Суркаев А.Л., Матвеева Т.А., Светличная В.Б.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Суркаев А.Л., Матвеева Т.А., Светличная В.Б.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Электронное учебное пособие

Волжский

2021

УДК 53(07)
ББК 22.3я73
С 901

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры
«Общая физика» филиала ФГБОУВПО «НИУ «МЭИ» в г. Волжском
Кульков В.Г.;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
«Кафедра фундаментальной информатики и оптимального управления»
Волжского филиала
федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования «Волгоградский государственный университет»
Полковников А.А.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Суркаев, А.Л.

Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учебное пособие / Суркаев А.Л., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 3,77 МБ). – Волжский, 2021. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-4050-4

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал и большое количество примеров, иллюстрирующих основные понятия по учебной дисциплине «Задачи математической физики».

Рассчитано на студентов различных форм обучения высших учебных заведений по направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Ил. 2, библиограф.: 12 назв.

ISBN 978-5-9948-4050-4

© Волгоградский государственный технический университет, 2021

© Волжский политехнический институт, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке и технике математические методы исследования и проектирования играют все возрастающую роль. Это обусловлено, прежде всего, быстрым развитием вычислительной техники, в результате чего существенно расширяется возможность успешного применения математики при решении конкретных задач техники. Многие задачи механики, физики, широкий круг инженерно-технических проблем приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, являющимися частным случаем так называемых уравнений математической физики. Предметом математической физики является изучение методов построения математических моделей реальных физических и механических процессов.

Настоящее учебное пособие основывается на материалах авторов ранее представленного учебного пособия (Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Зотова С.А. Практикум по уравнениям математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие. Волгоград 2017, 54 с.) и представляет собой переработанное и дополненное изложение основных методов и приемов решения задач математической физики. Одной из особенностей показанного пособия является простота изложения, опирающаяся на объем знаний математического аппарата читателя, необходимый для решения стандартных задач. Математический аппарат, применяемый в данном пособии, не выходит за пределы обычного (стандартного) курса высшей математики в технических вузах.

По содержанию данное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО в технических вузах всех форм обучения и включает в себя в соответствии с учебной программой основные разделы:

— классификация уравнений в частных производных;
— гиперболические уравнения;
— параболические уравнения;
— эллиптические уравнения.

В пособии широко рассмотрены основные методики и конкретные примеры решения задач, а также представлен справочный материал.

Задача настоящего курса – не только помочь студентам, аспирантам, а также научным работникам и инженерам освоить работу с основными типами уравнений в частных производных, но и привить вкус к их применению в математическом моделировании различных физических процессов.

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть имеется функция ***u*** независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. ***Уравнением с частными производными*** называется соотношение, связывающее переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, функцию u и все её частные производные до некоторого порядка:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ...) = 0, \tag{1.1}$$

где $u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, ..., $u_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}$, $u_{x_1 x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $u_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ (индекс при функции показывает переменную производной).

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Функция $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***решением уравнения*** (1.1), если при подстановке её в это уравнение оно обращается в тождество при допустимых значениях аргументов. Совокупность всех решений уравнения называется общим решением.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений с частными производными для функции, зависящей от двух переменных $u = u(x, y)$.

Пример 1.1. Пусть дано уравнение $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$ или с применением обозначения $u_x = 0$. Это уравнение фактически означает, что функция $u = u(x, y)$ не зависит от *x*. Общее решение: $u = C(y)$, где C – произвольная функция одной переменной y.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$ или $u_x = f(x, y)$. Для нахождения решения этого уравнения проинтегрируем его по переменной *x*:

$$u = \int u_x dx = \int f(x, y) dx + C. \tag{1.2}$$

При интегрировании по *x* мы считаем *y* постоянным, и поэтому произвольная постоянная в (1.2) может зависеть от *y*. Тем самым общее решение имеет вид: $u(x, y) = \int f(x, y) dx + C(y)$.

Пример 1.3. Пусть дано уравнение $u_{xy} = 0$. Из примера 1.1 следует, что $u_y = C(y)$. Решая это уравнение аналогично тому, как решалось уравнение в примере 1.2, будем иметь:

$$u(x, y) = \int C(y) dy + C_1(x).$$

Обозначим $C_2(y) = \int C(y) dy$. Тогда общее решения примет вид:

$$u(x, y) = C_2(y) + C_1(x).$$

В отличие от общего решения обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от произвольных постоянных, общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций.

Если искомая функция $u = u(x, y)$, тогда уравнение первого порядка в частных производных будет иметь вид:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.3}$$

Всякое решение уравнения (1.3) $u = u(x, y)$ будем называть ***интегральной поверхностью*** (график решения – поверхность в пространстве с координатами *x*, *y*, *u*). Для того чтобы из совокупности всех решений уравнения (1.3) выделить некоторое частное решение, формулируется задача Коши: найти решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $u(x, y)\big|_{x=x_0} = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – некоторая заданная функция.

Обозначим через l кривую в пространстве, задаваемую уравнениями $x = x_0$, $u = \varphi(y)$. Тогда задача Коши имеет следующий геометрический смысл: среди всех интегральных поверхностей найти ту, которая проходит через заданную кривую l.

Уравнение с частными производными называются ***линейным***, если искомая функция $u = u(x, y)$ и её частные производные входят в уравнение линейно. Таким образом, линейное уравнение первого порядка имеет вид:

$$A(x, y)\cdot u_x + B(x, y)\cdot u_y + C(x, y)\cdot u = f(x, y), \tag{1.4}$$

где *A*, *B*, *C* и *f* – заданные функции. Если $f(x, y) = 0$, то уравнение называется ***однородным***. Отметим, что основные свойства линейных уравнений с частными производными во многом аналогичны свойствам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Так, например, линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является решением этого уравнения. Общее решение неоднородного уравнения может быть представлено в виде некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Будем рассматривать сначала однородное линейное уравнение вида:

$$A(x, y)\cdot u_x + B(x, y)\cdot u_y = 0\ . \tag{1.5}$$

Этому уравнению поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x, y), \end{cases} \tag{1.6}$$

которую будем называть ***характеристической системой*** для уравнения (1.5), а всякое решение $x(t),\ y(t)$ этой системы назовем ***характеристикой***.

Функция $\varphi(x,\ y)$, не сводящаяся тождественно к постоянной, или равенство $\varphi(x,\ y) = C$ называется ***первым интегралом системы*** (1.6), если при подстановке в неё любого решения системы получается постоянная величина, зависящая лишь от выбора решения. Тогда функция $u=\varphi(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (1.5). Обратное также справедливо.

Чтобы найти общее решение уравнения (1.5), надо составить характеристическую систему (1.6) и найти первый интеграл этой системы. Общее решение уравнения (1.5) будет $u=F(\varphi)$, F – произвольная функция.

Пример 1.4. Рассмотрим уравнение:

$$x\cdot u_x + y\cdot u_y = 0.$$

Характеристическая система для этого уравнения в соответствие (1,6): $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\ \dfrac{dy}{dt}=y.\end{cases}$

Решение этой системы (характеристики) имеет вид:

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int dt+D_1,\\ \displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int dt+D_2,\end{cases}\quad \begin{cases}\ln|x|=t+D_1,\\ \ln|y|=t+D_2,\end{cases}\quad \begin{cases}x=e^{t+D_1},\\ y=e^{t+D_2},\end{cases}\quad \begin{cases}x=C_1e^t,\\ y=C_2e^t,\end{cases}$$

где $C_1=e^{D_1}$, $C_2=e^{D_2}$. Первым интегралом данной системы является функция:

$$\varphi(x,\ y)=\frac{y}{x}.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения будет:

$$u=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для нахождения общего интеграла характеристической системы можно исключить переменную t и получить обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B(x,y)}{A(x,y)}.$$

Если общее решение этого уравнения записано в виде $\varphi(x,\ y)=C$, то и получим первый интеграл системы $\varphi(x,\ y)=C$, и тогда общий интеграл исходного уравнения $u=F(x,y,C)$.

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$y\cdot u_x - x\cdot u_y = 0.$$

Характеристическая система будет иметь вид: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$

Исключим переменную t из этой системы:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}.$$

Разделяя переменные, получим: $\int y\,dy = -\int x\,dx + \dfrac{C}{2}$.

Проинтегрировав это уравнение, находим его общий интеграл:

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{C}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = C\,.$$

Это соотношение одновременно является первым интегралом для характеристической системы. Заметим, что характеристиками в данном случае будут являться окружности с центром в начале координат. Итак, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$u(x, y) = F(\,x^2 + y^2\,).$$

Глава 2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Рассмотрим основные уравнения математической физики, являющиеся дифференциальными уравнениями с частными производными второго порядка.

1. Уравнение Лапласа

Многие стационарные, т.е. не изменяющиеся во времени физические процессы описываются ***уравнениями эллиптического типа.*** К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д. В простейшем случае (однородной среды и отсутствия источников) – уравнением Лапласа, которое для трех направлений координат *(x, y, z)* может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{2.1}$$

где $u = u(x, y, z)$ – искомая функция координат.

В операторной форме уравнение Лапласа (2.1) может быть представлено следующим образом:

$$\Delta u = 0\,, \tag{2.2}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении тепла в некотором объёме V, ограниченном замкнутой поверхностью S трехмерного пространства $X=(x,y,z)$.

Процесс теплопроводности или кондукции определяется законом Фурье, согласно которому вектор плотности теплового потока **W** пропорционален градиенту температуры $T = T(x, y, z)$:

$$W = -k \cdot grad(T), \tag{2.3}$$

где $k = k(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности.

Плотность теплового потока **W** равна количеству теплоты, протекающему в единицу времени через единичную площадь изотермической поверхности.

Как правило, цель стационарной задачи теплопроводности сводится к необходимости нахождения зависимости температуры от координат (x, y, z) при известном распределении плотности источников тепла $f(x, y, z)$. Поскольку функция $f(x, y, z)$ не входит непосредственно в уравнение Фурье (2.3), необходимо выполнить ряд предварительных преобразований.

Из приведенного выше определения плотности теплового потока следует, что суммарное количество тепла Q_S, прошедшее в единицу времени через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, в общем случае выражается интегралом:

$$Q_S = \iint_S W \cdot dS, \tag{2.4}$$

где **dS** – вектор, модуль которого численно равен площади dS соответствующего бесконечно малого элемента поверхности, а направление совпадает с направлением нормали к этому элементу; $(W\, dS) = W \cdot dS \cdot cos(\gamma)$ – скалярное произведение векторов ***W*** *и* ***dS***; γ – угол между ними.

Суммарное количество тепла Q_V, выделяющегося в единицу времени в объеме V, ограниченном поверхностью S, определяется интегралом:

$$Q_V = \iiint_V f(x, y, z) dV . \tag{2.5}$$

Очевидно, в данном случае уравнение баланса тепла должно отражать факт равенства количества тепла Q_S, прошедшего в единицу времени через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, и количества тепла Q_V, выделяющегося в единицу времени в этом объеме:

$$\iint_S W \cdot dS = \iiint_V f(x, y, z) dV . \tag{2.6}$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S W \cdot dS = \iiint_V divW \cdot dV . \tag{2.7}$$

Тогда имеем:

$$\begin{gathered} \iiint_V divW \cdot dV = \iiint_V f(x, y, z) dV; \\ divW = f(x, y, z). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставив в уравнение (2.8) закон Фурье (2.3), получим уравнение для стационарной задачи теплопроводности в векторной форме:

$$div\,\left(k\left(x,y,z\right)\cdot grad\ \left(T\right)\right)=-f\left(x,y,z\right). \qquad (2.9)$$

Если источники тепла отсутствуют $f(x,y,z)=0$ и среда однородна $k(x,y,z)=const$, уравнение (2.9) можно переписать в виде:

$$div\left(grad\ \left(T\right)\right)=0. \qquad (2.10)$$

Учитывая, что по определению градиент некоторого скалярного поля $u=u\ (x,y,z)$ определяется выражением:

$$grad(u)=\frac{\partial u}{\partial x}e_x+\frac{\partial u}{\partial y}e_y+\frac{\partial u}{\partial z}e_z,$$

где $\boldsymbol{e_x}$, $\boldsymbol{e_y}$, $\boldsymbol{e_z}$ – единичные вектора (орты) в направлениях соответствующих координатных осей, а дивергенция некоторого векторного поля $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z)$ – выражением:

$$div(v)=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{dz},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора **v** на соответствующие оси координат, уравнение (2.10) можно переписать в частных производных:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \qquad (2.11)$$

или в операторной форме:

$$\Delta T(x,y,z)=0, \qquad (2.12)$$

то есть в виде уравнения Лапласа.

Процессы диффузии вещества во многом аналогичны процессам теплопроводности. При описании диффузии аналогом закона Фурье является закон Нернста, согласно которому вектор плотности потока вещества $\boldsymbol{W}$ пропорционален градиенту концентрации $N=N(x,y,z)$:

$$W=-D\cdot grad(N), \qquad (2.13)$$

где $D=D(x,y,z)$ – коэффициент диффузии.

Плотность потока вещества $\boldsymbol{W}$ равна количеству частиц вещества (атомов, молекул), диффундирующему в единицу времени через единичную площадь поверхности S.

Подставляя выражение (2.13) в уравнение (2.8), при отсутствии источников диффундирующего вещества $f(x,y,z)=0$ и однородной среде $D(x,y,z)=const$ получим уравнение Лапласа в векторной форме:

$$div(grad(N))=0, \qquad (2.14)$$

в частных производных:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=0, \qquad (2.15)$$

и в операторной форме:

$$\Delta N(x,y,z)=0. \qquad (2.16)$$

К уравнению Лапласа приводят и многие другие задачи, например, задача о распределении электростатического поля в однородной непроводящей среде в отсутствие электрических зарядов.

В общем виде данная задача описывается уравнениями Максвелла:

$$rot(E)=0;$$
$$div(\varepsilon(x,y,z)E)=\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}, \qquad (2.17)$$

где $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x, y, z)$ – вектор напряженности электрического поля; $\rho=\rho(x,y,z)$ – объемная плотность электрических зарядов; $\varepsilon=\varepsilon(x,y,z)$ – диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная. Уравнение (2.17) выражает отсутствие вихревых электрических полей.

Если непроводящая среда однородна ($\varepsilon\,(x, y, z) = const$) и электрические заряды в объеме отсутствуют или уравновешены ($\rho\,(x, y, z) = 0$), уравнение (2.17) принимает вид:

$$div(E)=0. \qquad (2.18)$$

Поскольку напряженность электрического поля **E** связана с электрическим потенциалом φ равенством: $E=-grad(\varphi)$, то, подставляя данное соотношение в (2.18) и учитывая выражения (2.2), определение градиента и дивергенции, получим уравнение Лапласа в векторной форме:

$$div(grad(\varphi))=0, \qquad (2.19)$$

в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0, \qquad (2.20)$$

и в операторной форме:

$$\Delta\varphi(x,y,z)=0. \qquad (2.20)$$

К уравнениям ***эллиптического типа*** относится ***уравнение Пуассона***. В общем случае в векторной форме уравнение Пуассона имеет вид:

$$div(A(x,y,z)\cdot grad(u))=f(x,y,z), \qquad (2.21)$$

где $u = u(x, y, z)$ – искомая функция; $A(x, y, z), f(x, y, z)$ – некоторые функции независимых переменных.

Уравнение (2.21) может быть записано в частных производных как:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)=f(x,y,z), \qquad (2.22)$$

или в операторной форме как:

$$\nabla\left(A(x,y,z)\cdot\nabla u\right)= f(x,y,z), \tag{2.23}$$

где ∇ – оператор Набла, определяемый выражением:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

Из выражений (2.21) – (2.23) видно, что уравнение Пуассона является обобщением уравнения Лапласа для случая отличной от нуля правой части.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении тепла в некотором объеме *V*, ограниченном замкнутой поверхностью *S* трехмерного пространства *X = (x, y, z)*, которая в векторной форме описывается уравнением(2.9).

При наличии в объеме *V* источников тепла $f(x,y,z)=0$ и в случае неоднородной среды коэффициент теплопроводности $k=k(x,y,z)$, уравнение (2.9) в частных производных можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-f(x,y,z), \tag{2.24}$$

или в операторной форме:

$$\nabla\left(k(x,y,z)\cdot\nabla T\right)=-f(x,y,z). \tag{2.25}$$

Если среда однородна $k(x,y,z)=const$, то *k* можно вынести за знак частной производной в выражении (2.24) или за знак оператора Набла в выражении (2.25). В результате получим частный случай уравнения Пуассона в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=-\frac{f(x,y,z)}{k(x,y,z)}. \tag{2.26}$$

или в операторной форме:

$$\Delta T=-\frac{f(x,y,z)}{k(x,y,z)}. \tag{2.27}$$

Если среда анизотропна, т.е. коэффициент теплопроводности *k* зависит от направления распространения тепла и является тензором:

$$k=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

то уравнение (34) преобразуется к виду:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)= f(x_1,x_2,x_3), \tag{2.29}$$

где пространство (x_1, x_2, x_3) соответствует (*x*, *y*, *z*).

