ – образ выходного сигнала, $N(f,T)$ – образ шумового сигнала, $H(f)$ – искомая частотная характеристика, f – частота.

57. ИДЕНТИФИКАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ЗОНДИРУЮЩЕГО СИГНАЛА

В некоторых инженерных приложениях входной процесс $x(t)$ не наблюдается, но есть возможность подать на вход системы известный случайный или переходной зондирующий сигнал $z(t)$, независимый от естественного входа $x(t)$ (рис.57.1).

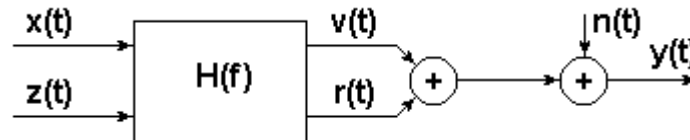


Рис.57.1 Система с зондирующим сигналом и шумом на выходе

На показанном рисунке: $x(t)$ – естественный входной процесс (ненаблюдаемый); $z(t)$ – известный зондирующий сигнал (наблюдаемый); $v(t)$ – линейная реакция на $x(t)$ (ненаблюдаемая); $r(t)$ – линейная реакция на $z(t)$ (ненаблюдаемая); $n(t)$ – неизвестный шум на выходе (ненаблюдаемый); $y(t) = v(t) + r(t) + n(t)$ – суммарный выходной сигнал (наблюдаемый). Предположим, что $z(t)$ не зависит от $x(t)$ и $n(t)$, а $n(t)$ не зависит от $v(t)$ и $r(t)$. Величина $n(t)$ включает все отклонения от линейной модели, в том числе нелинейные эффекты и влияние других некоррелированных входных сигналов.

Применение финитного преобразования Фурье к реализациям достаточно большой длины T приводит к следующим соотношениям:

$$R(f, T) = H(f) \cdot Z(f, T), \quad V(f, T) = H(f) \cdot X(f, T) \quad (57.1)$$

$$Y(f, T) = R(f, T) + V(f, T) + N(f, T) = H(f) \cdot [Z(f, T) + X(f, T)] + N(f, T) \quad (57.2)$$

Согласно сделанному предположению о независимости сигналов:

$$G_{zx}(f) = G_{zn}(f) = G_{nv}(f) = G_{nr}(f) = 0 \quad (57.3)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$G_{yy}(f) = G_{rr}(f) + G_{vv}(f) + G_{nn}(f) \quad (57.4)$$

$$G_{zy}(f) = H(f) \cdot G_{zz}(f) \quad (57.5)$$

Несмещенная оценка частотной характеристики при известном зондирующем сигнале определяется отношением:

$$H(f) = G_{zy}(f) / G_{zz}(f) \quad (57.6)$$

В качестве зондирующего сигнала $z(t)$ часто выбирают ограниченный по частоте белый шум, для которого $G_{zz}(f) = K = \text{const}$. В этом случае: $H(f) = G_{zy}(f) / K$.

Из (28.2) исключим $Z(f, T)$:

$$Y(f, T) = V(f, T) + N(f, T) = H(f) \cdot X(f, T) + N(f, T) \quad (57.7)$$

По найденной частотной характеристике можно оценить спектр неизвестного входного сигнала:

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) + G_{nn}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{nn}(f) \quad (57.8)$$

Если $G_{nn}(f) \ll G_{vv}(f)$, то: $G_{yy}(f) \approx |H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f)$, следовательно:

$$G_{xx}(f) \approx G_{yy}(f) / |H(f)|^2 \quad (57.9)$$

Полученная оценка дает полезную информацию о спектре $G_{xx}(f)$, даже если $x(t)$ не наблюдается. В частности, $x(t)$ может быть собственным шумом на входе, а $y(t)$ – собственным шумом на выходе, вызванным $x(t)$.

58. ВЛИЯНИЕ НА СИСТЕМУ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО ШУМОВ

Рассмотрим более реалистичную модель, учитывающую влияние шума на наблюдения входного и выходного процессов. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – истинные сигналы; $m(t)$ и $n(t)$ – шумы на входе и выходе соответственно.

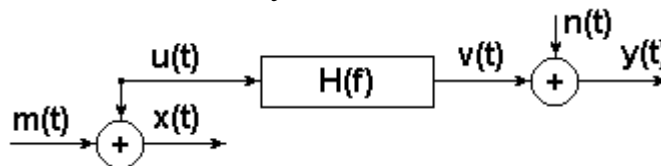


Рис.58.1. Система с одним входом и одним выходом при наличии внешнего шума

Наблюдаемые реализации входных и выходных процессов имеют вид:

$$x(t) = u(t) + m(t), \quad y(t) = v(t) + n(t) \quad (58.1)$$

Результат воздействия шумов на систему зависит от степени их коррелированности, что исследуется в следующих двух разделах.

59. НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ ШУМЫ

Если шумы не коррелированы между собой и с сигналами, то взаимные спектральные плотности равны нулю:

$$G_{um}(f) = G_{un}(f) = G_{mn}(f) = 0 \quad (59.2)$$

Следовательно:

$$G_{vv}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{uu}(f), \quad G_{uv}(f) = H(f) \cdot G_{uu}(f) \quad (59.3)$$

В действительности наблюдаются спектральные плотности $G_{xx}(f), G_{yy}(f), G_{xy}(f)$:

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) + G_{mm}(f) \geq G_{uu}(f) \quad (59.4)$$

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) + G_{nn}(f) \geq G_{vv}(f) \quad (59.5)$$

$$G_{xy}(f) = G_{uv}(f) \quad (59.6)$$

Истинная функция когерентности имеет вид:

$$\gamma_{uv}^2(f) = |G_{uv}(f)|^2 / G_{uu}(f) G_{vv}(f) \quad (59.7)$$

Наблюдаемая функция когерентности определяется выражением:

$$\gamma_{xy}^2(f) = |G_{xy}(f)|^2 / G_{xx}(f) G_{yy}(f) \quad (59.8)$$

Из (56.3-56.6) находим:

$$|G_{xy}(f)|^2 = |G_{uv}(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot G_{uu}^2(f) = G_{uu}(f) \cdot G_{vv}(f) \quad (59.9)$$

Поэтому функцию когерентности можно записать в следующей форме:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{G_{uu}(f) \cdot G_{vv}(f)}{[G_{uu}(f) + G_{mn}(f)] \cdot [G_{vv}(f) + G_{nn}(f)]} \leq 1 \quad (59.10)$$

Неравенство строгое, если $G_{mn}(f) > 0$ или $G_{nn}(f) > 0$, что на практике всегда имеет место.