Если в тензоре **k** только элементы главной диагонали отличны от нуля (k_{ij}= 0 для $i\neq j$, то уравнение (2.29) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{11}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{33}\frac{\partial T}{\partial z}\right)=-f(x,y,z). \quad (2.30)$$

Процессы диффузии при наличии источников диффундирующего вещества $f(x,y,z)=0$ и в случае неоднородной среды (D = $D(x, y, z)$) описываются уравнением Пуассона в векторной форме:

$$div(D(x,y,z)\cdot grad(N))=f(x,y,z), \quad (2.31)$$

в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(x,y,z)\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D(x,y,z)\frac{\partial N}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D(x,y,z)\frac{\partial N}{\partial z}\right)=f(x,y,z), \quad (2.32)$$

или в операторной форме:

$$\nabla(D(x,y,z)\cdot\nabla N)=f(x,y,z). \quad (2.33)$$

Для однородной среды ($D(x, y, z) = const$), аналогично выражениям (2.26), (2.27) можно записать:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=\frac{f(x,y,z)}{D(x,y,z)}, \quad (2.34)$$

или в операторной форме:

$$\Delta N=\frac{f(x,y,z)}{D(x,y,z)}. \quad (2.35)$$

Задача о распределении электростатического поля в непроводящей среде при наличии электрических зарядов описывается уравнениями (2.17). С учетом выражения (2.19) в векторной форме можно записать:

$$div(\varepsilon(x,y,z)\cdot grad(\varphi))=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}, \quad (2.36)$$

в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon(x,y,z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}. \quad (2.37)$$

или в операторной форме:

$$\nabla(\varepsilon(x,y,z)\cdot\nabla\varphi)=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_0}. \quad (2.38)$$

Для однородной среды ($\varepsilon(x, y, z) = const$), аналогично выражениям (2.26), (2.27) можно записать:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (2.39)$$

или в операторной форме:

$$\Delta\varphi=-\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (2.40)$$

2. *Уравнение теплопроводности или уравнение Фурье*

Многие нестационарные, т.е. изменяющиеся во времени физические процессы, такие как распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде (например, фильтрации нефти и газа в подземных песчаниках), некоторые вопросы в теории вероятностей и т.д., описываются уравнением Фурье.

Рассмотрим в качестве примера нестационарное уравнение теплопроводности, которое получается на основании закона Фурье в результате следующих рассуждений. Это уравнение является простейшим ***уравнением параболического типа***.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}. \tag{2.41}$$

Задача о нестационарном распределении тепла в некотором объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S трехмерного пространства $X = (x, y, z)$. Количество тепла q_V, выделившегося в объеме V, ограниченном поверхностью S, за некоторый промежуток времени dt, можно определить как;

$$q_V = Q_V dt, \tag{2.42}$$

где Q_V – суммарное количество тепла, выделяющегося в единицу времени в объеме V, ограниченном поверхностью S, определяемое интегралом (2.5).

Учитывая, что рассматривается неравновесное состояние системы, часть тепла $q_T = q_V$ идет на изменение во времени температуры в объеме V и определяется выражением:

$$q_T = q dT, \tag{2.43}$$

где q – суммарное количество тепла, необходимого для изменения температуры объема V на один градус; dT– изменение температуры объема V за промежуток времени dt.

Остальная часть тепла q_S протекает через ограничивающую поверхность площадью S:

$$q_S = Q_S dt, \tag{2.44}$$

где Q_S – суммарное количество тепла, протекающего в единицу времени через поверхность S, определяемое интегралом (2.4).

Таким образом, для нестационарного случая должно быть справедливо уравнение:

$$q dT + Q_S dt = Q_V dt. \tag{2.45}$$

Учитывая, что в общем случае неоднородной среды суммарное количество тепла q, необходимого для изменения температуры объема V на один градус определяется выражением:

$$q = \iiint_V \rho(x,y,z) C(x,y,z) dV, \tag{2.46}$$

где $\rho(x,y,z)$ – плотность вещества; $C(x, y, z)$ – удельная теплоемкость вещества, подставляя выражения (2.46), (2.4), (2.5) в уравнение (2.45) и применяя теорему Остроградского-Гаусса (2.7), получим:

$$\left[\iiint\limits_V \rho(x,y,z)C(x,y,z)dV\right]dT+\left[\iiint\limits_V divWdV\right]dt=\left[\iiint\limits_V f(x,y,z)dV\right]dt, \quad (2.47)$$

откуда, вынося подынтегральные выражения, разделив левую и правую части на dt и подставляя закон Фурье (2.5), можем записать нестационарное уравнение теплопроводности в векторной форме:

$$\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial t}-div\left(k(x,y,z)\cdot grad(T)\right)=f(x,y,z). \quad (2.48)$$

В операторной форме уравнение (2.47) имеет вид:

$$\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial T}{\partial t}-\nabla\left(k(x,y,z)\cdot\nabla T\right)=f(x,y,z). \quad (2.49)$$

К уравнениям параболического типа относятся уравнения непрерывности для электронов и дырок, которые необходимы для моделирования процессов переноса заряда в проводниках. Они могут быть получены на основе следующих рассуждений.

Рассмотрим задачу о нестационарном распределении концентрации электронов проводимости в некотором объеме полупроводника V, ограниченном замкнутой поверхностью S трехмерного пространства $X = (x, y, z)$.

Согласно законам сохранения, изменение числа электронов N в рассматриваемом объеме за некоторый промежуток времени dt определяется с одной стороны соотношением скоростей генерации и рекомбинации электронов в данном объеме, а с другой – суммарным числом электронов J_S, прошедших за время dt через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=J_S+R_V, \quad (2.50)$$

где R_V – изменение числа электронов в объеме V за счет разности скоростей генерации и рекомбинации. Учитывая, что:

$$N=\iiint\limits_V n(x,y,z,t)dV, \quad (2.51)$$

где $n(x, y, z, t)$ – концентрация электронов, а суммарным числом электронов J_S:

$$J_S=\iint\limits_S \frac{j_n}{e}dS, \quad (2.52)$$

где $\boldsymbol{j_n}$ – вектор плотности тока электронов; e – заряд электрона; $\boldsymbol{dS}$ – вектор, модуль которого численно равен площади dS соответствующего бесконечно малого элемента поверхности, а направление совпадает с направлением нормали к этому элементу:

$$R_V=\iiint\limits_V R(x,y,z,t)dV, \quad (2.53)$$

где *R(x, y, z, t)* – изменение числа электронов в единице объема за счет разности скоростей генерации и рекомбинации, из уравнения (2.50) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V n(x,y,z,t)dV = \frac{1}{e}\iint\limits_s j_n dS + \iiint\limits_V R(x,y,z,t)dV. \qquad (2.54)$$

Применяя к первому слагаемому в правой части уравнения (63) теорему Остроградского-Гаусса (2.7), получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V n(x,y,z,t)dV = \frac{1}{e}\iiint\limits_V div\, j_n dV + \iiint\limits_V R(x,y,z,t)dV;\\ \frac{\partial n(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{e}div\, j_n + R(x,y,z,t).\end{gathered} \qquad (2.55)$$

Уравнение (2.55) называют уравнением непрерывности для электронов. Оно выражает тот факт, что изменение во времени концентрации электронов определяется соотношением мощностей источников и стоков плотности электронной составляющей тока $\boldsymbol{j_n}$ и разностью скоростей генерации и рекомбинации подвижных носителей заряда *R (x, y, z, t)*.

При рассмотрении процессов переноса зарядов в полупроводниках, как правило, помимо электронной учитывают также и дырочную составляющую тока, решая уравнения непрерывности для электронов и дырок совместно.

Уравнение непрерывности для дырок может быть получено в результате рассуждений, аналогичных приведенным выше для электронов, и имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{e}div\, j_\rho + R(x,y,z,t), \qquad (2.56)$$

где $\rho(x,y,z,t)$ – концентрация дырок; $\boldsymbol{j_p}$– вектор плотности дырочной составляющей тока.

3. Волновое уравнение

К исследованию уравнения данного вида приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т.п. Такое уравнение является простейшим ***уравнением гиперболического типа***.

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}. \qquad (2.57)$$

В качестве примера рассмотрим незатухающие колебания вдоль координаты *x* физической величины *u(x, t)* в некоторой среде, описываемые выражением:

$$u(x,t) = A\sin(kx + s_0)\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (2.57)$$

где *A* – амплитуда колебаний; *k* – волновое число, определяющее период изменения физической величины *u(x, t)* по координате; ω – круговая (циклическая) частота, определяющая период изменения физической величины *u(x, t)* во времени t; s_0 – фаза колебания в точке $x = 0$; φ_0 – начальная фаза колебания в момент времени $t = 0$.

Волновое число определяется выражением: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где λ – длина волны. Круговая частота определяется выражением: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период колебаний. Производная от $u(x, t)$ по координате x равна:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Ak\,cos(kx + s_0)sin(wt + \varphi_0).$$

Производная от $u(x, t)$ по времени t равна:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Aw\,sin(kx + s_0)cos(wt + \varphi_0).$$

Вторая производная от $u(x, t)$ по координате x имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -Ak^2\,sin(kx + s_0)sin(wt + \varphi_0). \tag{2.58}$$

Вторая производная от $u(x, t)$ по времени t имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Aw^2\,sin(kx + s_0)sin(wt + \varphi_0). \tag{2.59}$$

Сравнивая выражения (2.58) и (2.29) с (2.57) легко увидеть, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k^2 u(x,t); \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\omega^2 u(x,t). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Выражая $u(x, t)$ из (2.60) и приравнивая правые части полученных выражений, имеем уравнение в частных производных:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.61}$$

называемое волновым.

В простейшем случае, при $\omega = 1$ и $k = 1$, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.62}$$

Обобщая (2.61) для случая трех координат, можем записать волновое уравнение в операторной форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \tag{2.63}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В случае затухающих колебаний, когда амплитуда является функцией от координат и времени $A = A(x, t)$, коэффициенты в уравнении (2.61) будут иметь более сложный вид.

Приведённые уравнения (2.1), (2.41) и (2.57) называют ***основными уравнениями математической физики***. Их подробное изучение даёт возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Функция $u = u(x, y)$, удовлетворяющая какому-либо из приведённых уравнений, называется его решением.

Глава 3. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$a \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0, \tag{3.1}$$

где a, b, c – функции переменных x и y.

<u>Определение</u>. Уравнение (3.1) в области D принадлежит ***гиперболическому типу***, если в этой области дискриминант $b^2 - ac > 0$. При $b^2 - ac = 0$, уравнение принадлежит ***параболическому типу***, если же $b^2 - ac < 0$, – ***эллиптическому типу***.

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

называется ***каноническим уравнением гиперболического типа***.

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

называется ***каноническим уравнением параболического типа***.

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

называется ***каноническим уравнением эллиптического типа***.

Дифференциальное уравнение:

$$a \cdot dy^2 - 2b \cdot dx \cdot dy + c \cdot dx^2 = 0$$

называется ***уравнением характеристик*** уравнения (3.1).

Для уравнения гиперболического типа уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x, y) = C_1$, $\psi(x, y) = C_2$, т. е. существуют два семейства действительных характеристик. С помощью замены переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ дифференциальное уравнение (3.1) приводится к каноническому виду.

Для уравнения параболического типа оба семейства характеристик совпадают, т. е. уравнение характеристик дает лишь один интеграл $\varphi(x, y) = C$. В этом случае нужно произвести замену переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ – какая-нибудь функция, для которой

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0.$$

После такой замены уравнение приводится к каноническому виду.

Для уравнения эллиптического типа интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x, y) \pm i \cdot \psi(x, y) = C_{1,2}$, где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – действительные функции. С помощью подстановки $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ уравнение (3.1) приводится к каноническому виду.

Для решения примеров по данной теме полезно вспомнить формулы нахождения частных производных второго порядка от сложной функции по независимым переменным. Если задана сложная функция $u = u(\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, то:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

или в краткой форме:

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x, \tag{3.2}$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot \xi'_y + u'_\eta \cdot \eta'_y, \tag{3.3}$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_x \xi'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_\eta \cdot \eta''_{xx}, \tag{3.4}$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{yy} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_y + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + u'_\eta \cdot \eta''_{yy}, \tag{3.5}$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \cdot \xi'_x \xi'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \eta'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \eta'_x + u''_{\eta\eta} \cdot \eta'_x \eta'_y + u'_\xi \cdot \xi''_{xy} + u'_\eta \cdot \eta''_{xy}. \tag{3.6}$$

Пример 3.1. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \cdot u''_{xx} - y^2 \cdot u''_{yy} + 5u'_x = 10.$$

Решение. $\underline{x^2 \cdot u''_{xx} - y^2 \cdot u''_{yy}} + 5u'_x = 10$.

Здесь $a = x^2$, $b = 0$, $c = -y^2$, $b^2 - ac = x^2 \cdot y^2 > 0$; следовательно, имеем уравнение гиперболического типа.

Составляем уравнение характеристик:

$$x^2 \cdot dy^2 - y^2 \cdot dx^2 = 0, \quad \text{или} \quad (xdy + ydx) \cdot (xdy - ydx) = 0.$$

Получаем два дифференциальных уравнения

$$xdy + ydx = 0 \quad \text{и} \quad xdy - ydx = 0;$$

разделяя переменные и интегрируя, имеем

1) $\dfrac{dy}{y} + \dfrac{dx}{x} = 0$, т.е. $\displaystyle\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = \ln C_1 \Rightarrow$

$$\ln y + \ln x = \ln C_1 \Rightarrow \ln xy = \ln C_1,$$

2) $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = 0$, т.е. $\displaystyle\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \ln C_2 \Rightarrow$

$$\ln y - \ln x = \ln C_2 \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln C_2.$$

После потенцирования находим $x \cdot y = C_1$ и $\dfrac{y}{x} = C_2$ – уравнения двух семейств характеристик.

Введём новые переменные $\xi = x \cdot y$, $\eta = \dfrac{y}{x}$.

Выразим частные производные по переменным x, y через частные производные по новым переменным по формулам (3.1) – (3.6):

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x = \left| \begin{array}{l} \xi = xy \;\Rightarrow\; \xi'_x = y, \\ \eta = \dfrac{y}{x} \;\Rightarrow \eta'_x = -\dfrac{y}{x^2}, \end{array} \right| = u'_\xi \cdot y - u'_\eta \cdot \frac{y}{x^2},$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_x \xi'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_\eta \cdot \eta''_{xx} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \xi = xy \;\Rightarrow\; \xi'_x = y, \;\; \xi''_{xx} = 0 \\ \eta = \dfrac{y}{x} \;\Rightarrow \eta'_x = -\dfrac{y}{x^2}, \;\; \eta''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3} \end{array} \right| =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot (y)^2 + u'_\xi \cdot 0 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot y + u''_{\eta\eta} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)^2 + u'_\eta \cdot \left(\frac{2y}{x^3}\right) =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot y^2 - 2u''_{\xi\eta} \cdot \frac{y^2}{x^2} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x^3};$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot \left(\xi'_y\right)^2 + u'_{\xi} \cdot \xi''_{yy} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_y + u''_{\eta\eta} \cdot \left(\eta'_y\right)^2 + u'_{\eta} \cdot \eta''_{yy} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \xi = xy \quad \Rightarrow \quad \xi'_y = x, \quad \xi''_{yy} = 0 \\ \eta = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \eta'_y = \dfrac{1}{x}, \ \eta''_{yy} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot (x)^2 + u'_{\xi} \cdot 0 + 2u''_{\xi\eta} \cdot \frac{1}{x} \cdot x + u''_{\eta\eta} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + u'_{\eta} \cdot 0 =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot x^2 + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^2}.$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим:

$$x^2 \cdot \left(u''_{\xi\xi} \cdot y^2 - 2u''_{\xi\eta} \cdot \frac{y^2}{x^2} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{y^2}{x^4} + 2u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x^3} \right) - y^2 \cdot \left(u''_{\xi\xi} \cdot x^2 + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} \cdot \frac{1}{x^2} \right) +$$

$$+ 5 \cdot \left(u'_{\xi} \cdot y - u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x^2} \right) = 10.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$\underline{u''_{\xi\xi} \cdot (xy)^2} - 2u''_{\xi\eta} \cdot y^2 + \underline{\underline{u''_{\eta\eta} \cdot \frac{y^2}{x^2}}} + 2u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x} \underline{- u''_{\xi\xi} \cdot (xy)^2} - 2u''_{\xi\eta} \cdot y^2 \underline{\underline{- u''_{\eta\eta} \cdot \frac{y^2}{x^2}}} = 0;$$

$$-2u''_{\xi\eta} \cdot y^2 + 2u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x} - 2u''_{\xi\eta} \cdot y^2 + 5y \cdot u'_{\xi} - \frac{5y}{x^2} \cdot u'_{\eta} = 10 \quad \Rightarrow$$

$$4u''_{\xi\eta} \cdot y^2 - 2u'_{\eta} \cdot \frac{y}{x} + 5y \cdot u'_{\xi} - \frac{5y}{x^2} \cdot u'_{\eta} = 10,$$

$$u''_{\xi\eta} = \frac{1}{2xy} \cdot u'_{\eta} - \frac{5}{4y} \cdot u'_{\xi} + \frac{5}{4x^2 y} \cdot u'_{\eta} + \frac{5}{2y^2}.$$

Учитывая, что $\xi = x \cdot y$, $\eta = \dfrac{y}{x}$, имеем $xy = \xi$, $y^2 = \xi \cdot \eta$, $x^2 = \dfrac{\xi}{\eta}$, тогда уравнение примет вид:

$$u''_{\xi\eta} = \frac{1}{2\xi} \cdot u'_{\eta} - \frac{5}{4\sqrt{\xi\eta}} \cdot u'_{\xi} + \frac{5\sqrt{\eta}}{4\xi\sqrt{\xi}} \cdot u'_{\eta} + \frac{5}{2\xi\eta}.$$

Ответ: $u''_{\xi\eta} = \dfrac{1}{2\xi} \cdot u'_{\eta} - \dfrac{5}{4\sqrt{\xi\eta}} \cdot u'_{\xi} + \dfrac{5\sqrt{\eta}}{4\xi\sqrt{\xi}} \cdot u'_{\eta} + \dfrac{5}{2\xi\eta}$ – канонический вид уравнения гиперболического типа.

Пример 3.2. Привести к каноническому виду уравнение

$$(1-y)\cdot u''_{xy}+u''_{xx}+\frac{(1-y)^2}{4}u''_{yy}=0.$$

Решение. Здесь $a=1$, $b=\dfrac{1-y}{2}$, $c=\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2$, тогда

$$b^2-ac=\left(\frac{1-y}{2}\right)^2-\left(\frac{1-y}{2}\right)^2=0;$$

следовательно, имеем уравнение параболического типа.

Составляем уравнение характеристик:

$$(dy)^2-2\cdot\frac{(1-y)}{2}dxdy+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2(dx)^2=0.$$

Разделим на $(dx)^2$, и, учитывая, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$(y')^2-2\cdot\frac{(1-y)}{2}y'+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(y'-\frac{1-y}{2}\right)^2=0\quad\Rightarrow\quad y'+\frac{y-1}{2}=0;$$

Разделяя переменные и интегрируя,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y-1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{y-1}=-\frac{1}{2}dx\quad\Rightarrow\quad\int\frac{dy}{y-1}=-\frac{1}{2}\int dx+\ln C\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\ln|y-1|=-\frac{x}{2}+\ln C\quad\Rightarrow\quad y-1=e^{-\frac{x}{2}+\ln C},\quad y-1=e^{-\frac{x}{2}}\cdot C$$

имеем $(y-1)\cdot e^{x/2}=C$.

Введём новые переменные по формулам $\xi=(y-1)\cdot e^{x/2}$, $\eta=y-1$ (функцию $\eta(x,y)$ выбрали произвольно так, чтобы она была линейно независима с $\xi(x,y)$).

Выразим частные производные u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{xy} по переменным x, y через частные производные по новым переменным ξ,η по формулам (3.3) – (3.6):

$$u''_{xx}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_x)^2+u'_\xi\cdot\xi''_{xx}+2u''_{\xi\eta}\cdot\eta'_x\xi'_x+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_x)^2+u'_\eta\cdot\eta''_{xx}=$$

$$=\left|\begin{array}{lll}\xi=(y-1)\cdot e^{x/2}\quad\Rightarrow & \xi'_x=\frac{1}{2}(y-1)\cdot e^{x/2}, & \xi''_{xx}=\frac{1}{4}(y-1)\cdot e^{x/2}\\ \eta=(y-1)\quad\Rightarrow & \eta'_x=0, & \eta''_{xx}=0\end{array}\right|=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{1}{2}(y-1)\cdot e^{x/2}\right)^2+u'_{\xi}\cdot\frac{1}{4}(y-1)\cdot e^{x/2}+2u''_{\xi\eta}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}(y-1)\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta}\cdot 0+u'_{\eta}\cdot 0=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}\cdot e^{x}+u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2};$$

$$u''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot(\xi'_y)^2+u'_{\xi}\cdot\xi''_{yy}+2u''_{\xi\eta}\cdot\eta'_y\cdot\xi'_y+u''_{\eta\eta}\cdot(\eta'_y)^2+u'_{\eta}\cdot\eta''_{yy}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\xi=(y-1)\cdot e^{x/2} & \Rightarrow & \xi'_y=1\cdot e^{x/2}, & \xi''_{yy}=0\\ \eta=(y-1) & \Rightarrow & \eta'_y=1, & \eta''_{yy}=0\end{matrix}\right|=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot\left(e^{x/2}\right)^2+u'_{\xi}\cdot 0+2u''_{\xi\eta}\cdot 1\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta}\cdot(1)^2+u'_{\eta}\cdot 0=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot e^{x}+2u''_{\xi\eta}\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta};$$

$$u''_{xy}=u''_{\xi\xi}\cdot\xi'_x\cdot\xi'_y+u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_x\cdot\eta'_y+u''_{\xi\eta}\cdot\xi'_y\cdot\eta'_x+u''_{\eta\eta}\cdot\eta'_x\cdot\eta'_y+u'_{\xi}\cdot\xi''_{xy}+u'_{\eta}\cdot\eta''_{xy}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\xi=(y-1)\cdot e^{x/2}\Rightarrow\xi'_x=\dfrac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2},\ \xi''_{xx}=\dfrac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2},\\ \xi'_y=e^{x/2},\quad \xi''_{yy}=0,\ \xi''_{xy}=\dfrac{e^{x/2}}{2};\\ \eta=(y-1)\quad\Rightarrow\quad\eta'_x=0,\quad\eta''_{xx}=0,\quad\eta'_y=1,\quad\eta''_{yy}=0,\quad\eta''_{xy}=0\end{matrix}\right|=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2}\cdot e^{x/2}+u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2}\cdot 1+$$

$$+u''_{\xi\eta}\cdot e^{x/2}\cdot 0+u''_{\eta\eta}\cdot 0\cdot 1+u'_{\xi}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{x/2}+u'_{\eta}\cdot 0=$$

$$=u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x}+u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2}+\ u'_{\xi}\cdot\frac{e^{x/2}}{2}.$$

Таким образом,

$$u''_{xx}=u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}\cdot e^{x}+u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2},$$

$$u''_{yy}=u''_{\xi\xi}\cdot e^{x}+2u''_{\xi\eta}\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{xy}=u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x}+u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2}+\ u'_{\xi}\cdot\frac{e^{x/2}}{2}.$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение найденные для вторых частных производных выражения, получим:

$$(1-y)\cdot\left(u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x}+u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)}{2}\cdot e^{x/2}+\ u'_{\xi}\cdot\frac{e^{x/2}}{2}\right)+$$

$$+u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}\cdot e^{x}+u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2}+\frac{(1-y)^2}{4}\cdot\left(u''_{\xi\xi}\cdot e^{x}+2u''_{\xi\eta}\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta}\right)=0.$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$\underline{-u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{2}\cdot e^{x}}\underline{\underline{-u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)^2}{2}\cdot e^{x/2}}}-\ u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)e^{x/2}}{2}\underline{+u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}\cdot e^{x}}+$$

$$+u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2}\underline{+u''_{\xi\xi}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}\cdot e^{x}}\underline{\underline{+u''_{\xi\eta}\cdot\frac{(y-1)^2}{2}\cdot e^{x/2}}}+u''_{\eta\eta}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}=0.$$

После сокращения подчёркнутых слагаемых получаем:

$$-\ u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)e^{x/2}}{2}+u'_{\xi}\cdot\frac{(y-1)}{4}\cdot e^{x/2}+u''_{\eta\eta}\cdot\frac{(y-1)^2}{4}=0,$$

$$u''_{\eta\eta}\cdot(y-1)^2=u'_{\xi}\cdot(y-1)e^{x/2}\quad\text{или}\quad\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot(y-1)^2=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot(y-1)\cdot e^{x/2}.$$

Учитывая, что $\xi=(y-1)\cdot e^{x/2}$, $\eta=y-1$, получаем:

$$\eta^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\xi\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi},$$

т. е. уравнение приведено к каноническому виду.

Ответ: $\eta^2\cdot u''_{\eta\eta}=\xi\cdot u'_{\xi}$ – канонический вид уравнения параболического типа.

Пример 3.3. Привести к каноническому виду уравнение

$$u''_{xx}-2\cdot u''_{xy}+2\cdot u''_{yy}+4u'_{x}-7u'_{y}-2u=(y+x)^2.$$

Решение. $\underline{u''_{xx}-2\cdot u''_{xy}+2\cdot u''_{yy}}+4u'_{x}-7u'_{y}-2u=(y+x)^2$.

Здесь $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $b^2-ac=-1<0$, следовательно, имеем уравнение эллиптического типа.

Составляем уравнение характеристик:

$$(dy)^2+2\cdot dxdy+2\cdot(dx)^2=0,$$

разделим на $(dx)^2$ и, учитывая, что $y'=\dfrac{dy}{dx}$ получаем:

$$(y')^2+2\cdot y'+2=0,$$

Введём замену $t=y'$ и получим квадратное уравнение:

$$t^2+2t+2=0.$$

Дискриминант: $D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 = (2i)^2$.

Корни квадратного уравнения $t_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$.

Отсюда

$$y' = -1 + i \text{ или } y' = -1 - i.$$

Интегрируем:

1) $y = (-1 + i)\int dx + C_1 = (-1 + i)x + C_1 \Rightarrow \quad y = -x + ix = C_1$,

2) $y = (-1 - i)\int dx + C_2 = (-1 - i)x + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -x - ix = C_2$,

и получаем два семейства мнимых характеристик

$$(y + x) - ix = C_1 \quad \text{и} \quad (y + x) + ix = C_2.$$

Введём новые переменные по формулам $\xi = y + x$, $\eta = x$ (соответственно вещественная и мнимая части характеристик).

Выразим частные производные u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{xy} по переменным x, y через частные производные по новым переменным ξ, η по формулам (3.1) – (3.6):

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x = \left| \begin{array}{lll} \xi = y + x & \Rightarrow & \xi'_x = 1, \\ \eta = x & \Rightarrow & \eta'_x = 1 \end{array} \right| = u'_\xi \cdot 1 + u'_\eta \cdot 1 = u'_\xi + u'_\eta;$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot \xi'_y + u'_\eta \cdot \eta'_y = \left| \begin{array}{lll} \xi = y + x & \Rightarrow & \xi'_y = 1, \\ \eta = x & \Rightarrow & \eta'_y = 0 \end{array} \right| = u'_\xi \cdot 1 + u'_\eta \cdot 0 = u'_\xi;$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_x \xi'_x + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_\eta \cdot \eta''_{xx} =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} \xi = y + x & \Rightarrow & \xi'_x = 1, \quad \xi''_{xx} = 0 \\ \eta = x & \Rightarrow & \eta'_x = 1, \quad \eta''_{xx} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot 1^2 + u'_\xi \cdot 0 + 2u''_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u''_{\eta\eta} \cdot 1^2 + u'_\eta \cdot 0 = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta};$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + u'_\xi \cdot \xi''_{yy} + 2u''_{\xi\eta} \cdot \eta'_y \cdot \xi'_y + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + u'_\eta \cdot \eta''_{yy} =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} \xi = y + x & \Rightarrow & \xi'_y = 1, \quad \xi''_{yy} = 0 \\ \eta = x & \Rightarrow & \eta'_y = 0, \quad \eta''_{yy} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot 1^2 + u'_\xi \cdot 0 + 2u''_{\xi\eta} \cdot 0 \cdot 1 + u''_{\eta\eta} \cdot 0 + u'_\eta \cdot 0 = u''_{\xi\xi};$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \cdot \xi'_x \cdot \xi'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_y + u''_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \cdot \eta'_x + u''_{\eta\eta} \cdot \eta'_x \cdot \eta'_y + u'_\xi \cdot \xi''_{xy} + u'_\eta \cdot \eta''_{xy} =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} \xi = y + x & \Rightarrow & \xi'_x = 1, \quad \xi''_{xx} = 0, \quad \xi'_y = 1, \quad \xi''_{yy} = 0, \quad \xi''_{xy} = 0 \\ \eta = x & \Rightarrow & \eta'_x = 1, \quad \eta''_{xx} = 0, \quad \eta'_y = 0, \quad \eta''_{yy} = 0, \quad \eta''_{xy} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= u''_{\xi\xi} \cdot 1 \cdot 1 + u''_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 0 + u''_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u''_{\eta\eta} \cdot 1 \cdot 0 + u'_{\xi} \cdot 0 + u'_{\eta} \cdot 0 = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}.$$

Таким образом,

$$u'_x = u'_\xi + u'_\eta, \quad u'_y = u'_\xi,$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$
$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi},$$
$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}, \quad x + y = \xi.$$

Подставив в исходное дифференциальное уравнение найденные для вторых частных производных выражения, получим:

$$u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} - 2 \cdot (u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}) + 2 \cdot u''_{\xi\xi} + 4(u'_\xi + u'_\eta) + 7u'_\xi - 2u = \xi^2.$$

Раскрываем скобки и сокращаем подчеркнутые слагаемые:

$$u''_{\xi\xi} + \underline{\underline{2u''_{\xi\eta}}} + u''_{\eta\eta} - \underline{2 \cdot u''_{\xi\xi}} - \underline{\underline{2 \cdot u''_{\xi\eta}}} + \underline{2 \cdot u''_{\xi\xi}} + 4u'_\xi + 4u'_\eta + 7u'_\xi - 2u = \xi^2,$$

Получаем:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + 11u'_\xi + 4u'_\eta - 2u = \xi^2.$$

***Ответ*:** $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -11u'_\xi - 4u'_\eta + 2u + \xi^2$ – канонический вид уравнения эллиптического типа.

Глава 4. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4.1. Вывод уравнения колебаний струны

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и в определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени. Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. Натяжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длиной ℓ в начальный момент времени расположена вдоль оси x. Предположим, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = \ell$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, а потом предоставить самой себе или, не отклоняя, придать ее точкам некоторую скорость, или то и другое совместно, то точки струны будут совершать колебательное движение. В силу этого можно предполагать, что движение струны происходит перпендикулярно оси Ox (рис. 1) и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией

$u(x,t)$, которая даёт величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t.

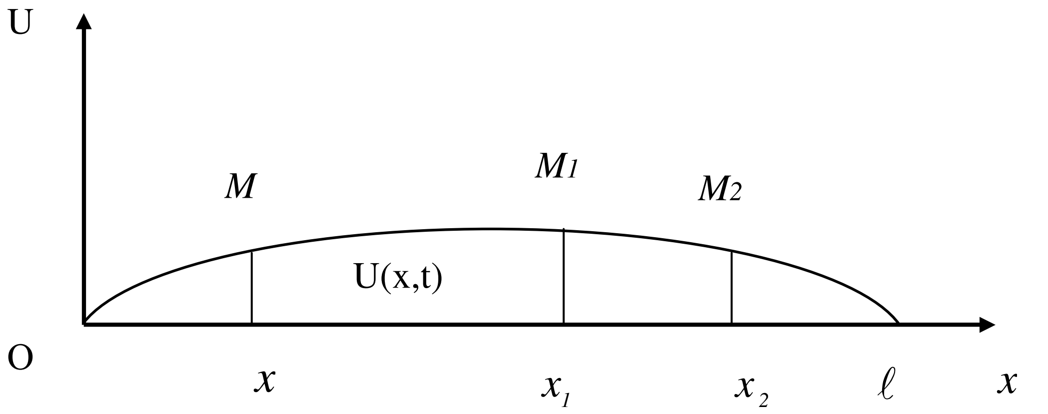


Рисунок 1

Так как мы рассматриваем малые отклонения струны в плоскости xOu, то будем предполагать, что длина элемента струны M_1M_2 равняется её проекции на ось Ox, т. е. $M_1M_2 = x_2 - x_1$. Также будем предполагать, что натяжение во всех точках струны одинаковое; обозначим его через T.

Рассмотрим элемент струны MM' (рис. 2). На концах этого элемента по касательной к струне действуют силы T.

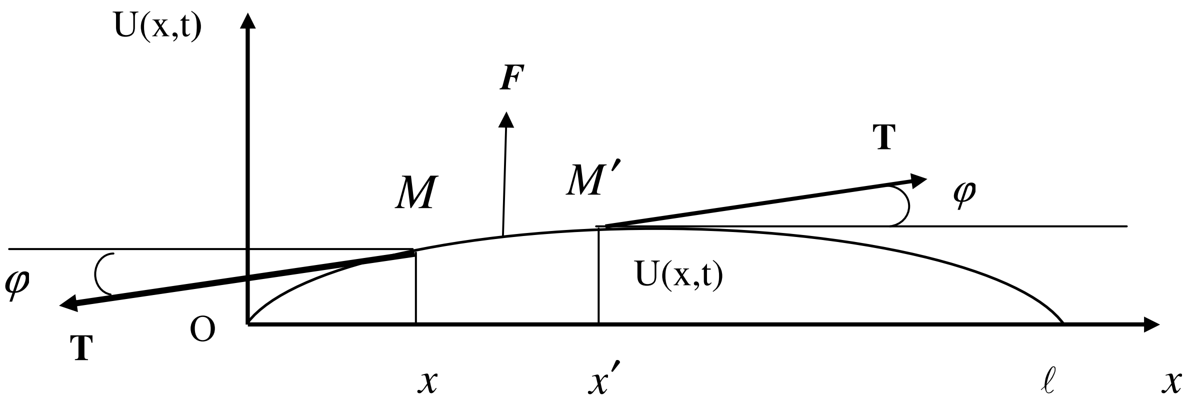


Рисунок 2

Пусть касательные образуют с осью Ox углы φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда проекция на ось Ou сил, действующих на элемент MM', будет равна $T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$, и мы будем иметь $T\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\sin\varphi \approx$

$$\approx T\operatorname{tg}(\varphi+\Delta\varphi) - T\operatorname{tg}\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] =$$

$$= T\frac{\partial^2 u(x+\theta\cdot\Delta x,t)}{\partial x^2}\cdot\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\cdot\Delta x,\ 0<\theta<1,$$

(здесь мы применили формулу конечных приращений Лагранжа к выражению, стоящему в квадратных скобках).