60. КОРРЕЛИРОВАННЫЕ ВХОДНОЙ И ВЫХОДНОЙ ШУМЫ

Рассмотрим случай, когда $m(t)$ и $n(t)$ коррелированы между собой, но не с сигналами. Тогда функция когерентности удовлетворяет неравенству:

$$0 < \gamma_{mn}^2(f) < 1 \quad (60.1)$$

Определим входное $\alpha(f)$ и выходное $\beta(f)$ отношения шума к сигналу выражениями:

$$\alpha(f) = G_{mn}(f) / G_{uu}(f), \quad \beta(f) = G_{nn}(f) / G_{vv}(f) \quad (60.2)$$

Соотношения (30.4-30.6) можно записать в виде:

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) \cdot [1 + \alpha(f)] \quad (60.3)$$

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) \cdot [1 + \beta(f)] \quad (60.4)$$

$$G_{xy}(f) = G_{uv}(f) + G_{mn}(f) \quad (60.5)$$

Общее выражение (7.8) для наблюдаемой функции когерентности принимает вид:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{uv}(f) + G_{mn}(f)|^2}{G_{uu}(f) \cdot G_{vv}(f) \cdot [1 + \alpha(f)] \cdot [1 + \beta(f)]} \quad (60.6)$$

Применение этой формулы требует некоторых дополнительных предположений и допущений.

61. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Простейшая идеальная система с отрицательной обратной связью имеет вид показанный на рисунке 61.1. Пусть $H_1(f)$ – линейная частотная характеристика прямого тракта; $H_2(f)$ – линейная частотная характеристика тракта обратной связи, которая на практике обычно не наблюдается; $u(t)$ – выходной процесс тракта обратной связи.

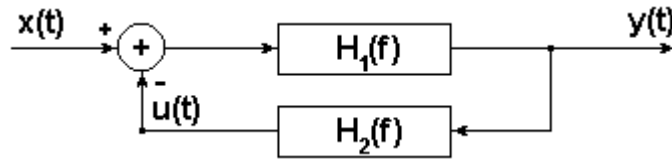


Рис.61.1. Идеальная система с обратной связью

Финитные преобразования Фурье $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ при достаточно большой длине реализации T связаны между собой соотношениями:

$$Y(f, T) = H_1(f) \cdot [X(f, T) - U(f, T)] \quad (61.1)$$

$$U(f, T) = H_2(f) \cdot Y(f, T) \quad (61.2)$$

Следовательно:

$$Y(f, T) = H_1(f) \cdot [X(f, T) - H_2(f) \cdot Y(f, T)] \quad (61.3)$$

Общая частотная характеристика $H(f)$ линейной системы с цепью обратной связи представляется отношением:

$$H(f) = \frac{Y(f, T)}{X(f, T)} = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} \quad (61.4)$$

Величина $H(f)$ может определяться по наблюдениям только $x(t)$ и $y(t)$. При этом произведение $H_1(f)H_2(f)$ не должно равняться -1 на всех частотах. Экспериментальное определение $H_1(f)$ и $H_2(f)$ невозможно, если величина $u(t)$ не наблюдается.

Предположим, что неизвестный внешний шум $n(t)$ попадает в систему с обратной связью (рис. 61.2).

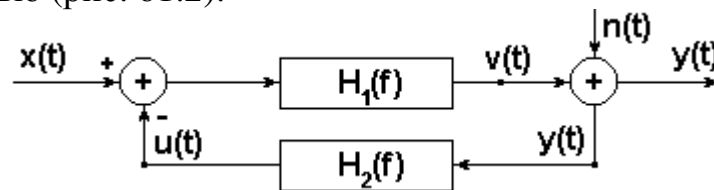


Рис. 61.2. Система с обратной связью при наличии шума на выходе

Определим в этой схеме $v(t)$ как выходной процесс прямого тракта с частотной характеристикой $H_1(f)$, который в этом случае не может быть измерен. Вместо него наблюдается $y(t) = v(t) + n(t)$. Причем $n(t)$ не коррелирован с $v(t)$. Предположим, что $u(t)$ – выходной процесс тракта обратной связи с частотной характеристикой $H_2(f)$ непосредственно не может быть измерен. Применив к реализациям достаточно большой длины T финитное преобразование Фурье, получим следующие соотношения:

$$Y(f, T) = V(f, T) + N(f, T) \quad (61.5)$$

$$V(f, T) = H_1(f) \cdot [X(f, T) - H_2(f) \cdot Y(f, T)] \quad (61.6)$$

Подстановка (8.6) в (8.5) приводит к уравнению:

$$Y(f, T) = H_1(f) \cdot [X(f, T) - H_2(f) \cdot Y(f, T)] + N(f, T) \quad (61.7)$$

Решение (8.7) относительно $Y(f, T)$ можно представить в виде:

$$Y(f, T) = \frac{H_1(f) \cdot X(f, T)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} + \frac{N(f, T)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} \quad (61.8)$$

Реакция данной системы с обратной связью имеет две составляющие – сигнал и шум. Если $H_2(f)=0$, то обратная связь отсутствует, и реакция равна:

$$Y(f, T) = H_1(f) \cdot X(f, T) + N(f, T) \quad (61.9)$$

Формулы (8) и (9) дают одно и то же отношение сигнала к шуму на выходе системы:

$$\frac{\text{Сигнал}}{\text{Шум}} = \frac{H_1(f) \cdot X(f, T)}{N(f, T)} \quad (61.10)$$

Отношение сигнал/шум не зависит от $H_2(f)$ и при фиксированном $H_2(f)$ растет с увеличением $H_1(f)$, что представляет собой полезное свойство систем с обратной связью.