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции. Пусть ρ – линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho\cdot\Delta x$. Ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, по принципу Даламбера будем иметь:

$$\rho\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\Delta x.$$

Сокращая на Δx и обозначая $\frac{T}{\rho}=a^2$, получаем уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Это и есть волновое уравнение – ***уравнение колебаний струны***. Для полного определения движения струны одного полученного уравнения недостаточно. Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять еще граничным условиям, указывающим, что делается на концах струны ($x=0$ и $x=l$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент $(t=0)$. Совокупность граничных и начальных условий называется краевыми условиями.

4.2. Решение уравнения колебаний струны методом разделения переменных

Метод разделения переменных (или ***метод Фурье*)**, который мы рассмотрим, является типичным для решения многих задач математической физики.

Пусть требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0,t)=0, \tag{4.2}$$

$$u(l,t)=0, \tag{4.3}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{4.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \tag{4.5}$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям (4.2) и (4.3), в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, из которых первая зависит только от x, а вторая только от t:

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t). \tag{4.6}$$

Подставляя в уравнение (4.1) получаем:

$$X(x)\cdot T''(t) = a^2 X''(x)\cdot T(t),$$

разделив члены равенства на $a^2 X\cdot T$, запишем:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''^2}{X}\ . \tag{4.7}$$

В левой части этого равенства стоит функция, которая не зависит от x, а в правой – функция, не зависящая от t. Равенство (4.7) возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т.е. равны постоянному числу. Обозначим его через $-\lambda$, где $\lambda > 0$ (позднее будет рассмотрен случай когда $\lambda < 0$). Итак:

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda\,.$$

Из этих равенств получаем два уравнения:

$$X'' + \lambda\cdot X = 0, \tag{4.8}$$

$$T'' + a^2\lambda\cdot T = 0. \tag{4.9}$$

Общие решения этих уравнений будут иметь вид:

$$X(x) = A\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + B\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right), \tag{4.10}$$

$$T(t) = C\cdot\cos\left(a\cdot\sqrt{\lambda}\cdot t\right) + D\cdot\sin\left(a\cdot\sqrt{\lambda}\cdot t\right). \tag{4.11}$$

где A, B, C и D – произвольные постоянные.

Подставляя выражения $X(x)$ и $T(t)$ в (4.6), получим:

$$u(x,t) = \left(A\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right) + B\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot x\right)\right)\left(C\cdot\cos\left(a\cdot\sqrt{\lambda}\cdot t\right) + D\cdot\sin\left(a\cdot\sqrt{\lambda}\cdot t\right)\right).$$

Подберём теперь постоянные A и B так, чтобы выполнялись условия (4.2) и (4.3). Так как $T(t)\neq 0$ (в противном случае будет $u(x,t)\equiv 0$, что противоречит поставленному условию), то функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям (4.2) и (4.3), т. е. должно быть $X(0)=0$ и $X(l)=0$. Подставляя значения $x=0$ и $x=l$ в равенство (4.10), на основании (4.2) и (4.3) получаем:

$$0 = A\cdot 1 + B\cdot 0,\quad 0 = A\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) + B\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right).$$

Из первого уравнения находим $A = 0$. Из второго уравнения следует:

$$B\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) = 0.$$

$B\neq 0$, так как в противном случае было бы $X\equiv 0$ и $u\equiv 0$, что противоречит условию. Следовательно, должно быть:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right) = 0,$$

Откуда:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n \cdot \pi}{l} \quad (n = 1,2,3,...), \tag{4.12}$$

Итак, мы получили:

$$X = B \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x\right), \tag{4.13}$$

Найденные значения λ называются собственными значениями для данной краевой задачи. Соответствующие им функции $X(x)$ называются собственными функциями.

Замечание. Если бы мы взяли в место $-\lambda$ выражение $\lambda = k^2$, то уравнение (4.8) приняло бы вид:

$$X'' - k^2 \cdot X = 0.$$

Общее решение этого уравнения:

$$X(x) = A \cdot e^{k \cdot x} + B \cdot e^{-k \cdot x}.$$

Отличное от нуля решение в такой форме не может удовлетворять граничным условиям (4.2) и (4.3).

Зная $\sqrt{\lambda}$, мы, пользуясь равенством (4.11), можем записать

$$T(t) = C \cdot \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) + D \cdot \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right) \quad (n = 1,2,3,...). \tag{4.14}$$

Для каждого значения n, следовательно, для каждого λ, выражения (4.13) и (4.14) подставляем в равенство (4.6) и получаем решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям (4.2) и (4.3). Это решение обозначим $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cdot \left(C_n \cdot \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) + D_n \cdot \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right)\right). \tag{4.15}$$

Для каждого значения n мы можем брать свои постоянные C и D и потому пишем C_n и D_n (постоянная B включена в C_n и D_n). Так как уравнение (4.1) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, и значит функция, представленная рядом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

или

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cdot \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) + D_n \cdot \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \tag{4.16}$$

также будет решением дифференциального уравнения (4.1), которое будет удовлетворять граничным условиям (4.2) и (4.3). Очевидно, что ряд (4.16) будет решением уравнения (4.1) только в том случае, если коэффициенты C_n и D_n таковы, что этот ряд сходится, и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по x и по t.

Решение (4.16) должно еще удовлетворять начальным условиям (4.4) и (4.5). Этого мы будем добиваться путём подбора постоянных C_n и D_n. Подставляя в равенство (4.16) значение $t = 0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \tag{4.17}$$

Если функция $\varphi(x)$ такова, что в интервале $(0, l)$ её можно разложить в ряд Фурье, то условие (4.17) будет выполняться, если положить

$$C_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \tag{4.18}$$

Далее, дифференцируем члены равенства (4.16) по t и подставляем $t = 0$. Из условия (4.5) получается равенство:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cdot \frac{an\pi}{l} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда:

$$D_n \cdot \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx,$$

или

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \cdot \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx. \tag{4.19}$$

Итак, мы доказали, что ряд (4.16), где коэффициенты C_n и D_n определены по формулам (4.18) и (4.19), допускает двукратное почленное дифференцирование, представляет функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (4.1) и удовлетворяет граничным и начальным условиям (4.2) – (4.5).

Пример 4.1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке (задача о колебаниях ограниченной струны) методом Фурье

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad u''_{tt} = u''_{xx} \tag{1}$$

начальные условия

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x(1-x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

краевые условия

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=1} = 0 \tag{3}$$

Решение. Применим метод Фурье, т.е. решение $u = u(x;t)$ будем искать в виде:

$$u(x;t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

где $X(x)$ – функция только от переменной x; $T(t)$ – функция только от t.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$X(x)\cdot T''(t) = X''(x)\cdot T(t).$$

Приведем уравнение к следующему виду:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Левая часть данного равенства зависит только от переменной *t*, а правая только от переменной *x*, а равенство верно $\forall x, \forall t$, что возможно лишь тогда, когда обе части не зависят ни от *x*, ни от *t*, т.е. равны константе:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const$$

Из получившего равенства имеем два уравнения:

$$T''(t) - cT(t) = 0 \tag{5}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0 \tag{6}$$

Эти уравнения являются линейными однородными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ).

Решим ЛОДУ (6)

$$X''(x) - cX(x) = 0.$$

Из краевых условий (3) следует

$$\begin{cases} u(x,t)\big|_{x=0} = X(0)\cdot T(t) = 0, \\ u(x,t)\big|_{x=1} = X(1)\cdot T(t) = 0. \end{cases}$$

Поскольку мы ищем нетривиальное решение: $u(x,t) \neq 0$, то

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Характеристическое уравнение ЛОДУ (6) имеет вид:

$$k^2 - c = 0,$$

следовательно, $k^2 = c$.

Рассмотрим три случая: $c = \lambda^2$, $c = 0$, $c = -\lambda^2$ (т.е. когда $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$).

1) Если $c = \lambda^2$, то корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm\lambda$, $\lambda \in R$. Следовательно, общее решение ЛОДУ (6) имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

Из условий (7) следует:

$$\begin{cases} C_1e^{-0}+C_2e^{0}=0, \\ C_1e^{-\lambda}+C_2e^{\lambda}=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{-\lambda}+C_2e^{\lambda}=0, \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\lambda} & e^{\lambda} \end{vmatrix}=e^{\lambda}-e^{-\lambda}\neq 0 \Rightarrow$ по правилу Крамера система имеет единственное решение: $C_1=0,\ C_2=0$ (однородная система всегда имеет тривиальное: нулевое решение) $\Rightarrow X(x)=0$.

2) Если $c=0 \Rightarrow$ корни характеристического уравнения действительны и равны $k_1=k_2=0 \Rightarrow$ общее решение $X(x)=C_1+C_2x$.

Из условий (7) следует:

$$\begin{cases} C_1+C_2\cdot 0=0, \\ C_1+C_2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0, \\ C_2=0, \end{cases} \Rightarrow$$

имеем тривиальное решение $X(x)=0$.

3) Если $c=-\lambda^2 \Rightarrow$ корни характеристического уравнения комплексные $k_{1,2}=\pm\lambda i \Rightarrow$ общее решение $X(x)=C_1\cdot\cos\lambda x+C_2\cdot\sin\lambda x$

Из условий (7) следует:

$$\begin{cases} C_1\cdot\cos 0+C_2\cdot\sin 0=0, \\ C_1\cdot\cos\lambda+C_2\cdot\sin\lambda=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0, \\ C_1\cdot\cos\lambda+C_2\cdot\sin\lambda=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=0, \\ C_2\cdot\sin\lambda=0. \end{cases}$$

Т.к. $C_1=0$, то $X(x)=C_2\cdot\sin\lambda x$ и ищем нетривиальное решение, то $C_2\neq 0$. Следовательно,

$$\sin\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\pi n, \text{ где } n=\pm1,\pm2,\ldots\ (n\neq 0, \text{ т.к. } \lambda\neq 0).$$

Таким образом, имеем *собственные числа*

$$\lambda_n=\pi n\ \ (n=\pm1,\pm2,\ldots).$$

Каждая функция:

$$X_n(x)=A_n\sin(\pi n x)\ \ (n=1,2,3,\ldots)$$

где $A_n=const$ (к ней отнесём знак) является решением уравнения (6).

Решим ЛОДУ (5):

$$T''(t)-c\cdot T(t)=0.$$

Т.к. мы ищем нетривиальное решение, то:

$$c^2=-\lambda^2=-n^2\pi^2,$$

тогда уравнение (5) примет вид:

$$T''(t)+n^2\pi^2\cdot T(t)=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + n^2\pi^2 = 0$$

имеет мнимые корни $k_{1,2} = \pm\pi n \cdot i$.

Поэтому общее решение ЛОДУ (5) примет вид:

$$T_n(t) = B_n \cos(\pi\, n\, t) + D_n \sin(\pi\, n\, t), \quad n = 1,2,3,...$$

где B_n, D_n, – произвольные постоянные.

Тогда:

$$\begin{gathered} u_n(x;t) = X_n(x)T_n(t) = \\ = \left(B_n \cos(\pi\, n\, t) + D_n \sin(\pi\, n\, t)\right) \cdot A_n \sin(\pi\, n\, x) = \\ = \left(a_n \cos(\pi\, n\, t) + b_n \sin(\pi\, n\, t)\right) \cdot \sin(\pi\, n\, x), \end{gathered}$$

где $a_n = B_n A_n$, $b_n = D_n A_n$.

Каждая функция $u_n(x;t)$ является решением уравнения (1) и называется собственной функцией этого уравнения, а колебания, определяемые его, называются собственными колебаниями.

Составим ряд из функции $u_n(x;t)$, функция:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\, n\, x) \cdot \left(a_n \cos(\pi\, n\, t) + b_n \sin(\pi\, n\, t)\right),$$

является решением ДУ (1), причем удовлетворяет краевым условиям (3).

Коэффициент ряда a_n, b_n выберем так, чтобы сумма – функция $u(x;t)$ удовлетворяла начальным условиям (2).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\, n\, x) \cdot \pi\, n\left(-a_n \sin(\pi\, n\, t) + b_n \cos(\pi\, n\, t)\right).$$

$$\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\pi\, n\, x) = x(1-x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi\, n\, b_n \cdot \sin(\pi\, n\, x) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, записано разложения функций в ряд Фурье по синусам на промежутке $[0,1]$.

Коэффициенты ряда Фурье определяются формулами:

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x(1-x)\sin(\pi n x)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\sin(\pi n x)\,dx =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u = x - x^2 & du = (1-2x)dx \\ dv = \sin(\pi n x)dx & v = \int \sin(\pi n x)dx = -\dfrac{\cos(\pi n x)}{\pi n} \end{array}\right| =$$

$$= u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du = \left| \text{формула интегриров ания по частям} \right| =$$

$$= -2\left(x - x^2\right) \cdot \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos(\pi n x) \cdot (1-2x)dx =$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos(\pi n x) \cdot (1-2x)dx = \left|\begin{array}{ll} u = (1-2x) & du = -2dx \\ dv = \cos(\pi n x)dx & v = \dfrac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[(1-2x) \cdot \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\Bigg|_0^1 + \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin(\pi n x)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\Bigg|_0^1\right] = \left|\begin{array}{l} \sin(\pi n) = 0 \\ \cos(\pi n) = (-1)^n \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2}{(\pi n)^2} \cdot \left(\cos(\pi n) - 1\right)\right] = \frac{4}{(\pi n)^3} \cdot \left(1 - (-1)^n\right);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n \cdot 1}\int_0^1 0 \cdot \sin(\pi n x)dx = 0\,.$$

Таким образом, общее решение ДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям (3) имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1 - (-1)^n\right) \cdot \sin(\pi n x) \cdot \cos(\pi n t) =$$

$$= \frac{8}{\pi^3}\left(\sin \pi x \cdot \cos \pi t + \frac{1}{27}\sin 3\pi x \cdot \cos 3\pi t + \frac{1}{125}\sin 5\pi x \cdot \cos 5\pi t + \ldots\right)$$

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi^3} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}\left(1 - (-1)^n\right) \cdot \sin(\pi n x) \cdot \cos(\pi n t)$.

Пример 4.2. Струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент форму параболы $u = \left(\dfrac{4h}{l^2}\right) \cdot x(l - x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

Решение. Иными словами, требуется решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

удовлетворяющее граничным и начальным условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \left(\frac{4h}{l^2}\right) \cdot x(l-x) = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 = \psi(x).$$

Решение будем искать в виде ряда по формуле (4.16)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cdot \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + D_n \cdot \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Находим коэффициенты по формулам (4.18) и (4.19):

$$C_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx =$$

$$= \frac{8h}{l^3} \cdot \int_0^l \left(lx - x^2\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\ D_n = 0.$$

Для нахождения коэффициентов C_n дважды интегрируем по частям:

$$C_n = \frac{8h}{l^3} \cdot \int_0^l \left(lx - x^2\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = lx - x^2 & du = (l-2x)dx \\ v = \int \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = -\frac{l}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) & \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{8h}{l^3}\left(lx - x^2\right) \cdot \frac{l}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l + \frac{8h}{n\pi l^2}\int_0^l (l-2x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = l - 2x & du = -2dx \\ v = \int \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \frac{l}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2 l} \cdot (l-2x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l + \frac{16h}{n^2\pi^2 l}\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx =$$

$$= -\frac{16h}{n^3\pi^3} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\Big|_0^l = -\frac{16h}{n^3\pi^3} \cdot (\cos n\pi - 1) = \frac{16h}{n^3\pi^3} \cdot \left[1 - (-1)^n\right].$$

Подставляя выражения для C_n и D_n в (4.16), получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16h}{n^3\pi^3}\cdot\left[1-(-1)^n\right]\cdot\cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right).$$

Но если $n=2k$, то $1-(-1)^n=0$, а если $n=2k+1$, то $1-(-1)^n=2$.

Поэтому окончательно имеем

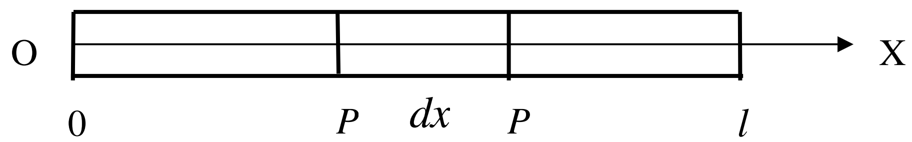
$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)^3}\cdot\cos\left(\frac{a(2k+1)\pi}{l}t\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)\right).$$

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)^3}\cdot\cos\left(\frac{a(2k+1)\pi}{l}t\right)\cdot\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)\right).$

4.3. Продольные колебания стержня. Метод Даламбера

Рассмотрим однородный стержень длины l, при этом поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной. Для изгибания стержня необходимо приложить усилие. Ограничимся исследованием только таких усилий, при которых поперечные колебания перемещаясь вдоль оси стержня остаются плоскими и параллельными друг другу.

Если стержень несколько растянуть или сжать вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось OX вдоль оси стержня и будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках $x=0$ и $x=l$. Пусть $x-$ абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое.



Обозначим через $u(x,t)$ смещение этого сечения в момент времени t; тогда смещенное сечение с абсциссой $x+dx$ будет равно $u+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx$. А относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x выражается производной $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$. Считая, что стержень совершает малые колебания, можно вычислить в этом сечении натяжения T. Действительно, применяя закон Гука, найдём, что $T=ES\dfrac{\partial u}{\partial x}$, где E- модуль упругости материала стержня, а $S-$площадь поперечного сечения. На элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами x и $x+dx$ действуют силы натяжения T_x и T_{x+dx}, направленные вдоль оси OX; их результирующая $T_{x+dx} - T_x = ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \approx ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ также направлена вдоль оси OX. С другой стороны, ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Согласно второму закону Ньютона $\rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $\rho -$ объемная плоскость стержня. Положив $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, получим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Форма этого уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причём скорость распространения продольных волн равна $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Метод Даламбера

Рассматривая свободные колебания струны, мы должны решить однородное уравнение: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

при начальных условиях:

$$\left.u\right|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x),$$

где функция $f(x)$ и $F(x)$ заданы на всей числовой оси. Такая задача называется задачей с начальными условиями или задачей Коши. Эту задачу можно решить методом бегущих волн. Общее решение уравнения имеет вид:

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at),$$

где φ и ψ предполагаются дважды дифференцируемыми.