Выражение (8) можно записать в виде:

$$Y(f, T) = H(f) \cdot X(f, T) + M(f, T), \quad (61.11)$$

где:

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)}; \quad M(f, T) = \frac{N(f, T)}{1 + H_1(f) \cdot H_2(f)} \quad (61.12)$$

В стационарном случае $H(f)$ и $G_{mm}(f)$ определяются по формулам для систем с одним входом и одним выходом:

$$H(f) = G_{xy}(f) / G_{xx}(f), \quad (61.13)$$

$$G_{mm}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] \cdot G_{yy}(f) \quad (61.14)$$

Суммарный выходной спектр равен сумме:

$$G_{yy}(f) = G_{rr}(f) + G_{mm}(f), \quad (61.15)$$

где:

$$G_{rr}(f) = \frac{|H_1(f)|^2 \cdot G_{xx}(f)}{|1 + H_1(f) \cdot H_2(f)|^2}; \quad G_{mm}(f) = \frac{G_{nn}(f)}{|1 + H_1(f) \cdot H_2(f)|^2} \quad (61.16)$$

Функция когерентности между $x(t)$ и $y(t)$ определяется отношением:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{G_{vy}(f)}{G_{yy}(f)} = \frac{|H_1(f)|^2 \cdot G_{xx}(f)}{|H_1(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{nn}(f)}, \quad (61.17)$$

Таким образом, $\gamma_{xy}^2(f)$ тоже не зависит от $H_2(f)$.

62. СИСТЕМА С ОДНИМ ВХОДОМ И НЕСКОЛЬКИМИ ВЫХОДАМИ

Пусть система состоит из одного стационарного эргодического случайного входного процесса $x(t)$, который вызывает p наблюдаемых выходных процессов $y_i(t)$, $i=1,2,\dots,p$ (рис.62.1).

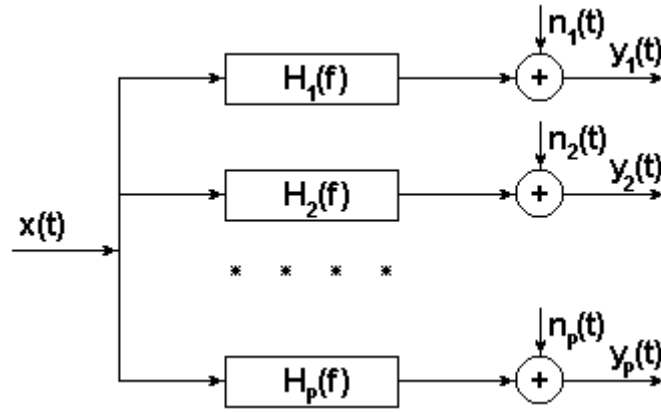


Рис. 62.1. Система с одним входом и несколькими выходами

Согласно (62.6) каждый выходной процесс имеет вид:

$$y_i(t) = \int_0^{\infty} h_i(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (62.1)$$

Применим к (62.1) финитное преобразование Фурье достаточно длинной реализации Т:

$$Y_i(f, T) = H_i(f) \cdot X(f, T) + N_i(f, T), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (62.2)$$

Предполагая стационарность входного процесса, можно записать:

$$\mu_{yi} = E[y_i(t)] = \mu_x \cdot \int_0^{\infty} h_i(\tau) d\tau + \mu_{ni}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (62.3)$$

Поэтому $\mu_y = 0$ для всех $y_i(t)$, если $\mu_x = 0$ и $\mu_{ni} = 0$. Будем считать, что $x(t)$ и $n_i(t)$ некоррелированы, т.е. $E[x(t) \cdot n_i(t)] = 0$ для всех i .

Ковариационная функция любого выходного процесса $y_i(t)$ имеет вид [5]:

$$R_{yiyi}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_i(\alpha) \cdot h_i(\beta) \cdot R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta + R_{nini}(\tau) \quad (62.4)$$

Спектральная плотность выходного процесса определяется выражением:

$$G_{yiyi}(f) = |H_i(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{nini}(f) \quad (62.5)$$

Взаимная ковариационная функция между входным процессом $x(t)$ и любым выходным процессом $y_i(t)$ выражается интегралом:

$$R_{xyi}(\tau) = \int_0^{\infty} h_i(\alpha) \cdot R_{xx}(\tau - \alpha) d\alpha \quad (62.6)$$

Соответствующая взаимная спектральная плотность:

$$G_{xyi}(f) = H_i(f) \cdot G_{xx}(f) \quad (62.7)$$

Выражения (62.1)-(62.9) подобны соответствующим выражениям для системы с одним входом и одним выходом при наличии внешнего шума.

Взаимная ковариационная функция двух произвольных выходных процессов $y_i(t)$ и $y_j(t)$, $i \neq j$:

$$R_{y_{ij}}(\tau) = E[y_i(t) \cdot y_j(t + \tau)] = \int_0^\infty \int_0^\infty h_i(\alpha) \cdot h_j(\beta) \cdot E[x(t - \alpha) \cdot x(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta \quad (62.8)$$

После подстановки математического ожидания (62.8) принимает вид:

$$R_{y_{ij}}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty h_i(\alpha) \cdot h_j(\beta) \cdot R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \quad (62.9)$$

Используя преобразование Фурье, из (62.9) получим взаимную спектральную плотность между двумя выходными процессами:

$$G_{y_{ij}}(f) = H_i^*(f) \cdot H_j(f) \cdot G_{xx}(f) \quad (62.10)$$

На основе (62.5) и (62.10) можно составить функцию когерентности между любыми двумя выходными процессами:

$$\gamma_{y_{ij}}^2(f) = \frac{|G_{y_{ij}}(f)|^2}{G_{y_{ii}}(f) \cdot G_{y_{jj}}(f)} \quad (62.11)$$

В результате подстановки взаимных спектральных плотностей (9.11) примет вид:

$$\gamma_{y_{ij}}^2(f) = \frac{|H_i(f)|^2 \cdot |H_j(f)|^2 \cdot G_{xx}^2(f)}{[|H_i(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{n_{ii}}(f)] \cdot [|H_j(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{n_{jj}}(f)]} \quad (62.12)$$

Рассмотрим частные случаи (12):

1) Пусть $G_{n_{ii}}(f) = G_{n_{jj}}(f) = 0$. Тогда:

$$\gamma_{y_{ij}}^2(f) = 1 \quad (62.13)$$

Следовательно, $y_i(t)$ и $y_j(t)$ исходят из одного источника $x(t)$ неискаженными внешним шумом.