Подобрав функции φ и ψ так, чтобы функция $u = u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям, приходим к решению исходного дифференциального уравнения:

$$u = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$$

Пример

Найти решение уравнения: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $\left.u\right|_{t=0} = x$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$

Решение. Так как $a = 1$, а $F(x) = 0$, то

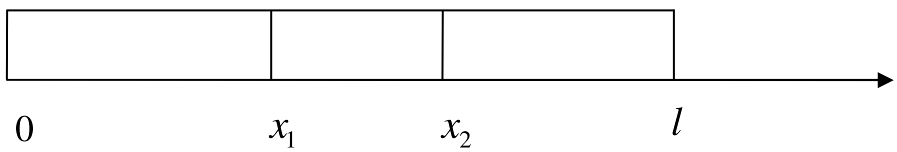
$$u = \frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}, \text{ где } u = \frac{x-t+x+t}{2}, \text{ или окончательно } u = x.$$

Ответ: $u = x$.

Глава 5. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5.1. Вывод уравнения распространения тепла в стержне

Рассмотрим однородный стержень длины l. Будем предполагать, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и что во всех точках поперечного сечения стержня температура одинакова. Изучим процесс распространения тепла в стержне.



Расположим ось Ox так, что один конец стержня будет совпадать с точкой $x = 0$, а другой – с точкой $x = l$. Пусть $u(x,t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент t. Опытным путем установлено, что скорость распространения тепла, т. е. количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой x за единицу времени, определяется формулой:

$$q = -k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot S, \tag{5.1}$$

где S – площадь сечения рассматриваемого стержня, k – коэффициент теплопроводности.

Рассмотрим элемент стержня, заключенный между сечениями с абсциссами x_1 и x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta x$). Учитывая, что скорость распространения тепла определяется по формуле:

$$q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

количество тепла прошедшего через сечение с абсциссой x_1 за время Δt, будет равно:

$$\Delta Q_1 = -k \cdot \frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t, \tag{5.2}$$

то же самое для сечения с абсциссой x_2:

$$\Delta Q_2 = -k \cdot \frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t. \tag{5.3}$$

Приток тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в элемент стержня за время Δt будет равняться:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\cdot\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\cdot S\cdot\Delta t\right] - \left[-k\cdot\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x}\cdot S\cdot\Delta t\right] \approx$$

$$\approx k\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\Delta x\cdot S\cdot\Delta t \qquad (5.4)$$

(мы применили теорему Лагранжа к разности $\frac{\partial u(x_2,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}$).

Этот приток тепла за время Δt расходовался на повышение температуры элемента стержня на величину Δu:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\cdot\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\Delta u,$$

или

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\cdot\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\Delta t, \qquad (5.5)$$

где c – теплоемкость вещества стержня, ρ – плотность вещества стержня ($\rho\cdot\Delta x\cdot S$ – масса элемента стержня).

Приравнивая выражения (5.4) и (5.5) одного и того же количества тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, получим:

$$k\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\Delta x\cdot S\cdot\Delta t = c\cdot\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\Delta t,$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\cdot\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначая $\frac{k}{c\rho} = a^2$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5.6)$$

Это и есть уравнение распространения тепла (***уравнение теплопроводности***) в однородном стержне.

Чтобы решение уравнения (5.6) было вполне определенно, функция $u(x,t)$ должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим физическим условиям задачи. Краевые условия для решения уравнения (5.6) могут быть различные. Условия, которые соответствуют так называемой первой краевой задаче для $0 \le t \le T$, следующие:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (5.7)$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), \qquad (5.8)$$

$$u(l,t) = \psi_2(t). \qquad (5.9)$$

Физически условие (5.7) (*начальное условие*) соответствует тому, что при $t = 0$ в различных сечениях стержня задана температура, равная $\varphi(x)$. Условия

(5.8) и (5.9) (*граничные условия*) соответствуют тому, что на концах стержня при $x=0$ и при $x=l$ поддерживается температура, равная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно.

5.2. Распространение тепла в ограниченном стержне

Если стержень совпадает с осью Ox, то математическая задача формулируется следующим образом. Найти решение уравнения

$$u_t' = a^2 \cdot u_{xx}'' \tag{5.6}$$

в области $0 < x < l$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{5.7}$$

и краевым условиям

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{5.9}$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) частное решение уравнения (5.6), удовлетворяющее условиям (5.7) и (5.9), в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, из которых первая зависит только от x, а вторая только от t:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{5.10}$$

Подставляя в уравнение (1), получаем $X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$ и, разделив члены равенства на $a^2 XT$,

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Данное равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т.е. равны постоянной величине.

Итак,

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{5.11}$$

Постоянную величину обозначили $-\lambda^2$, так как по смыслу задачи $T(t)$ должно быть ограниченным при любом t, если $\varphi(x)$ ограничена, то T'/T должно быть отрицательным.

Из (5.11) получаем два уравнения:

$$T' + a^2\lambda^2 \cdot T = 0, \tag{5.12}$$

$$X'' + \lambda^2 \cdot X = 0. \tag{5.13}$$

Решая их, найдем

$$T = C \cdot e^{-a^2\lambda^2 t}, \tag{5.14}$$

$$X = A \cdot \cos\lambda x + B \cdot \sin\lambda x. \tag{5.15}$$

Подставляя в (5.10), получаем

$$u(x,t) = C \cdot e^{-a^2\lambda^2 t}\left(A \cdot \cos\lambda x + B \cdot \sin\lambda x\right).$$

Подберем теперь постоянные A и B так, чтобы удовлетворялись условия (5.9). Так как $T(t) \neq 0$ (в противном случае будет $u(x,t) \equiv 0$, что противоречит поставленному условию), то функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям (5.9), т.е. должно быть $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$. Подставляя значения $x = 0$ и $x = l$ в равенство (5.15), на основании (5.9) получаем:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \qquad 0 = A \cdot \cos \lambda l + B \cdot \sin \lambda l .$$

Из первого уравнения находим $A = 0$. Из второго уравнения следует:

$$B \cdot \sin \lambda l = 0 .$$

$B \neq 0$, так как в противном случае было бы $X \equiv 0$ и $u \equiv 0$, что противоречит условию. Следовательно, должно быть:

$$\sin \lambda l = 0 ,$$

откуда:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \; (n = 1,2,...). \tag{5.16}$$

Итак, мы получили:

$$X = B \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x . \tag{5.17}$$

Найденные значения λ называются собственными значениями для данной краевой задачи. Соответствующие им функции $X(x)$ называются собственными функциями.

Зная, λ мы, пользуясь равенством (5.14), можем написать:

$$T(t) = C \cdot e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} t} \; (n = 1,2,...). \tag{5.18}$$

Для каждого значения n, следовательно, для каждого λ, выражения (5.17) и (5.18) подставляем в равенство (5.10) и получаем решение уравнения (5.6), удовлетворяющее граничным условиям (5.9).

Это решение обозначим $u_n(x,t)$:

$$u_n(x,t) = e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} t} \cdot B_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x . \tag{5.19}$$

(Постоянная C включена в B_n).

Так как уравнение (5.6) линейное и однородное, то сумма решений также является решением, и поэтому функция, представленная рядом:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) ,$$

или

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2} t} \cdot B_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x , \tag{5.20}$$

также будет решением дифференциального уравнения (1), которое будет удовлетворять граничным условиям (5.9). Очевидно, ряд (5.20) будет решением уравнения (5.6) только в том случае, если коэффициенты B_n таковы, что этот ряд сходится, и сходятся ряды, получающиеся после двукратного почленного дифференцирования по x и по t.

Решение (5.20) должно еще удовлетворять начальному условию (5.7). Этого мы будем добиваться путем подбора постоянных B_n. Подставляя в равенство (5.20) $t=0$ получим:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{5.21}$$

Если функция $\varphi(x)$ такова, что в интервале $(0,l)$ ее можно разложить в ряд Фурье, то условие (5.21) будет выполняться, если положить:

$$B_{\text{n}}=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \tag{5.22}$$

Итак, мы доказали, что ряд (5.20), где коэффициенты B_n определены по формуле (5.22), если он допускает двукратное почленное дифференцирование, представляет функцию $u(x,t)$, которая является решением уравнения (5.6) и удовлетворяет граничным и начальным условиям (5.7), (5.9).

Пример 5.1. *Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{или} \quad u_t'=8\cdot u_{xx}'' \tag{1}$$

начальное условие

$$u(x,0)=20\sin(2\pi x)+7\sin(3\pi x) \tag{2}$$

краевые условия

$$u(0,t)=u(6,t)=0. \tag{3}$$

Решение. Введем новую переменную τ по формуле

$$\tau=8t \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot 8,$$

тогда ДУ (1)

$$8\frac{\partial u}{\partial \tau}=8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Начальные условия и краевые условия не изменятся, т.к. $\tau=0$ при $t=0$, а условия (3) от τ не зависят.

Таким образом, решаем ДУ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1'}$$

с начальными условиями

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0}=20\sin(2\pi x)+7\sin(3\pi x) \tag{2'}$$

и краевыми условиями (3) методом Фурье: решение $u = u(x;t)$ будем искать в виде

$$u(x,\tau) = X(x)\cdot T(\tau) \tag{4}$$

где $X(x)$, $T(\tau)$ – функция только от переменной x, от τ соответственно.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = X(x)\cdot T'(\tau), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\cdot T(\tau).$$

ДУ (1') примет вид:

$$X(x)\cdot T'(\tau) = X''(x)\cdot T(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}.$$

Левая часть данного равенства зависит только от переменной x, а правая только от τ; последние равенство должно выполнятся при $\forall x, \forall t$, что возможно лишь тогда, когда обе части равны константе:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = c.$$

Из получившего равенства имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'(\tau) - c\cdot T(\tau) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) - c\cdot X(x) = 0. \tag{6}$$

Решим уравнение (5), которое является ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} = c\cdot T(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{dT(\tau)}{T(\tau)} = c\cdot d\tau,$$

Проинтегрируем: $\displaystyle\int \frac{dT(\tau)}{T(\tau)} = c\int d\tau + \ln C_1 \quad \Rightarrow$

$$\ln|T(\tau)| = c\tau + \ln C_1 \;\Rightarrow\; T(\tau) = e^{c\tau + \ln C_1} = C_1 e^{c\tau}.$$

Поскольку температура не может неограниченно возрастать с течением времени (источники тепла отсутствуют), то функция $T(\tau)$ обладает тем же свойством. Следовательно, в последней формуле c может быть только отрицательным, т.е. $c = -\lambda^2$ $(\lambda \neq 0)$.

Тогда имеем общее решение ДУ (5)

$$T(\tau) = C_1 e^{-\lambda^2 \tau}$$

и уравнение (6) с учетом $c = -\lambda^2$ запишется в виде:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

С учетом краевых условий:

$$u(x,\tau)\big|_{x=0} = X(0)\cdot T(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0,$$

$$u(x,\tau)\big|_{x=6} = X(6)\cdot T(\tau)=0 \quad\Rightarrow\quad X(6)=0,$$

получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \\ X(0)=X(6)=0. \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$k^2+\lambda^2=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\pm\, i\lambda .$$

Тогда общее решение ДУ (6)

$$X(x)=\alpha\cdot\cos(\lambda x)+\beta\cdot\sin(\lambda x).$$

Найдем α, β из условий:

$$\begin{cases} X(0)=\alpha\cdot\cos(0)+\beta\cdot\sin(0)=0, \\ X(6)=\alpha\cdot\cos(6\lambda)+\beta\cdot\sin(6\lambda)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0, \\ \beta\cdot\sin(6\lambda)=0. \end{cases}$$

Т.к. α,β не могут одновременно быть равными нулю, то:

$$\begin{cases} \alpha=0, \\ \sin(6\lambda)=0,\ \lambda\neq 0. \end{cases}$$

Решение ДУ (6):

$$X(x)=\beta\cdot\sin(\lambda x), \qquad 6\lambda=\pi n,\ n=1,2,...$$

Получаем:

$$X_n(x)=\beta_n\cdot\sin(\lambda_n x),\ \ \lambda_n=\frac{\pi n}{6} \qquad n=1,2,...$$

И решение (4) ДУ (1'):

$$u_n(x,\tau)=\left(B_n\cdot\sin\lambda_n x\right)\cdot e^{-\lambda_n^2\cdot\tau}, \qquad B_n=c\cdot\beta_n$$

Решением уравнения (1'), удовлетворяющая краевым условиям (3), является сумма функций $u_n(x,\tau)$, т.е.

$$u(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{6}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2 n^2}{36}\cdot\tau}$$

Коэффициенты B_n этого ряда выберем так, чтобы функция $u(x,\tau)$ удовлетворяла начальному условию (2'):

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0} = 20\sin(2\pi x)+7\sin(3\pi x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{6}\right)=20\sin(2\pi x)+7\sin(3\pi x)$$

Последнее равенство означает, что функцию:

$$f(x)=20\sin(2\pi x)+7\sin(3\pi x)$$

на промежутке $[0,6]$ разложили по синусам в ряд Фурье.

Известно, что коэффициенты этого разложения определяется формулой:

$$B_n = \frac{2}{6}\int\limits_0^6 f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{6}\right)dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^6 \left(20\sin(2\pi x) + 7\sin(3\pi x)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{6}\right)dx =$$

$$= \frac{20}{3}\int\limits_0^6 \sin(2\pi x)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{6}\right)dx + \frac{7}{3}\int\limits_0^6 \sin(3\pi x)\cdot\sin\left(\frac{\pi nx}{6}\right)dx\ . \qquad (7)$$

Тригонометрическая система $\left\{\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\right\}\Bigg|_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на промежутке $[0, l]$, т.е.

$$\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right)dx = 0,\ \ \forall n, m;$$

$$\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right)dx = 0,\ \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right)dx = 0,\ n \neq m.$$

В нашем случае $l = 6$, следовательно, интегралы (7) всегда равны нулю, кроме единственного случая, когда аргументы синусов совпадают:
первый интеграл в B_n не равен нулю при условии, если:

$$2\pi x = \frac{\pi nx}{6} \ \Rightarrow\ \ n = 12\ ,$$

а второй – при условии, если:

$$3\pi x = \frac{\pi nx}{6} \ \Rightarrow n = 18\ .$$

Поэтому,

$$B_{12} = \frac{20}{3}\int\limits_0^6 \sin^2(2\pi x)dx = \left|\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right| =$$

$$= \frac{10}{3}\int\limits_0^6 (1-\cos(4\pi x))dx = \frac{10}{3}\left(x - \frac{\sin(4\pi x)}{4\pi}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{10}{3}\cdot(6-0) = 20,$$

$$B_{18} = \frac{7}{3}\int\limits_0^6 \sin^2(3\pi x)dx = \frac{7}{6}\int\limits_0^6 (1-\cos(6\pi x))dx = \frac{7}{6}\left(x - \frac{\sin(6\pi x)}{6\pi}\right)\Bigg|_0^6 = \frac{7}{6}(6-0) = 7\,.$$

Можно использовать другое рассуждение для нахождения B_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{6}\right) = 20\sin(2\pi x) + 7\sin(3\pi x)$$

полученное равенство будет справедливым в том случае, когда аргументы при синусах слева и справа совпадут.

Найдем n (номера ненулевых членов ряда) из равенств:

$$2\pi x = \frac{n\pi}{6}x \ \Rightarrow\ \ n = 12 \ \text{ и } \ B_{12} = 20;$$

$$3\pi x = \frac{n\pi}{6}x \quad \Rightarrow \quad n = 18 \quad \text{и} \quad B_{18} = 7.$$

Таким образом, общее решение ДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям (3) имеет вид

$$u(x,\tau) = B_{12}\cdot\sin\left(\frac{12\pi\, x}{6}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2 12^2}{36}\cdot\tau} + B_{18}\cdot\sin\left(\frac{18\pi x}{6}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2 18^2}{36}\cdot\tau} =$$

$$= 20\sin(2\pi x)\cdot e^{-4\pi^2 n^2\cdot\tau} + 7\sin(3\pi x)\cdot e^{-9\pi^2 n^2\cdot\tau}\ .$$

Подставим $\tau = 8t$ и получаем искомую функцию

$$u(x,t) = 20\sin(2\pi x)\cdot e^{-32\pi^2 n^2\cdot t} + 7\sin(3\pi x)\cdot e^{-72\pi^2 n^2\cdot t}\ .$$

Ответ: $u(x,t) = 20\sin(2\pi x)\cdot e^{-32\pi^2 n^2\cdot t} + 7\sin(3\pi x)\cdot e^{-72\pi^2 n^2\cdot t}$.

Пример 5.2. *Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

начальное условие

$$u(x,t)\big|_{t=0} = x(3-x) \tag{2}$$

краевые условия

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(0,t) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2} = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Решение. Введем новую переменную τ по формуле:

$$\tau = 4t \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot 4,$$

тогда ДУ (1)

$$4\frac{\partial u}{\partial \tau} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Начальные условия и краевые условия не изменятся, т.к. $\tau = 0$ при $t = 0$, а условия (3) от τ не зависят.