2) Пусть $H_i(f) = H_j(f) = H(f)$ и $G_{vv}(f) = |H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f)$. В этом случае:

$$\gamma_{y_{ij}}^2(f) = \frac{G_{vv}^2(f)}{[G_{vv}(f) + G_{n_{ii}}(f)] \cdot [G_{vv}(f) + G_{n_{jj}}(f)]} \quad (62.14)$$

Функция когерентности всегда будет меньше единицы, если только внешний шум влияет на изменение хотя бы одного выходного процесса.

3) Пусть $H_i(f) = H(f)$ и $H_j(f) = 1$. В этом случае:

$$\gamma_{y_{ij}}^2(f) = \frac{|H(f)|^2 \cdot G_{xx}^2(f)}{[|H(f)|^2 \cdot G_{xx}(f) + G_{n_{ii}}(f)] \cdot [G_{xx}(f) + G_{n_{jj}}(f)]} \quad (62.15)$$

Дальнейший анализ функции когерентности выходных процессов можно провести для конкретных $H(f)$.

63. КОРРЕКТНОСТЬ И НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ

Обработка экспериментальных данных включает решение уравнений, в том числе функциональных. Примером такой задачи может служить задача идентификации параметров исследуемых систем. Решение любой количественной задачи состоит в определении некоторого элемента z

(решения задачи) по исходным данным u и может быть записано в виде: $z=R(u)$. При этом обычно предполагается, что исходные данные u являются элементами некоторого метрического пространства U , а решение z ищется в метрическом пространстве Z , т.е. $z \in Z$.

Задача называется корректно поставленной на паре пространств Z, U , если выполняются следующие условия:

- 1) для любого $u \in U$ решение задачи существует,
- 2) для любого $u \in U$ решение задачи единственно,
- 3) решение задачи z непрерывно зависит от исходных данных u .

Задачи, не удовлетворяющие этим условиям, называются некорректно поставленными. Условия 1) и 2) характеризуют математическую определенность рассматриваемой задачи, а условие 3) – физическую детерминированность задачи.

Математические модели большинства исследуемых объектов и процессов не позволяют получить явное выражение для искомого элемента z , а имеют форму операторного уравнения относительно искомой функции z :

$$Az = u.$$

Оператор A может быть, например, матрицей или интегральным оператором. Примером уравнения, представляющего модель физических явлений и способного становиться некорректным, является интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, s) \cdot z(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d,$$

где $K(x, s)$ – ядро интегрального уравнения.

Корректность решения не зависит от формы представления задачи, но зависит от свойств пространств Z и U , на которых определены соответствующие функции $z(x)$ и $u(x)$.

64. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ

Исследование корректности решений опирается на свойства операторов, образующих уравнения задачи. Спектральные параметры матриц являются основой численного корректного решения задач.

Спектр собственных значений квадратной матрицы A порядка n – это множество корней алгебраического уравнения n -ной степени:

$$F_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix},$$

где E – единичная матрица порядка n .

Данное уравнение называется характеристическим. Матрицы, имеющие одни и те же характеристические уравнения, называются подобными матрицами.

Спектр собственных значений матрицы $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{Tr}(A),$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det(A).$$

Сингулярным числом матрицы A называется число $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$, где λ_i – собственное число матрицы $B = A^* \cdot A$, A^* – сопряженная матрица.

В MathCad спектр собственных значений вычисляется с помощью функции $\text{eigenvals}(A)$, а спектр сингулярных чисел – $\text{svds}(A)$.

65. МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ

Норма – отображение $x \rightarrow \|x\|$ векторного пространства X над полем действительных или комплексных чисел в совокупность действительных чисел, подчиненных условиям:

$$\|x\| \geq 0, \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

При этом число $\|x\|$ называется нормой элемента x .

Унитарное пространство – действительное или комплексное векторное пространство.

Нормированное пространство – пространство, в котором определена норма.

Полное пространство – нормированное векторное пространство, в котором предел любой последовательности сходится к элементу этого пространства.

Гильбертово пространство – полное унитарное пространство.

Матричные нормы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \|x \cdot y\| &\leq \|x\| \cdot \|y\|, & \|x\| &\leq \|x\| \cdot \|E\|, \\ \|E\| &\geq 1, & \|x^k\| &\leq \|x\|^k, & \|x^{-1}\| &\geq \|x\|^{-1}. \end{aligned}$$

В зависимости от особенностей моделируемых объектов могут использоваться различные виды норм, некоторые из которых приведены ниже:

$$\|x\| = \|x\|_e = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{i,j}|^2 \right)^{1/2} \text{ – евклидова норма,}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{i,j}|^p \right)^{1/p} \text{ – } p\text{-норма,}$$

$$\|x\|_I = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{i,j}| \text{ – абсолютная норма,}$$

$\|x\|_m = \max |x_{i,j}|$ – индуцированная норма.

Теорема о норме матрицы: Пусть для некоторой матричной нормы квадратная матрица A удовлетворяет условию: $\|A\| \leq \rho < 1$. Тогда существует матрица $(A + E)^{-1}$, которая удовлетворяет неравенству: $\|(A + E)^{-1}\| \leq (1 - \rho)^{-1}$.

Эта теорема утверждает факт существования обратной матрицы указанного типа и позволяет оценить ее норму.

66. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЯ РЕШЕНИЯ. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ

Численное решение можно считать достоверным, если оценена его погрешность. Будем считать, что исходная задача имеет вид:

$$Ax = u. \quad (66.1)$$

Если учесть присутствие погрешностей в описании задачи (модели), то будут получена возмущенная задача:

$$(A + \delta A)y = u + \delta u. \quad (66.2)$$

Цель данного исследования: оценить норму разности точного и приближенного решений, то есть величину:

$$\|\delta x\| = \|y - x\|.$$

Вычтем (66.1) из (66.2) и после группирования получим:

$$(A + \delta A)\delta x + \delta A \cdot x = \delta u. \quad (66.3)$$

Далее используется следующее тождество: $A + \delta A = A(E + A^{-1} \cdot \delta A)$.