Таким образом, решаем ДУ:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1'}$$

с начальными условиями

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0} = x(3-x) \tag{2'}$$

и краевыми условиями (3) методом Фурье: решение $u = u(x;t)$ будем искать в виде

$$u(x,\tau) = X(x)\cdot T(\tau) \tag{4}$$

где $X(x)$, $T(\tau)$ – функции только от переменной x, от τ соответственно.

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = X(x)\cdot T'(\tau), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)\cdot T(\tau).$$

ДУ (1') примет вид:

$$X(x)\cdot T'(\tau) = X''(x)\cdot T(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}.$$

Левая часть данного равенства зависит только от переменной x, а правая только от τ; последние равенство должно выполнятся при $\forall x, \forall t$, что возможно лишь тогда, когда обе части равны константе:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = c.$$

Из получившего равенства имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T'(\tau) - c\cdot T(\tau) = 0, \tag{5}$$

$$X''(x) - c\cdot X(x) = 0. \tag{6}$$

Решим уравнение (5), которое является ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} = c\cdot T(\tau) \quad \text{или} \quad \frac{dT(\tau)}{T(\tau)} = c\cdot d\tau,$$

проинтегрируем:

$$\int \frac{dT(\tau)}{T(\tau)} = c\int d\tau + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|T(\tau)\right| = c\tau + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad T(\tau) = e^{c\tau + \ln C_1} = C_1 e^{c\tau}.$$

Поскольку температура не может неограниченно возрастать с течением времени (источники тепла отсутствуют), то функция $T(\tau)$ обладает тем же свойством. Следовательно, в последней формуле c может быть только отрицательным, т.е. $c = -\lambda^2$ $(\lambda \neq 0)$.

Тогда имеем общее решение ДУ (5):

$$T(\tau) = C_1 e^{-\lambda^2 \tau}$$

и уравнение (6) с учетом $c = -\lambda^2$ запишется в виде:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

С учетом краевых условий:

$$u(x,\tau)\big|_{x=0} = X(0)\cdot T(\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=2} = X'(2)\cdot T(\tau)=0 \quad \Rightarrow \quad X'(2)=0$$

Таким образом,

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \\ X(0)=X'(2)=0. \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$k^2+\lambda^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm\, i\lambda.$$

Тогда общее решение ДУ (6):

$$X(x)=\alpha\cdot\cos(\lambda x)+\beta\cdot\sin(\lambda x),$$
$$X'(x)=\lambda(-\alpha\cdot\sin(\lambda x)+\beta\cdot\cos(\lambda x)).$$

Найдем α, β из условий:

$$\begin{cases} X(0)=\alpha\cdot\cos(0)+\beta\cdot\sin(0)=0, \\ X'(2)=\lambda(-\alpha\cdot\sin(2\lambda)+\beta\cdot\cos(2\lambda))=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0, \\ \beta\cdot\cos(2\lambda)=0. \end{cases}$$

Т.к. α, β не могут одновременно быть равными нулю (в этом случае получим тривиальное решение), то:

$$\begin{cases} \alpha=0, \\ \cos(2\lambda)=0, \;\; \lambda\neq 0. \end{cases}$$

Решение ДУ (6):

$$X(x)=\beta\cdot\sin(\lambda x), \qquad 2\lambda=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi(2n+1)}{2}, \; n=0,1,2,...$$

Получаем:

$$X_n(x)=\beta_n\cdot\sin(\lambda_n x), \;\; \lambda_n=\frac{\pi(2n+1)}{4} \qquad n=0,1,2,...$$

И решение (4) ДУ (1'):

$$u_n(x,\tau)=(B_n\cdot\sin\lambda_n x)\cdot e^{-\lambda_n^2\cdot\tau}, \qquad B_n=c\cdot\beta_n$$

Решением уравнения (1'), удовлетворяющая краевым условиям (3), является сумма функций $u_n(x,\tau)$, т.е.

$$u(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{16}\cdot\tau}$$

Коэффициенты B_n этого ряда выберем так, чтобы функция $u(x,\tau)$ удовлетворяла начальному условию (2'):

$$\left.u(x,\tau)\right|_{\tau=0}=x(3-x) \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)=x(3-x)$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)=x(3-x)$ на промежутке $[0,2]$ разложили по синусам в ряд Фурье.

Известно, что коэффициент этого разложения определяется формулой:

$$B_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)dx=\int_0^2 x(3-x)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=3x-x^2 & du=(3-2x)dx \\ dv=\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)dx & v=-\frac{4}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{4\left(3x-x^2\right)}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\Bigg|_0^2+\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^2\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\cdot(3-2x)dx=$$

$$=\frac{-8}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)+\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^2\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\cdot(3-2x)dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=3-2x & du=-2dx \\ dv=\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)dx & v=\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{-8}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)+\frac{4}{\pi(2n+1)}\cdot$$

$$\left[\frac{4(3-2x)}{\pi(2n+1)}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\Bigg|_0^2+\frac{8}{\pi(2n+1)}\int_0^2\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)dx\right]=$$

$$=\frac{-8}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)+\frac{4}{\pi(2n+1)}\cdot$$

$$\left[\frac{-4}{\pi(2n+1)}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-\frac{8}{\pi^2(2n+1)^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\Bigg|_0^2\right]=$$

$$=\frac{-8}{\pi(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-\frac{16}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-$$

$$-\frac{32}{\pi^3(2n+1)^3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-1\right)$$

Таким образом, общее решение ДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и граничным условиям (3) имеет вид ($\tau=4t$):

$$u(x,\tau)=\frac{-8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi^2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)+\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-\right.$$

$$\left.+\frac{4}{(2n+1)^3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-1\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}\cdot t}$$

Ответ:

$$u(x,\tau)=\frac{-8}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi^2}{(2n+1)}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)+\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-\right.$$

$$\left.+\frac{4}{(2n+1)^3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)-1\right)\right]\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4}\cdot t}$$

5.3 Задача о равновесии электрических зарядов на поверхности проводника

Рассмотрим стационарное электростатическое поле, созданное в пространстве некоторой системой электрических зарядов. Если заряды $q_1, q_2, ..., q_n$ расположены дискретно в точках $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n$, то потенциал поля в точке $x=(x_1, x_2, x_3)$ $u=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$, где $r_i=|\xi_i - x|$ - расстояние от заряда q_i до точки *x*.

Если же заряды непрерывно распределены на некоторой линии L или поверхности S, или в объеме V, то потенциал поля соответственно выражается одним из интегралов: $u=\int_L \frac{\gamma_1}{r}dl,$ $u=\iint_S \frac{\gamma_2}{r}ds,$ $u=\iiint_V \frac{\gamma_3}{r}dv,$ где r - расстояние от элемента линии (поверхности, объема) до точки поля, обладающей потенциалом *u*. В этих формулах величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обозначают линейную, поверхностную или объёмную плотность зарядов:

$$\gamma_1=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}=\frac{dq}{dl},\ \gamma_2=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta s}=\frac{dq}{ds},\ \gamma_3=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta v}=\frac{dq}{dv},$$

где Δq – заряд элемента линии L (поверхности S, объема V). В общем случае потенциал поля равен сумме потенциалов, созданных каждым из этих видов распределения зарядов в отдельности.

Допустим, что конечная область *V* пространства занята проводящей средой проводником, т.е. средой, в которой заряды могут свободно передвигаться, а остальная часть пространства – диэлектриком, т.е. средой, в которой движение зарядов невозможно. В стационарном состоянии потенциал поля во всех точках области *V*, включая ее границу, одинаков, так как иначе бы возникло движение электрических зарядов, стремящееся выровнять потенциал, и поле менялось бы. Отсюда непосредственно очевидно, что в области V потенциал поля u удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0 \,(\, \Delta u = div\, grad u\,).$$

Внутри проводника заряды разных знаков должны быть взаимно нейтрализованы. Следовательно, если достигается стационарное состояние, то избыточные заряды располагаются на границе ∂V проводника в виде бесконечно тонкого электрического слоя. Потенциал этого слоя в точке x выражается интегралом: $u = \iint\limits_{s} \frac{\gamma_2}{r} ds,$

где r - расстояние от переменной точки – поверхности проводника до точки x. Если точка x находится вне проводника, то функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, уравнению Лапласа удовлетворяет и потенциал u, определяемый данной формулой. Чтобы доказать это утверждение, достаточно применить к интегралу правило дифференцирования по параметру, что можно сделать, так как, по предположению, точка x находится вне поверхности ∂V и, следовательно, подынтегральная функция в выражении потенциала нигде не обращается в бесконечность. Итак, в каждой точке x, лежащей в непроводника, потенциал u также удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому возникает задача нахождения функции u, удовлетворяющей уравнению Лапласа во всех точках окружающего проводник пространства, стремящейся к нулю на бесконечности и удовлетворяющей условию:

$$U = const, \text{ когда } x \in \partial V.$$

Это последнее условие получило название граничного условия, в связи с чем рассматриваемую математическую задачу называют граничной.

В зависимости от вида граничного условия различают три основных вида граничной задачи:

1. $u(x) = \varphi(x),$ когда $x \in \partial V$ - первая граничная задача или задача Дирихле,
2. $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x)$, когда $x \in \partial V -$ вторая граничная задача или задача Неймана,
3. $\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha_1 u = \varphi(x),$ когда $x \in \partial V -$ третья или смешанная граничная задача.

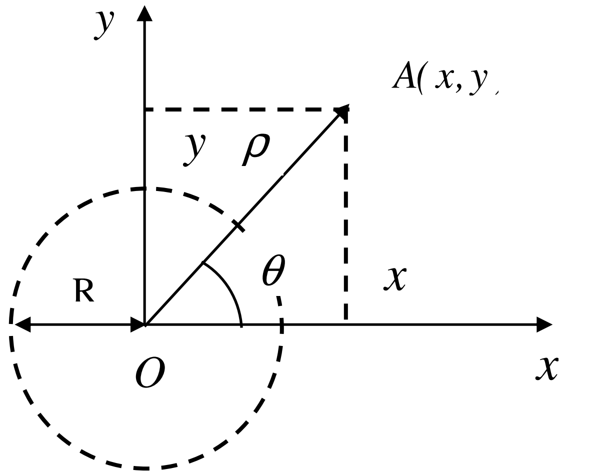
Здесь $\varphi, \alpha_1, \alpha_2 -$ непрерывные функции, определенные на граничной поверхности ∂V, а $\frac{\partial u}{\partial n}$ означает производную, взятую в точке поверхности ∂V по направлению внешней нормали к ней. К этим видам граничной задачи приводит изучение широкого круга стационарных физических явлений и процессов.

Глава 6. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

6.1. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Функцию, удовлетворяющую в области *D* уравнению Лапласа, называют гармонической в этой области.

Пусть дан круг радиуса *R* с центром в полюсе *O* полярной системы координат. Будем искать функцию $u(\rho,\theta)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на окружности условию $u\big|_{\rho=R}=\varphi(\theta)$, где $\varphi(\theta)$ – заданная функция, непрерывная на окружности.



Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа:

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

Допустим, что частное решение имеет вид: $u=Q(\rho)\cdot T(\theta)$. Тогда получим:

$$\rho^2 Q''(\rho)\cdot T(\theta)+\rho Q'(\rho)\cdot T(\theta)+Q(\rho)\cdot T''(\theta)=0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=-\frac{\rho^2 Q''(\rho)+\rho Q'(\rho)}{Q(\rho)}.$$

Приравнивая каждую часть полученного равенства постоянной $-k^2$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(\theta)+k^2\cdot T(\theta)=0, \qquad (6.1)$$

$$\rho^2 Q''(\rho)+\rho Q'(\rho)-k^2 Q(\rho)=0. \qquad (6.2)$$

Отсюда при $k=0$ получим:

$$T(\theta)=A+B\theta,$$
$$Q(\rho)=C+D\ln\rho.$$

Если же $k>0$, то:

$$T(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta,$$

а решение второго уравнения будем искать в виде $Q(\rho)=\rho^m$, что дает: $\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2}+\rho m\rho^{m-1}-k^2\rho^m=0,$
или $\rho^m(m^2-k^2)=0, m=\pm k$.

Следовательно,

$$Q(\rho)=C\rho^k+D\rho^{-k}. \tag{6.4}$$

Заметим, что $u(\rho,\theta)$ как функция θ есть периодическая функция с периодом 2π, так как величины $u(\rho,\theta)$ и $u(\rho,\theta+2\pi)$ соответствуют однозначной функции в одной и той же области. Поэтому, в (6.1) *B=0*, а в (6.3) k может иметь одно из значений 1,2,3,…(*k > 0)*. Далее, в (6.2) и в (6.4) *D=0*, так как в противном случае функция u имела бы разрыв при *r=0* и не была бы гармонической в круге. Итак, мы получили бесчисленное множество частных решений уравнения $\Delta u(\rho,\theta)=0$, непрерывных в круге, которые можно записать в виде:

$$u_0(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2},$$

$$u_n(\rho,\theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n, (n=1,2,...).$$

Составим функцию:

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n,$$

которая вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа также будет его решением. Остаётся определить величины A_0, A_n, B_n так, чтобы эта функция удовлетворяла условию:

$$u\big|_{\rho-R}=\varphi(\theta), \qquad \varphi(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)R''.$$

Это разложение функции $\varphi(\theta)$в ряд Фурье в промежутке $[-\pi,\pi]$. В силу известных формул находим:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)d\tau,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\cos n\tau d\tau, \qquad B_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\sin n\tau d\tau.$$

Таким образом:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos n(\tau-\theta)\right\}d\tau.$$

После преобразований получим:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tau)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\tau-\theta)+\rho^2}\,d\tau .$$

Это решение задачи Дирихле для круга. Интеграл, стоящий в правой части, называется интегралом Пуассона.

6.2. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа

Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями, L_1 и L_2, радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат:

$$\begin{cases} u''_{xx}+u''_{yy}=0, \quad R_1{}^2<x^2+y^2<R_2{}^2 \\ u\big|_{L_1}=f_1, \quad u\big|_{L_2}=f_2 \end{cases}$$

Для простоты решения перейдем от координат (x,y) к полярным координатам (ρ,φ). Найдем частные производные второго порядка от сложной функции $u=u(\rho,\varphi)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=arctg\,\dfrac{y}{x}$ по независимым переменным x и y по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cdot\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial\rho}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cdot\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},$$

$$u''_{xx}=u''_{\rho\rho}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+u'_\rho\cdot\frac{{}^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}-2u''_{\varphi\rho}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+u''_{\varphi\varphi}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+u'_\varphi\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u''_{yy}=u''_{\rho\rho}\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+u'_\rho\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}+2u''_{\rho\varphi}\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+u''_{\varphi\varphi}\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}-u'_\varphi\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Складывая правые части последних равенств, и приравнивая сумму нулю, получаем

$$u''_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot u'_\rho+\frac{1}{\rho^2}u''_{\varphi\varphi}=0.$$

Таким образом, вводя полярные координаты (ρ,φ), можно задачу Дирихле записать так:

$$\begin{cases} \rho^2 u''_{\rho\rho} + \rho \cdot u'_\rho + u''_{\varphi\varphi} = 0, \ R_1 < \rho < R_2, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases} \tag{6.5}$$

При этом граничные функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ считаем периодическими функциями периода 2π.

Для решения задачи применим метод Фурье (разделения переменных). Будем искать решения в виде $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$. Подставив выражение $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$ в уравнение (6.1), получим

$$\Phi \cdot \rho^2 \cdot R'' + \Phi \cdot \rho \cdot R' + R \cdot \Phi'' = 0.$$

После разделения переменных получим:

$$\frac{\rho^2 \cdot R'' + \rho \cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{6.6}$$

Поскольку переменные ρ и φ не зависят друг от друга, то каждая часть уравнения (6.6) должна быть константой. Обозначим эту константу через λ.

Тогда будем иметь:

$$\frac{\rho^2 \cdot R'' + \rho \cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda. \tag{6.7}$$

Ясно, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т.е. $u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$. Отсюда $R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi+2\pi)$.

Значит, $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Из уравнения

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$$

следует, что

$$\Phi(\varphi) = A\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) + B\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right),$$

и в силу периодичности $\Phi(\varphi)$ должно быть выполнено равенство $\lambda = n^2$, где n – целое неотрицательное число.

Далее, из уравнения (6.7) получаем

$$\rho^2 R'' + \rho \cdot R' - n^2 R = 0. \tag{6.8}$$

Если $n \ne 0$, то решение этого уравнения ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (6.8) и сокращая на ρ^μ, находим

$$\mu^2 = n^2, \text{ или } \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

При $n = 0$ уравнение (6.4) имеет два решения: 1 и $\ln\rho$.