Кроме того, за счет малости погрешности будем считать, что: $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| = \rho < 1$.

Тогда справедливо неравенство: $\|A^{-1} \cdot \delta A\| \leq \rho$.

Согласно теореме о норме матрицы, матрица $(A^{-1} \cdot \delta A + E)$ имеет обратную матрицу, следовательно, $(A + \delta A)^{-1} = (A^{-1} \cdot \delta A + E)^{-1} \cdot A^{-1}$.

Используя формулу (66.3), получаем: $\delta x = (A^{-1} \cdot \delta A + E)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \delta A \cdot x$. Используя оценку теоремы о норме и неравенство, следующее из формулы

(66.1) $\frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|u\|} \geq 1$, получаем следующее соотношение:

$$\|\delta x\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta u\|}{1 - \rho} - \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|x\|}{1 - \rho}.$$

Введя обозначение:

$$C(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|, \quad (66.4)$$

и присвоив значение параметру: $\rho = \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| = C(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$, окончательно получим:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{C(A)}{1 - C(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \right). \quad (66.5)$$

Таким образом, формула (66.5) позволяет оценить относительное возмущение (погрешность) решения уравнения (66.1) через относительные погрешности матрицы A и вектора результатов измерений u .

Параметр $C(A)$ называется числом обусловленности матрицы A . Формула (66.4) является его определением, однако для вычисления числа обусловленности эта формула не применяется, так как требует обращения исходной матрицы.

Согласно формуле (66.5), чем больше число обусловленности, тем больше относительное возмущение решения при постоянной величине относительных возмущений исходных данных. Число обусловленности зависит от матрицы и от выбранной нормы. Норма обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} C(A) &= C(A^{-1}), & C(A \cdot B) &\leq C(A) \cdot C(B), \\ C(A) &\geq \|E\| \geq 1, & C(A) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \end{aligned}$$

где α_1 – наибольшее сингулярное число, α_n – наименьшее сингулярное число.

Последнее из приведенных свойств служит основным средством для вычисления чисел обусловленности, так как не требует обращения матриц.

В MathCad определены специальные функции, вычисляющие число обусловленности: $\text{conde}(A)$ – в евклидовой норме, $\text{condi}(A)$ – в равномерной норме.

67. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сопряженный оператор – это ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве U , который имеет единственный сопряженный оператор A^* определяемый условием:

$$(x, Ay) = (A^*x, y).$$

Сопряженный оператор обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (A + B)^* &= A^* + B^*, & (A \cdot B)^* &= B^* \cdot A^*, \\ (A^*)^* &= A, & \|A^* \cdot A\| &= \|A\|^2, \\ (\alpha A)^* &= \overline{\alpha} A^*, & (A^{-1})^* &= (A^*)^{-1}, \\ \|A^*\| &= \|A\|, & 0^* &= 0, \\ E^* &= E, & (Ax, By) &= (x, A^*By) = (B^*Ax, y). \end{aligned}$$

Если оператор является матрицей, то сопряженный оператор определяется следующим соотношением: $A^* = \overline{A}^T$.

Если оператор соответствует интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$Af(t) \equiv \int_a^b K(x, t) \cdot f(x) dx, \text{ то сопряженный оператор имеет следующий вид:}$$

$$A^* f(t) \equiv \int_c^d \overline{K(t, x)} \cdot f(x) dx$$

68. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

Регуляризация – метод построения приближенных решений некорректно поставленных задач, состоящий в поиске решения на основании параметра регуляризации, учитывающего приближенный характер исходной задачи. Метод регуляризации Тихонова позволяет получать корректные решения для задач, представляемых следующим операторным уравнением:

$$Az = u. \quad (68.1)$$

На основании этого уравнения строится функционал:

$$M^\alpha(z) = \|Az - u\|^2 + \alpha \|z\|^2,$$

где α – параметр регуляризации, $\alpha > 0$.

Первый элемент функционала представляет собой невязку решения, а второй – норму решения. В качестве решения уравнения (68.1) принимается такая функция z , которая минимизирует функционал, то есть одновременно минимизирует и невязку, и норму решения. Балансом между этими минимума является параметр регуляризации.

Теорема: Для любых $u \in U$ и $\alpha > 0$ функционал $M^\alpha(z)$ достигает своей нижней грани на единственном элементе z_0 .

Существование z_0 доказывается на основе предельных переходов. Доказательство единственности использует следующие преобразования:

$$\begin{aligned} M^\alpha(z+h) - M^\alpha(z) &= \\ &= (A(z+h) - u, A(z+h) - u) + \alpha(z+h, z+h) - (Az - u, Az - u) - \alpha(z, z) = \\ &= 2(Az - u, Ah) + 2\alpha(z, h) + (Ah, Ah) + \alpha(h, h) = \\ &= 2(A^*Az - A^*u, h) + 2\alpha(z, h) + (Ah, Ah) + \alpha(h, h) = \\ &= 2(A^*Az - A^*u + \alpha z, h) + (Ah, Ah) + \alpha(h, h) \end{aligned}$$

Учитывая, что $|(Ah, Ah) + \alpha(h, h)| \leq (\|A\|^2 + \alpha)\|h\|^2$, можно утверждать, что функционал $M^\alpha(z)$ является дифференцируемым и его градиент равен:

$$\frac{\partial M^\alpha(z)}{\partial z} = 2(A^*Az - A^*u + \alpha z).$$

Следовательно, если на z_0 достигается нижняя грань $M^\alpha(z)$, то справедливо равенство:

$$A^*Az - A^*u + \alpha z = 0, \quad (68.2)$$

то есть z_0 является решением этого уравнения.

Уравнение (68.2) имеет только одно решение, если однородное уравнение $A^*Az + \alpha z = 0$ имеет только нулевое решение. Доказательство отсутствия ненулевых решений, проводится от противного, то есть предполагается, что существует решение однородного уравнения $z_1 \neq 0$. Тогда,

$$(A^*Az_1 + \alpha z_1, A^*Az_1 + \alpha z_1) = 0$$

После перегруппирования получим равенство:

$$\alpha^2(z_1, z_1) + 2\alpha(Az_1, Az_1) + (A^*Az_1, A^*Az_1) = 0.$$

Первое слагаемое является строго положительным, а второе и третье – неотрицательными, следовательно, получено противоречие, что доказывает единственность решения уравнения (68.2). На этом доказательство теоремы можно считать законченным.