Итак, у нас есть теперь бесконечный набор функций:

$$1,\ \ln\rho,\ \rho^n\cos(n\varphi),\ \rho^n\sin(n\varphi),\ \rho^{-n}\cos(n\varphi),\ \rho^{-n}\sin(n\varphi)\ \ (n = 1,2,3,\ldots),$$

удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными. Поскольку сумма этих решений также является решением, то общее решение уравнения Лапласа в нашем случае имеет вид:

$$u(\rho,\varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho +$$
$$+\sum_1^{\infty}\left[\left(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(c_n\rho^n + d_n\rho^{-n}\right)\sin(n\varphi)\right]. \qquad (6.9)$$

Теперь найдем все коэффициенты в (6.9) так, чтобы удовлетворялись граничные условия $u(R_1,\varphi) = f_1(\varphi)$, и $u(R_2,\varphi) = f_2(\varphi)$. Полагая в формуле (6.9) $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$, получим:

$$u(R_1,\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_1 +$$
$$+\sum_1^{\infty}\left[\left(a_nR_1^{\,n} + b_nR_1^{\,-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(c_nR_1^{\,n} + d_nR_1^{\,-n}\right)\sin(n\varphi)\right],$$
$$u(R_2,\varphi) = a_0 + b_0 \ln R_2 +$$
$$+\sum_1^{\infty}\left[\left(a_nR_2^{\,n} + b_nR_2^{\,-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(c_nR_2^{\,n} + d_nR_2^{\,-n}\right)\sin(n\varphi)\right].$$

Вспоминая выражения для коэффициентов ряда Фурье, приходим к следующим системам уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(x)dx, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(x)dx \end{cases} \qquad (6.10_1)$$

(решается относительно a_0 и b_0);

$$\begin{cases} a_nR_1^{\,n} + b_nR_1^{\,-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos(nx)dx, \\ a_nR_2^{\,n} + b_nR_2^{\,-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(x)\cos(nx)dx \end{cases} \qquad (6.10_2)$$

(решается относительно a_n и b_n);

$$\begin{cases} c_nR_1^{\,n} + d_nR_1^{\,-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_1(x)\sin(nx)dx, \\ c_nR_2^{\,n} + d_nR_2^{\,-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_2(x)\sin(nx)dx \end{cases} \qquad (6.10_3)$$

(решается относительно c_n и d_n).

Из этих систем уравнений находятся все неизвестные коэффициенты. Теперь задача (6.5) полностью решена. Решение дается выражением (6.9), коэффициенты в котором определяются по формулам (6.10).

Пример 6.1. Потенциал на внутренней окружности кольца равен нулю, а потенциал на внешней − равен $\cos\varphi$. Найти потенциал в кольце.

Имеем краевую задачу

$$\begin{cases} \rho^2 u''_{\rho\rho} + \rho \cdot u'_\rho + u''_{\varphi\varphi} = 0,\ 1 < \rho < 2, 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\varphi) = 0, \\ u(2,\varphi) = \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

на определение потенциала $u(\rho,\varphi)$.

Решение. Решение будем искать в виде (6.5)

$$u(\rho,\varphi) = a_0 + b_0 \ln\rho +$$
$$+ \sum_1^\infty \left[\left(a_n\rho^n + b_n\rho^{-n}\right)\cos(n\varphi) + \left(c_n\rho^n + d_n\rho^{-n}\right)\sin(n\varphi) \right].$$

Вычислим все интегралы в формулах (6.6) и найдем коэффициенты

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0 d\varphi = 0, \\ a_0 + b_0 \ln 2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = \dfrac{1}{2\pi}(\sin 2\pi - \sin 0) = 0, \end{cases}$$

следовательно, $\begin{cases} a_0 = 0, \\ b_0 = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} a_n + b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0 d\varphi = 0, \\ a_n \cdot 2^n + b_n \cdot 2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\varphi\cos(n\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi)d\varphi. \end{cases}$$

Последний интеграл имеет ненулевое значение только при $n = 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi)d\varphi = \begin{cases} 0,\ при\ \ n > 1 \\ 1,\ при\ \ n = 1 \end{cases},$$

поэтому, решая систему $\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ a_1 \cdot 2 + b_1 \cdot 2^{-1} = 1, \end{cases}$ находим $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $b_1 = -\dfrac{2}{3}$.

$$\begin{cases} c_n + d_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} 0 \cdot \sin(n\varphi)d\varphi, \\ c_n 2^n + d_n 2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin(n\varphi)d\varphi = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi)d\varphi \end{cases}$$

Последний интеграл при любом n имеет нулевое значение, поэтому, решая систему

$$\begin{cases} c_n + d_n = 0 \\ c_n \cdot 2 + d_n \cdot 2^{-1} = 0 \end{cases},$$

находим $c_n = 0$, $d_n = 0$.

Подставляя найденные значения коэффициентов, получаем решение

$$u(\rho,\varphi)=\left(\frac{2}{3}\rho-\frac{2}{3}\rho^{-1}\right)\cos(\varphi).$$

Ответ: $u(\rho,\varphi)=\dfrac{2}{3}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\cos(\varphi).$

6.3. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле

Рассмотрим два важнейших случая, когда кольцо обращается в круг и внешность круга. ***Внутренняя задача Дирихле*** $(R_1=0, R_2=R)$

$$\begin{cases}\rho^2 u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_{\rho}+u''_{\varphi\varphi}=0,\ 0\le\rho<R,\ 0\le\varphi<2\pi,\\ u(R,\varphi)=f(\varphi),\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

решается точно так же, как решалась задача Дирихле для кольца, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те слагаемые в формуле общего решения, которые не ограничены при стремлении ρ к нулю:

$$\ln\rho,\ \rho^{-n}\cos(n\varphi),\ \rho^{-n}\sin(n\varphi),\ n=1,2,...$$

Следовательно, в качестве решения остается взять функцию

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\left[a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi)\right], \tag{6.11}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi,\quad a_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi,\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi,\end{cases} \tag{6.12}$$

другими словами, мы просто разлагаем функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi)=\sum_{0}^{\infty}\left[a^n\cos(n\varphi)+b^n\sin(n\varphi)\right],$$

а затем каждый член этого ряда умножаем на коэффициенты $\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^n$.

Пример 6.2. Решить внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{cases}\rho^2 u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_{\rho}+u''_{\varphi\varphi}=0,\ 0\le\rho<1,\ 0\le\varphi<2\pi,\\ u(1,\varphi)=\cos^2\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

Решение. Найдем коэффициенты a_n и b_n по формулам (6.12)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\cos(n\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\cos(n\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos(n\varphi)+\frac{1}{4}\cos(n+2)+\frac{1}{4}\cos(n-2)\right)d\varphi=\begin{cases}\frac{1}{2}, \; при \;\; n=2,\\ 0, \; при \;\; n\neq 2.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin(n\varphi)d\varphi=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\sin(n\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(n\varphi)+\frac{1}{4}\sin(n+2)\varphi+\frac{1}{4}\sin(n-2)\varphi\right)d\varphi=0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу общего решения (6.7), получаем окончательный ответ.

Ответ: $u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2\cos 2\varphi$.

Внешняя задача Дирихле $(R_1=R, R_2=\infty)$

$$\begin{cases}\rho^2 u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_\rho+u''_{\varphi\varphi}=0, \quad R<\rho<\infty, \;\; 0\le\varphi<2\pi,\\ u(R,\varphi)=f(\varphi), \;\; 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

решается аналогично предыдущей, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те члены решения, которые не ограничены при стремлении ρ к бесконечности:

$$\ln\rho, \;\; \rho^n\cos(n\varphi), \;\; \rho^n\sin(n\varphi), \;\; n=1,2,...$$

Следовательно, в качестве решения нужно взять функцию

$$u(\rho,\varphi)=\sum_0^\infty\left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n}\left[a^n\cos(n\varphi)+b^n\sin(n\varphi)\right], \tag{6.13}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (6.8). Например, внешняя задача

$$\begin{cases}\rho^2 u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_\rho+u''_{\varphi\varphi}=0, \;\; 1<\rho<\infty, \;\; 0\le\varphi<2\pi,\\ u(R,\varphi)=\sin^3\varphi, \;\; 0\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$$

имеет решение (решается аналогично предыдущему примеру)

$$u(\rho,\varphi)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\rho}\sin\varphi-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\rho^3}\sin 3\varphi.$$

Отметим, что ограниченное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной неограниченной области является единственным.

Пример 6.3. Найти стационарное распределение температуры в однородном секторе $0\le\rho\le a$, $0\le\varphi\le\alpha$, удовлетворяющее краевым условиям $u(\rho,0)=u(\rho,\alpha)=0$, $u(a,\varphi)=A\cdot\varphi \;\; (A=const)$.

Решение. Нахождение стационарной температуры сводится к решению задачи Дирихле

$$\begin{cases} \rho^2 u''_{\rho\rho} + \rho \cdot u'_{\rho} + u''_{\varphi\varphi} = 0,\ 0 < \rho < a, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0,\ 0 \le \rho \le a, \\ u(a,\varphi) = A\varphi,\ 0 \le \varphi \le \alpha. \end{cases}$$

Полагая $u(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$ и проведя разделение переменных, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 R'' + \rho \cdot R' - \lambda R = 0\,, \tag{1}$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0\,. \tag{2}$$

Из условий

$$0 = u(\rho,0) = R(\rho)\Phi(0) \quad \text{и} \quad 0 = u(\rho,\alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$$

следует, $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$.

Постоянную λ определяем, решая задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0,\ 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Имеем $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ и $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1,2,\ldots$.

Функцию $R(\rho)$ ищем в виде $R(\rho) = \rho^{\mu}$. Подставляя это выражение в уравнение (1), найдем

$$\mu(\mu-1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0\,, \text{ откуда } \mu = \pm\frac{n\pi}{\alpha}\,.$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, пишем $R_n(\rho) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$.

Тогда $\quad u_n(\rho,\varphi) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1,2,\ldots$

Естественно общее решение задачи есть

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Постоянные c_n $(n = 1,2,\ldots)$ определяем из условия $u(a,\varphi) = A\varphi$.
Имеем

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Таким образом,

$$c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} A\varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi\,,$$

откуда

$$c_n=\frac{2A}{\alpha\cdot a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}\varphi\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)d\varphi=(-1)^{n+1}\frac{2\alpha\cdot A}{n\pi\cdot a^{\frac{n\pi}{\alpha}}}.$$

Ответ: $u(\rho,\varphi)=\dfrac{2\alpha\cdot A}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\varphi}{n}$, отметим, что решение имеет особенность в граничной точке $\rho=a,\ \ \varphi=\alpha$ из-за несогласования граничных значений.

Пример 6.4. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круговом секторе $0<\rho<1,\ 0<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}$ (ρ и φ − полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(\rho,\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$u(1,\varphi)=31\cos(3\varphi),\qquad u'_{\varphi}(\rho,0)=0,\qquad u\left(\rho,\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$

Решение. Наша задача Дирихле в полярных координатах имеет вид

$$\begin{cases}\rho^2u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_{\rho}+u''_{\varphi\varphi}=0,\ 0<\rho<1,0<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}, & (1)\\ u'_{\varphi}(\rho,0)=u\left(\rho,\dfrac{3\pi}{2}\right)=0,\ 0\le\rho\le1, & (2)\\ u(1,\varphi)=31\cos(3\varphi),\ 0\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{2}. & (3)\end{cases}$$

Применим метод Фурье, т.е. решение $u(\rho,\varphi)$ будем искать в виде

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \tag{4}$$

где $R(\rho)$ – функция переменной ρ; $\Phi(\varphi)$ – функция переменной φ.

Тогда частные производные функции $u(\rho,\varphi)$ примут вид

$$u'_{\rho}=R'(\rho)\cdot\Phi(\varphi),\quad u''_{\rho\rho}=R''(\rho)\cdot\Phi(\varphi),\quad u''_{\varphi\varphi}=R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)$$

Подставим их в уравнение (1)

$$\rho^2\cdot R''(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+\rho\cdot R'(\rho)\cdot\Phi(\varphi)+R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)=0.$$

Приведем уравнение к следующему виду

$$\Phi(\varphi)\cdot\left(\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)\right)=-R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi),$$

$$-\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Левая часть данного равенства зависит только от переменной ρ, а правая только от переменной φ, а равенство верно $\forall\rho, \forall\varphi$, что возможно лишь тогда, когда обе части равны константе

$$-\frac{\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=c=const$$

Из получившегося равенства получим два обыкновенных ДУ:

$$\rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+c\cdot R(\rho)=0\,, \tag{5}$$

$$\Phi''(\varphi)-c\;\Phi(\varphi)=0\,. \tag{6}$$

Из условий (2)

$$u'_\varphi(\rho,0)=R(\rho)\cdot\Phi'_\varphi(0)=0,$$

$$u\left(\rho,\frac{3\pi}{2}\right)=R(\rho)\cdot\Phi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\,,$$

следует

$$\Phi'_\varphi(0)=\Phi\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\,.$$

Ясно, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т.е. $u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)$. Отсюда

$$R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi+2\pi)\,.$$

Значит, $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Это возможно, если $c=-\lambda^2$.

Решим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda^2\Phi=0, \;\; 0<\varphi<\alpha,\\ \Phi'_\varphi(0)=\Phi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение и решим его

$$k^2+\lambda^2=0 \quad\Rightarrow\quad k_{1,2}=\pm i\lambda\,.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cdot\cos(\lambda\varphi)+B\cdot\sin(\lambda\varphi).$$

$$\Phi'(\varphi)=-A\cdot\lambda\cdot\sin(\lambda\varphi)+B\cdot\lambda\cdot\cos(\lambda\varphi)$$

Подставим граничные условия

$$\begin{cases}\Phi'(0)=-A\cdot\lambda\cdot\sin 0+B\cdot\lambda\cdot\cos 0=0,\\ \Phi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=A\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\lambda\right)+B\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\lambda\right)=0,\end{cases}$$

получаем, что

$$\begin{cases} -A\cdot 0 + B\cdot\lambda = 0, \\ A\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\lambda\right) + B\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\lambda\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\lambda\right) = 0, \end{cases}$$

Т.к. A и B не могут быть одновременно равными нулю, то имеем

$$\Phi(\varphi) = A\cdot\cos(\lambda\varphi) \text{ и } \cos\left(\frac{3\pi}{2}\lambda\right) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим собственные числа λ_n.

$$\frac{3\pi}{2}\lambda = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{1+2n}{3}, \quad n = 0,1,2,...$$

Таким образом,

$$\lambda_n = \frac{1+2n}{3} \text{ и } \Phi_n(\varphi) = A_n\cos\left(\frac{1+2n}{3}\varphi\right),\ n = 0,1,2,....$$

Общее решение уравнения

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho\, R'(\rho) + c\cdot R(\rho) = 0 \tag{5}$$

ищем в виде

$$R(\rho) = \rho^{\mu}.$$

Тогда

$$R'(\rho) = \mu\cdot\rho^{\mu-1}, \quad R''(\rho) = \mu(\mu-1)\cdot\rho^{\mu-2}.$$

Подставляем это выражение в уравнение и, учитывая что $c = -\lambda_n^2$, имеем

$$\rho^2\mu(\mu-1)\rho^{\mu-2} + \rho\,\mu\,\rho^{\mu-1} - \lambda_n^2\cdot\rho^{\mu} = 0,$$

$$\mu(\mu-1)\rho^{\mu} + \mu\,\rho^{\mu} - \lambda_n^2\cdot\rho^{\mu} = 0$$

и, сокращая на $\rho^{\mu} \neq 0$, получаем

$$\mu(\mu-1) + \mu - \lambda_n^2 = 0$$

$$\mu^2 - \mu + \mu - \lambda_n^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mu^2 = \lambda_n^2$$

$$\mu = \pm\,\lambda_n \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \pm\frac{1+2n}{3}.$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, имеем

$$R_n(\rho) = \rho^{\frac{1+2n}{3}}.$$

Тогда

$$u_n(\rho,\varphi) = A_n\cdot\rho^{\frac{1+2n}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1+2n}{3}\varphi\right),\ n = 0,1,2,...$$

и общее решение задачи есть

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\rho^{\frac{1+2n}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1+2n}{3}\varphi\right).$$

Коэффициенты A_n $(n=0,1,2,\ldots)$ определяем из условия

$$u(1,\varphi)=31\cos(3\varphi), \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cdot\cos\left(\frac{1+2n}{3}\varphi\right)=31\cos(3\varphi)$$

Полученное равенство будет справедливым в том случае, когда аргументы при косинусах слева и справа совпадут.

Найдем n (номер ненулевого члена ряда) из равенства

$$\frac{1+2n}{3}\varphi=3\varphi \quad\Rightarrow\quad n=4 \text{ и } A_4=31.$$

Таким образом, общее решение ДУ (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3) имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=A_4\cdot\rho^{\frac{1+2\cdot4}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1+2\cdot4}{3}\varphi\right)$$

$$u(\rho,\varphi)=31\cdot\rho^3\cdot\cos\ (3\varphi)$$

Ответ: $u(\rho,\varphi)=31\cdot\rho^3\cdot\cos\ (3\varphi)$.

Пример 6.5. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круговом секторе $0<\rho<1,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ (ρ и φ − полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(\rho,\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$u(1,\varphi)=4\sin(14\varphi), \qquad u(\rho,0)=0, \qquad u'_{\varphi}\left(\rho,\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Решение. Наша задача Дирихле в полярных координатах имеет вид

$$\begin{cases}\rho^2u''_{\rho\rho}+\rho\cdot u'_{\rho}+u''_{\varphi\varphi}=0,\ 0<\rho<1, 0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}, & (1)\\ u(\rho,0)=u'_{\varphi}\left(\rho,\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\ 0\le\rho\le1, & (2)\\ u(1,\varphi)=4\sin(14\varphi),\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}. & (3)\end{cases}$$

Применим метод Фурье, т.е. решение $u(\rho,\varphi)$ будем искать в виде

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \tag{4}$$

где $R(\rho)$ – функция переменной ρ; $\Phi(\varphi)$ – функция переменной φ.

Тогда частные производные функции $u(\rho,\varphi)$ примут вид

$$u'_\rho = R'(\rho)\cdot\Phi(\varphi), \quad u''_{\rho\rho} = R''(\rho)\cdot\Phi(\varphi), \quad u''_{\varphi\varphi} = R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi)$$

Подставим их в уравнение (1)

$$\rho^2 \cdot R''(\rho)\cdot\Phi(\varphi) + \rho\cdot R'(\rho)\cdot\Phi(\varphi) + R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi) = 0.$$

Приведем уравнение к следующему виду

$$\Phi(\varphi)\cdot\left(\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)\right) = -R(\rho)\cdot\Phi''(\varphi),$$

$$-\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Левая часть данного равенства зависит только от переменной ρ, а правая только от переменной φ, а равенство верно $\forall\rho,\forall\varphi$, что возможно лишь тогда, когда обе части равны константе

$$-\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = c = const$$

Из получившегося равенства получим два обыкновенных ДУ:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + c\cdot R(\rho) = 0, \tag{5}$$

$$\Phi''(\varphi) - c\,\Phi(\varphi) = 0. \tag{6}$$

Из условий (2)

$$u'_\varphi\left(\rho,\frac{\pi}{4}\right) = R(\rho)\cdot\Phi'_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$u(\rho,0) = R(\rho)\cdot\Phi(0) = 0,$$

следует

$$\Phi'_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \Phi(0) = 0.$$

Ясно, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho,\varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т.е. $u(\rho,\varphi) = u(\rho,\varphi+2\pi)$. Отсюда

$$R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi+2\pi).$$

Значит, $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π. Это возможно, если $c = -\lambda^2$.

Решим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda^2\Phi = 0, \ 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi'_\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \Phi(0) = 0. \end{cases}$$

Запишем характеристическое уравнение и решим его

$$k^2+\lambda^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm i\lambda .$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\Phi(\varphi)=A\cdot\cos(\lambda\varphi)+B\cdot\sin(\lambda\varphi).$$

$$\Phi'(\varphi)=-A\cdot\lambda\cdot\sin(\lambda\varphi)+B\cdot\lambda\cdot\cos(\lambda\varphi)$$

Подставим граничные условия

$$\begin{cases}\Phi'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-A\cdot\lambda\cdot\sin\dfrac{\pi\lambda}{4}+B\cdot\lambda\cdot\cos\dfrac{\pi\lambda}{4}=0,\\ \Phi(0)=A\cdot\cos(0)+B\cdot\sin(0)=0,\end{cases}$$

получаем, что

$$\begin{cases}-A\cdot\lambda\cdot\sin\dfrac{\pi\lambda}{4}+B\cdot\lambda\cdot\cos\dfrac{\pi\lambda}{4}=0,\\ A\cdot 1+B\cdot 0=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\dfrac{\pi\lambda}{4}=0,\\ A=0,\end{cases}$$

Т.к. A и B не могут быть одновременно равными нулю, то имеем

$$\Phi(\varphi)=B\cdot\sin(\lambda\varphi) \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{4}\lambda\right)=0.$$

Решая последнее уравнение, находим собственные числа λ_n.

$$\frac{\pi}{4}\lambda=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n=2+4n, \quad n=0,1,2,...$$

Таким образом,

$$\lambda_n=2+4n \quad \text{и} \quad \Phi_n(\varphi)=B_n\sin((2+4n)\varphi), \; n=0,1,2,\dots .$$

Общее решение уравнения

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)+c\cdot R(\rho)=0 \tag{5}$$

ищем в виде

$$R(\rho)=\rho^{\mu}.$$

Тогда

$$R'(\rho)=\mu\cdot\rho^{\mu-1}, \quad R''(\rho)=\mu(\mu-1)\cdot\rho^{\mu-2}.$$

Подставляем это выражение в уравнение и, учитывая что $c=-\lambda_n^2$, имеем

$$\rho^2\mu(\mu-1)\rho^{\mu-2}+\rho\,\mu\,\rho^{\mu-1}-\lambda_n^2\cdot\rho^{\mu}=0,$$

$$\mu(\mu-1)\rho^{\mu}+\mu\,\rho^{\mu}-\lambda_n^2\cdot\rho^{\mu}=0$$

и сокращая на $\rho^{\mu}\neq 0$, получаем

$$\mu(\mu-1)+\mu-\lambda_n^2=0$$

$$\mu^2-\mu+\mu-\lambda_n^2=0 \qquad \Rightarrow \quad \mu^2=\lambda_n^2$$

$$\mu=\pm\,\lambda_n \qquad \Rightarrow \qquad \mu=\pm(2+4n).$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, имеем

$$R_n(\rho)=\rho^{2+4n}.$$

Тогда

$$u_n(\rho,\varphi)=B_n\cdot\rho^{2+4n}\cdot\sin\left((2+4n)\varphi\right),\ n=0,1,2,...$$

и общее решение задачи есть

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot\rho^{2+4n}\cdot\sin\left((2+4n)\varphi\right).$$

Коэффициенты A_n $(n=0,1,2,...)$ определяем из условия

$$u(1,\varphi)=4\sin(14\varphi), \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cdot\sin\left((2+4n)\varphi\right)=4\sin(14\varphi)$$

Полученное равенство будет справедливым в том случае, когда аргументы при косинусах слева и справа совпадут.

Найдем n (номер ненулевого члена ряда) из равенства

$$(2+4n)\varphi=14\varphi \quad\Rightarrow\quad n=3 \quad \text{и} \quad B_3=4.$$

Таким образом, общее решение ДУ (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3) имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=B_3\cdot\rho^{14}\cdot\sin\left(14\varphi\right)=4\cdot\rho^{14}\cdot\sin\left(14\varphi\right)$$

Ответ: $u(\rho,\varphi)=4\cdot\rho^{14}\cdot\sin\left(14\varphi\right)$.

Метод функций Грина

Рассмотрим краевую задачу для уравнения эллиптического типа:

$$\Delta(u)=f(M), \tag{6.14}$$

$$\left(\alpha_1 u+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial n}\right)=\varphi(M)\quad s=\partial V, \tag{6.15}$$

где $\alpha_1=\alpha_1(M),\ \alpha_2=\alpha_2(M),\ \alpha_1,\alpha_2\geq 0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0.$

Функцией Грина называют решение задачи (6.14), (6.15) при специальных значениях функций f и φ,именно:

$f(M)=-\delta(M,P)$($\delta-$дельта функции), $\varphi(M)\equiv 0$

Решение этой задачи, т.е. функцию Грина обозначим через $G(M,P)$. Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти и решение исходной задачи (6.14),(6.15). Для этого применим формулу Грина к функциям $v=G(M,P)$и к исходному решению $u(M)$:

$$\int_V\left(G\Delta(u)-u\Delta(G)\right)dv=\int_S\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Поскольку в области V $\Delta(u)=f(M)$,а $\Delta(G)=-\delta(M,P)$, то:

$$\int_V f(M)G(M,P)dv_M + \int_V u(M)\delta(M,P)dv_M = \int_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_M .$$

Второй интеграл левой части по свойству δ - функции равен *u(P)*. Поэтому последнее соотношение можно записать в виде:

$$u(P) = \int_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma_M - \int_V G(M,P) f(M) dv_M . \qquad (6.16)$$

Здесь интегрирование производится по координатам точки *M*. Для первой граничной задачи (6.14), (6.15):

$$u(P) = -\int_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma_M - \int_V G(M,P) f(M) dv_M .$$

Для второй граничной задачи:

$$(\alpha_1 \equiv 0, \alpha_2 \equiv 1), \ \frac{\partial G}{\partial n}\Big|_S = 0, \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \varphi(M)$$

и из формулы (6.16) получаем решение задачи (6.14), (6.15):

$$u(P) = \int_S G(M,P)\varphi(M) d\sigma_M - \int_V G(M,P) f(M) dv_M .$$

Для третьей граничной задачи $(\alpha_1 \neq 0 u \alpha_2 \neq 0)$

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Bigg|_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} G\Big|_S , \ \frac{\partial u}{\partial n}\Bigg|_S = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} u\Big|_S + \frac{\varphi(M)}{\alpha_2}\Big|_S .$$

В этом случае:

$$u(P) = \int_S \frac{\varphi(M)}{\alpha_2(M)} G(M,P) dv_M - \int_V G(M,P) f(M) dv_M .$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче о нахождении функции Грина.

Нахождение функции Грина методом электростатических изображений

Функция Грина находится явно лишь для областей частного вида. При построении функции Грина полезно воспользоваться следующей ее физической интерпретацией. Из курса физики известно, что электрический заряд величины *q* помещенный в точку *P*, создает в свободном неограниченном пространстве электростатическое поле, потенциал которого (при определенном выборе системы единиц) равен:

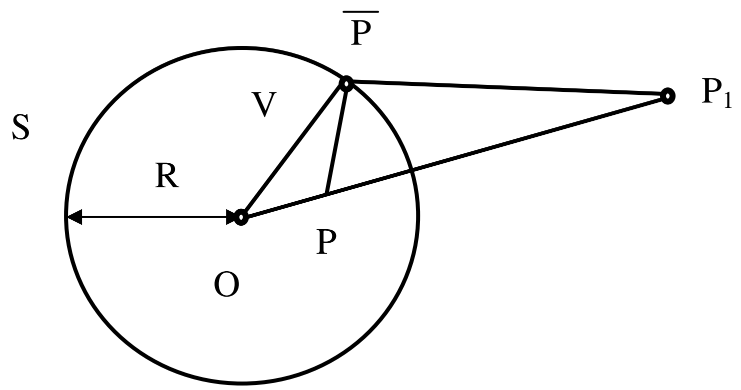
$$u_0(M) = \frac{q}{4\pi\rho_{MP}} . \qquad (6.17)$$

Поскольку в замкнутой области *V* функция Грина *G(M,P)* имеет вид:

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi\rho_{MP}} + g(M,P), \qquad (6.18)$$

где *g(M,P),* как функция точки *M*, гармоническая в области *V* и непрерывна вместе с первыми производными в замыкании $[V]$ области *V,* то первое слагаемое в правой части (6.18) является потенциалом точечного единичного заряда, помещенного в точке *P* области *V*. Второе слагаемое *g(M,P)* можно также интерпретировать, как потенциал электростатического поля, созданного одним или несколькими зарядами, но расположенными обязательно вне области *V*. Это возможно сделать потому, что потенциал электростатического поля, т.е. функция вида (16.1), является гармонической функцией в любой области, свободной от зарядов (т.е. при $M \neq P$). Заряды вне *V* надо выбрать так, чтобы они уничтожили на поверхности *S* действие заряда в точке *P*, т.е. чтобы выполнялось соотношение $G|_S = 0$. Эти заряды называют электростатическими изображениями единичного заряда в *P*, а сам метод нахождения функции Грина – методом электростатических изображений.

Пример 1. Функция Грина для шара. Пусть *V*- шар, ограниченный сферой *S*: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат.



Поместим единичный заряд в точку *P*, расположенную внутри сферы S. Покажем, что действие этого заряда на S может быть уничтожено некоторым зарядом, помещенным в точке P_1, являющейся инверсией точки *P* относительно сферы S; точка P_1, лежит на прямой OP вне шара, причём: $\rho_{OP} \cdot \rho_{OP_1} = R^2$.

Пусть $\overline{P}$- произвольно зафиксированная точка сферы *S.* Рассмотрим два треугольника $OP\overline{P}$ и $OP_1\overline{P}$. Эти треугольники подобны, так как они имеют общий угол при вершине *O* и стороны, образующие этот угол, пропорциональны в силу (16.3). Из подобия треугольников следует:

$$\frac{\rho_{\overline{P}P}}{\rho_{\overline{P}P_1}} = \frac{\rho_0}{R},$$

где $\rho_0 = \rho_{OP}$; откуда:

$$\frac{1}{4\pi\rho_{\overline{P}P}} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{4\pi\rho_{\overline{P}P}} = 0 \tag{6.19}$$

при любом положении точки $\overline{P}$ на сфере.

Из (6.19) следует, что действие заряда $q=1$ в P уничтожается на S зарядом $q=-\frac{R}{\rho_0}$, помещенном в P_1. Следовательно, функция Грина – потенциал поля, созданного этими зарядами – есть:

$$G(M,P)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho_{MP}}-\frac{R}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\rho_{MP_1}}\right).$$

Метод электростатических изображений можно применить и в плоском случае, однако физическая интерпретация здесь будет несколько иной. Именно если на прямой, проходящей через точку P ортогонально плоскости (x,y), разместить положительные электрические заряды с единичной плотностью, то они создадут плоское поле, потенциал которого будет равен: $u_0(M)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{\rho_{MP}}$.

Решение задачи Дирихле для шара

Зная функцию Грина, можно построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Поскольку в этом случае $f(M)=0$, то искомое решение примет вид:

$$u(P)=-\int_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma_M.$$

Поскольку в этом случае $G(M,P)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho_{MP}}-\frac{R}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\rho_{MP_1}}\right)$,

то:

$$u(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\rho_{MP}}-\frac{R}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\rho_{MP_1}}\right)\varphi(M)dS_M,$$

где $\varphi(M)=u|_S$.

Таким образом, остается произвести дифференцирование в подынтегральном выражении. Пусть T - переменная точка, расположенная внутри шара.

Из треугольников OTP и OTP_1 получим:

$$\rho_{PT}=\left(\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}},\rho_{TP_1}=\left(\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho=\rho_{OT},\rho_0=\rho_{OP},\rho_1=\rho_{OP_1},\gamma$ - угол при вершине O. Учитывая, что направление внешней нормали к сфере совпадает с направлением радиуса, получим:

$$\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{1}{\rho_{PM}}-\frac{R}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\rho_{MP_1}}\right)=\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho_{TP}}-\frac{R}{\rho_0}\cdot\frac{1}{\rho_{TP_1}}\right)\Bigg|_{\rho=R}.$$

Учитывая выражения для ρ_{TP} и для ρ_{TP_1}, а также, что $\rho_1 = \dfrac{R^2}{\rho_0}$, подсчитаем правую часть последнего выражения и получим, что:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_S \frac{R^2 - \rho_0^2}{\left(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\varphi(M)dS_M .$$

Эта формула называется формулой Пуассона, а интеграл, стоящий справа интегралом Пуассона.

Можно проверить, что функция $u(P)$ действительно является решением задачи Дирихле для шара при любой непрерывной функции $\varphi(M)$. Для этого следует записать подынтегральное выражение в декартовых координатах:

$$\frac{R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2}{\left((x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + (z_0-\varsigma)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\varphi(M),$$

где $(x_0, y_0, z_0), (\xi, \eta, \varsigma)$ - соответственно координаты точек $P(x_0, y_0, z_0)$ и $M(\xi, \eta, \varsigma)$.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что это выражение как функция точки $P(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Линейное относительно старших производных дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right).$$

Классификация уравнений второго порядка

Если $B^2-AC>0$ в области G, то уравнение гиперболического типа.
Если $B^2-AC=0$ - параболического типа.
Если $B^2-AC<0$ - эллиптического типа.

Канонический вид уравнения второго порядка

Каноническое уравнение гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Каноническое уравнение параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Каноническое уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Дифференциальное уравнение характеристик уравнения:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$$

если $A(x,y)dy^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)dx^2=0.$

Задача Коши для неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

При начальных условиях $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\psi(x).$

Решение: $u(x,t)=\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$ (формула Даламбера).

Колебание полуограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0<x<+\infty,t>0.$$

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{t=0}=\psi(x).$$

Решение: $u(x,t)=\dfrac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau,$

где $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x>0,\\-\varphi(-x),x<0\end{cases}$ и $\psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x>0,\\-\psi(-x),x<0.\end{cases}$

Метод Фурье для уравнения колебаний ограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0<x<l.$$

Начальные условия: $u\big|_{x=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{t=0}=\psi(x).$

Граничные условия: $u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0.$

Решение: $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\dfrac{k\pi at}{l}+b_k\sin\dfrac{k\pi at}{l}\right)\sin\dfrac{k\pi x}{l},$

где $a_k=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}dx;\ b_k=\dfrac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}dx.$

Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

$$\frac{\partial u}{\partial u}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Распределение температуры в неограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},-\infty<x<+\infty.$$

Начальное условие: $u\big|_{t=0}=f(x).$

Решение: $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp\left(-\dfrac{(\xi-x)^2}{4a^2t}\right)d\xi$

$$e_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{2}{\pi n}\left(A+(-1)^{n+1}B\right).$$

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

или $$\Delta u = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Задача Дирихле для круга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; u\big|_{r=R} = f(\varphi),$$

где φ, r – полярные координаты.

Решение: $u(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}\, dt$ (интеграл Пуассона).

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
2. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики./В.П. Пикулин, С.И. Похожаев. – М.:МЦНМО, 2004 - 208 с.
3. Филиппенко В.И., Михайлова И.Д. Уравнения математической физики. Учебное пособие – Шахты – 2002. 45 с.
4. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. − М.: Высшая школа, 1970.
5. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: Учебное пособие – Санкт-Петербург: Лань, 2007. - 688 с.
6. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов: специальные курсы. - Санкт-Петербург: Лань, 2002. - 640 с.
7. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1969
8. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов. − М.: Высшая школа, 1976.
9. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. − М.: Наука, 1964.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. − М.: Наука, 1971.
11. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс. - Санкт-Петербург: Лань, 2006. - 960 с.: ил.
12. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. − М.: Наука, 1968.

Электронное учебное издание

Анатолий Леонидович **Суркаев**
Татьяна Александровна **Матвеева**
Виктория Борисовна **Светличная**

Уравнения математической физики

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2021 г. Поз. № 23.
Подписано к использованию 26.03.2021. Формат 60х84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 4,8.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.