Элемент, на котором достигается нижняя грань функционала $M^\alpha(z)$, можно рассматривать в качестве приближенного решения уравнения (68.1) с неточно заданной правой частью.

Метод Тихонова состоит в том, что в качестве регуляризованного решения уравнения (68.1) принимается решение $z_{\alpha(\delta)}$ следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha(\delta) \cdot z_{\alpha(\delta)} + A^*Az_{\alpha(\delta)} = A^*u_\delta \\ \|Az_{\alpha(\delta)} - u_\delta\|^2 = \delta^2 \end{cases}. \quad (68.3)$$

Система (68.3) решается относительно неизвестных $z_{\alpha(\delta)}$ и $\alpha(\delta)$, где δ - заданная величина погрешности правой части уравнения (68.1). Таким образом, полученное решение и параметр регуляризации учитывают существующие погрешности исходных данных и является корректным.

69. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ

Итеративные методы решения уравнений позволяют реализовать рациональные алгоритмы поиска решения задач. К таким задачам относится следующее операторное уравнение:

$$Az = u. \quad (69.1)$$

Аналогично методике предыдущего раздела был получен следующий итерационный процесс поиска решения уравнения (69.1):

$$z_n = z_{n-1} + \mu(A^*z - A^*Az_{n-1}), \quad (69.2)$$

где $z_0 = \mu A^*u$, μ – положительный параметр.

Методом математической индукции можно доказать справедливость следующего представления решения:

$$z_n = R_n u, \text{ где } R_n = \mu \sum_{i=0}^n (E - \mu A^* A)^i A^*.$$

Методы регуляризации позволяют определить длину n рекуррентной последовательности, так как чрезмерно длительный рекуррентный процесс может привести к получению некорректных решений.

Теорема (о сходимости итерационного процесса): Если параметр μ удовлетворяет неравенствам $0 < \mu < 2\|A^* A\|^{-1}$, и если целочисленная, положительная функция $n(\delta)$ такова, что $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\delta \rightarrow 0} n(\delta) = \infty \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} n(\delta) \cdot \delta = 0 \end{array} \right\}$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{n(\delta)} \cdot u_\delta - z\| = 0$.

Пример функции, удовлетворяющей условиям теоремы:

$n(\delta) = \text{floor}\left(\frac{k}{\sqrt{\delta}}\right)$, где $\text{floor}(\cdot)$ – функция округления до целого числа в сторону уменьшения, k – постоянная величина, для определения которой необходимы дополнительные сведения о решаемой задаче.

Теорема утверждает, что если число итераций n согласовано с точностью задания правой части уравнения, то при стремлении к нулю упомянутой погрешности, итерационный процесс сходится к точному решению. Если число итераций стремится к бесконечности произвольно, без согласования с погрешностью, то сходимости нет.

70. ПРИМЕР КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу вычисления значения интегрального оператора:

$$\int_a^b K(x, s) \cdot u(s) ds = z(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (70.1)$$

в которой при заданном ядре $K(x, s)$ требуется для любой функции $u(s)$, принадлежащей некоторому пространству U , вычислить функцию $z(x)$ из пространства Z . Пусть функции $K(x, s)$, $K_x(x, s)$, $K_s(x, s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \leq x \leq d$, $a \leq s \leq b$, а U и Z представляют собой пространства непрерывных функций $U = C[a, b]$, $Z = C[c, d]$. Задача вычисления функции $z(x)$ по $u(s)$ является корректной. Для любой функции $u(s) \in C[a, b]$ интеграл, стоящий в левой части (70.1), представляет собой функцию, непрерывную на отрезке $[c, d]$, и эта функция определяется однозначно. Таким образом, первое и второе условия корректности задачи выполнены. Покажем, что выполняется и третье условие. Введем обозначение:

$$K_0 = \max_{\substack{c \leq x \leq d \\ a \leq s \leq b}} |K(x, s)|.$$

Пусть $z_i(x)$ - функции, вычисленные по $u_i(s)$, $i = 1, 2$. Тогда из (70.1) следует, что:

$$\|z_1 - z_2\|_{C[c,d]} \leq K_0 \|u_1 - u_2\|_{C[a,b]}.$$

Таким образом, условие непрерывной зависимости решения от исходных данных задачи также выполнено, и задача поставлена корректно.

71. ПРИМЕР НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу, обратную предыдущей, т.е. задачу решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, имеющего вид (71.1). При заданном ядре $K(x, s)$ требуется для любой функции $u(x)$ найти решение $z(s)$. Предположим, что функции $K(x, s)$, $K_x(x, s)$, $K_s(x, s)$ непрерывны в прямоугольнике $c \leq x \leq d$, $a \leq s \leq b$, $u(x) \in C[c, d]$, $z(s) \in C[a, b]$.

Поставленная задача является некорректной. Для нее не выполняется первое условие (условие существования решения), поскольку решение существует не для любой функции $u(x) \in C[c, d]$. Например, пусть функция $u_0(x)$ – непрерывна на $[c, d]$ и не дифференцируема на этом отрезке. Однако интеграл от произведения непрерывного ядра $K(x, s)$ и непрерывной функции $z(s)$ всегда представляет собой непрерывно - дифференцируемую функцию.

Для поставленной задачи не выполняется и условие непрерывной зависимости решения от исходных данных. Например, рассмотрим последовательность:

$$z_n(s) = z_0(s) + n \cdot \sin(n^2 \cdot s), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции $z_n(s)$ являются решениями уравнения Фредгольма с правыми частями:

$$u_n(z) = \int_a^b K(x, s) \cdot z_n(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оценим $\|u_n - u_0\|_{C[c,d]}$. Так как $|u_n(x) - u_0(x)| \leq \left| \int_a^b K(x, s) \cdot n \cdot \sin(n^2 \cdot s) ds \right| =$
 $= \left| -K(x, s) \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(n^2 \cdot s) \right|_a^b + \frac{1}{n} \cdot \int_a^b K_s(x, s) \cdot \cos(n^2 \cdot s) ds \leq \frac{k_1}{n},$ где постоянная k_1 не
 зависит от n , то $\|u_n - u_0\|_{C[c,d]} \leq \frac{k_1}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

С другой стороны, из определения последовательности $z_n(s)$ следует, что

$$\|z_n - z_0\|_{C[a,b]} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, исходные данные $u_n(x)$ сколь угодно близки к $u_0(x)$ при $n \rightarrow \infty$, а соответствующие решения $z_n(s)$ не сходятся к $z_0(s)$ при $n \rightarrow \infty$, что и означает отсутствие непрерывной зависимости.

72. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Примеры регуляризации некорректных задач данного раздела построены на сопоставлении точного решения и решений, полученных до и после регуляризации. В качестве некорректных задач рассматривается два варианта интегрального уравнения Фредгольма с различными точными решениями. Правые части уравнений вычисляются путем вычисления интегральной части с точным решением. После этого уравнение дважды решается: без применения процедуры регуляризации и с применением процедуры регуляризации. При этом информация о точном решении используется только для оценки ошибок, получаемых решений. Вид графиков первого примера для функций ядра, точного решения и правой части представлены на рисунке 72.1.

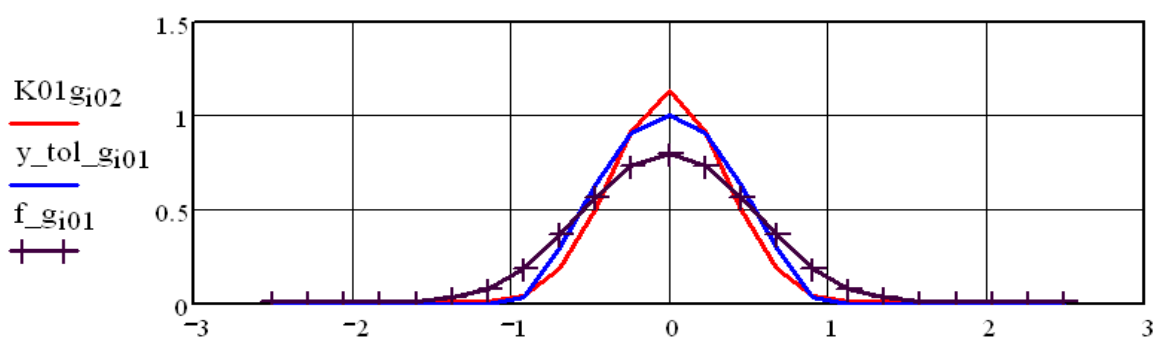


Рис.72.1. Графики ядра $K01$, точного решения y_tol и правой части f_g

Результаты решения без применения процедуры регуляризации представлены на рисунках 72.2-72.4. Приведенные решения отличаются числом точек аргумента, которое имеет решающее влияние на уровень деградации полученных решений.

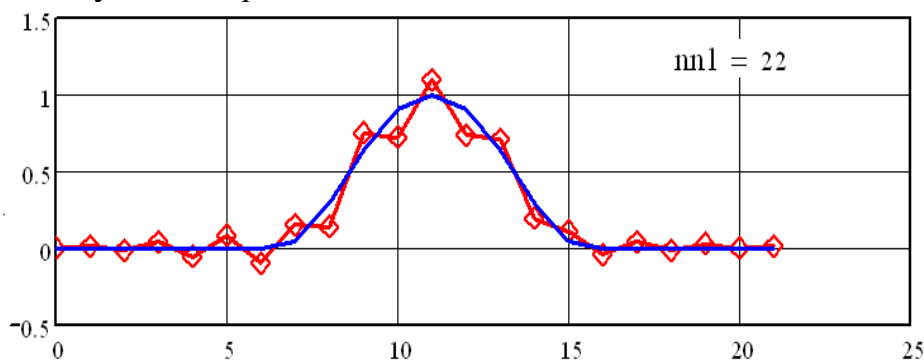


Рис.72.2. Графики точного и не регуляризованного решений при числе точек аргумента равного 22

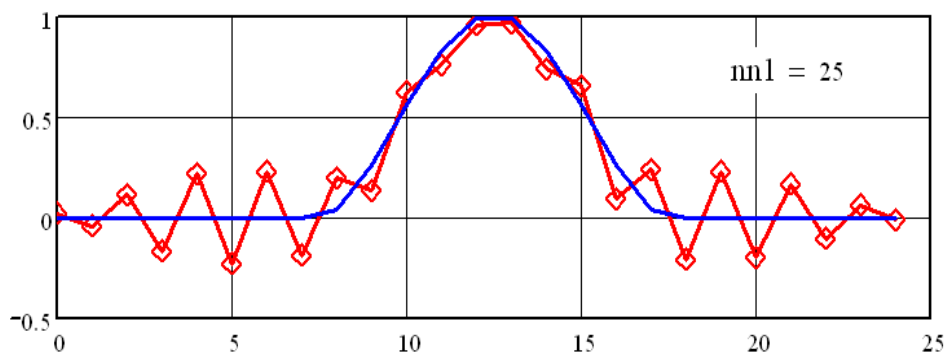


Рис. 72.3. Графики точного и не регуляризованного решений при числе точек аргумента равного 23

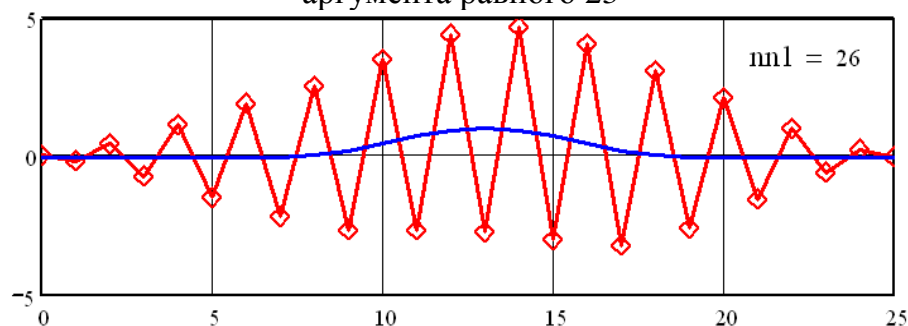


Рис. 72.4. Графики точного и не регуляризованного решений при числе точек аргумента равного 24

Решение регуляризованной задачи первого примера не имеет существенных отличий от точного решения.

Вид графиков второго примера для функций ядра, точного решения и правой части представлены на рисунке 72.5.

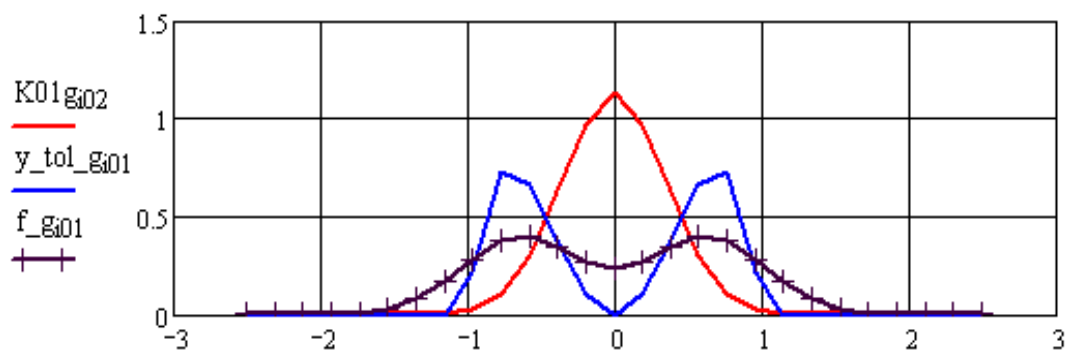


Рис. 72.5. Графики ядра K01, точного решения y_{tol} и правой части f_g второго примера

Результаты решения более сложной не унимодальной функции представлены на рисунках 72.6 и 72.7. Применение процедуры регуляризации и в этом примере дает приемлемые по качеству решения.

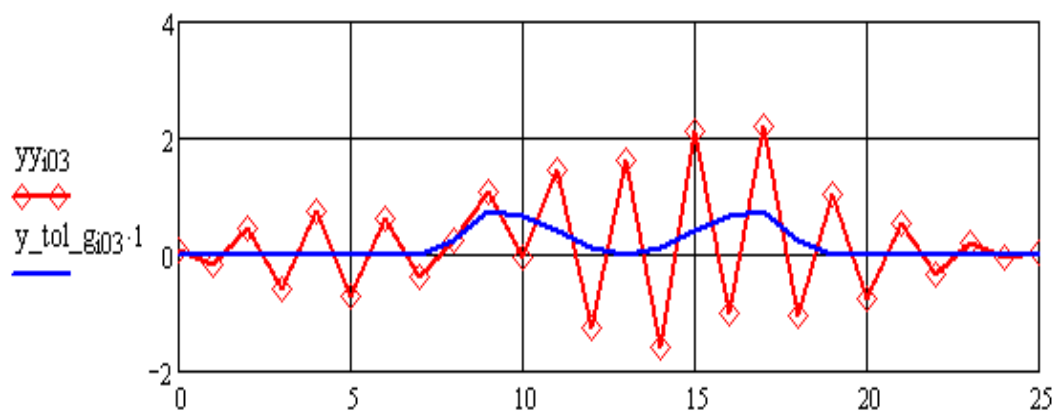


Рис. 72.6. Графики точного и нерегуляризованного решений

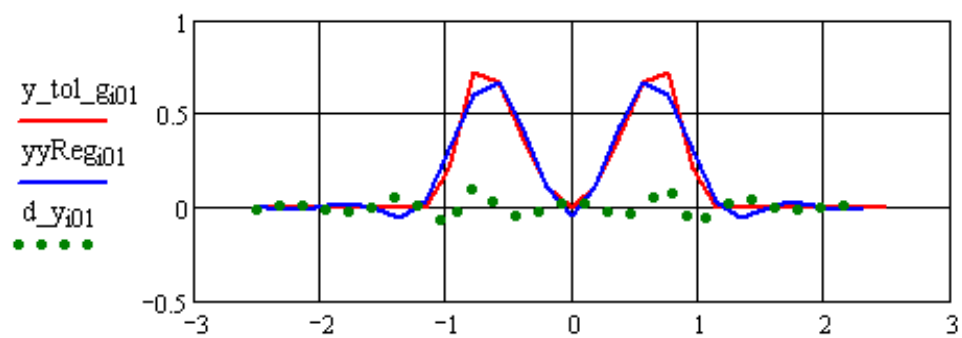


Рис. 72.7. Графики точного и регуляризованного решений

ЛИТЕРАТУРА

1. Гультяев А.К. Имитационное моделирование в среде Windows. MATLAB 5.2. - СПб.: КОРОНА, 1999-288с.
2. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука, 1989-400с.
3. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ.-М.: Наука, 1989-240с.
4. Шалыгин А.С. Прикладные методы статистического моделирования. - М.: Наука, 1986 - 320с.
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. -М.: Мир, 1979-432с.
6. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. -М.: "Филин",1996-712с.
7. Статистические методы в инженерных исследованиях (Лабораторный практикум). Под ред. Г.К. Круга М: "Издательство МЭИ", 1983 - 216с.
8. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М: "Высшая школа", 1991- 400с.
9. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов экспериментов. М: "Издательство московского университета", 1988- 174с.
10. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. М: "Финансы и статистика", 1983-471с.
11. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М: "Мир", 1983 - 312с.
12. Льюинг Л. Идентификация систем. М: "Наука", 1991 - 432 с.
13. Петрович М.Л., Давидович М.И. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. М: " Финансы и статистика ", 1989 - 191 с.
14. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука. 1969. 576 с.,
15. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС 2005. 448 с.
16. Нинул А.С. Оптимизация целевых функций. Аналитика. Численные методы. Планирование эксперимента. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 - 336с.
- 17.Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 816 с.

Электронное учебное издание

Виктор Иванович **Капля**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н. И.

Темплан 2020 г. Поз. № 25.

Подписано к использованию 10.07.2020. Формат 60x84 1/16.

Гарнитура Times. Усл. печ. л. 6,06.

Волгоградский государственный технический университет.

400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.

404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.