МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. Алпатов

Исследование операций: конспект лекций (часть 1)

Электронное учебное пособие

Волжский

2021

УДК 519.8(07)
УДК 22я73
И 889

Рецензенты:
доктор экономических наук, заведующий кафедрой теоретической экономики и экономической безопасности ВИЭПП, доцент
Орехова Е.А.,
доцент кафедры физики, математики и информатики ВолгГМУ,
канд.физ.-мат. наук
Мещерякова Н.Е.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Алпатов, А.В.
Исследование операций: конспект лекций (часть1)[Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Алпатов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 1,16МБ). – Волжский, 2021. – Режим доступа: htt p://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9948-4051-1

В учебно-методическом пособии приведены теоретические сведения об аналитических и численных методах решения задач оптимизации, а также примеры решения указанных задач, которые могут быть использованы студентами при подготовке к практическим занятиям и при выполнении контрольной работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки09.03.04 Программная инженерия в рамках курса «Исследование операций».

Ил. 21, табл. 14, библиограф.: 12 назв.

ISBN 978-5-9948-4051-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Исследование операций: конспект лекций (часть 1)» было разработано в соответствии с образовательным стандартом и предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 Программная инженерия.

Данное учебное пособие может использоваться студентами для подготовки к практическим и лабораторным занятиям, а также к промежуточной аттестации по дисциплине «Исследование операций». Изложение теории сопровождается примерами, разбором типовых задач. Учебное пособие разделено на три главы: численные методы, линейное программирование и нелинейное программирование.

Исследование операций – дисциплина, занимающаяся разработкой и применением методов нахождения оптимальных решений на основе математического моделирования, статистического моделирования и различных эвристических подходов в различных областях человеческой деятельности.

Исследование операций – применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Человеческая деятельность связана с принятием множества решений по способам достижения поставленных целей. При принятии решений приходится учитывать много факторов, например, ограниченность ресурсов, неопределенность внешних условий, присутствие конкурирующих сторон, которые стремятся достичь своих целей, не всегда совпадающих с нашими.

Решение – это выбор альтернативы по какому-либо критерию или критериям.

Альтернативы решения характеризуют различные по эффективности взаимоисключающие варианты разрешения проблемной ситуации.

Операция – всякое мероприятие (система действий), объединённое единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Допустимое решение представляет собой решение, удовлетворяющее принятым в задаче ограничениям.

Оптимизация – процесс или последовательность операций, позволяющих получить уточненные значения проектных параметров.

Оптимальное решение – это лучшее из допустимых решений, которое удовлетворяет заданному критерию или критериям.

По времени действия решения делятся на:

- стратегические – решения направлены на достижение долгосрочных целей организации;
- тактические – решения обеспечивают выполнение стратегических и преследуют достижение среднесрочных целей организации;
- оперативные – решения принимаются руководителями ежедневно для достижения краткосрочных целей и выполнения текущих работ в организации.

Принятие решения – это процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Лицо принимающее решение (ЛПР) – человек (или группа людей), который фактически осуществляет выбор наилучшего варианта действий.

Правило выбора решения дает возможность ЛПР сделать наиболее предпочтительный однозначный выбор из множества альтернатив решения.

Один из важнейших признаков классификации управленческих решений – число лиц, которые участвуют в принятии решения. По данному признаку все решения можно разделить на два вида:

- индивидуальные решения;

- коллективные решения.

Индивидуальное ЛПР принимает решение на основе критерия выбора, а групповое ЛПР – на основе принципа согласования. Многие решения принимаются в условиях неопределенности – неполноты или неточности информации об условиях реализации решения, связанных с ним затратами и результатами. Возможная опасность возникновения неблагоприятных последствий в ходе реализации решения, связанная с неопределенностью, характеризуется понятием «риск».

Наиболее распространенными методами оптимизации управленческих решений являются:

- математическое программирование (задачи на ограничения);
- методы экспертных оценок;
- теория игр;
- методы управления запасами;
- методы сетевого и календарного планирования и др.

Для успешного освоения дисциплины «Исследование операций» необходимо знать материал следующих дисциплин: математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, экономической теории.

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. Основные понятия оптимизации

При решении ряда практических задач возникает необходимость поиска максимума или минимума функции.

Определение 1.1. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек x из данной окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Определение 1.2. Точка x_0 называется *точкой локального минимума* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек x из данной окрестности выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Общее наименование у точек локального максимума и минимума – экстремум (лат. extremum – крайний). Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума. Соответственно, если достигается минимум, точка экстремума называется точкой минимума, а если максимум – точкой максимума. Рисунок 1.1 иллюстрирует экстремумы функции $y = f(x)$. В точке B наблюдается локальный максимум функции. А в точке C локальный минимум функции.

Определение 1.3. Число x^* называется точкой глобального (абсолютного) минимума или просто точкой минимума функции $f(x)$ на множестве U, если $f(x^*) \le f(x)$ для всех $x \in U$. Значение $f^* = f(x^*) = \min\{f(x) \mid x \in U\}$ называется глобальным (абсолютным) минимумом или просто минимумом функции $f(x)$ на U.

Соответственно, если на множестве U выполняется неравенство $f(x^*) \ge f(x)$ для всех $x \in U$, то в этом случае точка x^* называется точкой глобального (абсолютного) максимума.

На рисунке 1.1 в точке A – глобальный минимум на отрезке $[a, c]$. В точке D находится глобальный максимум функции на отрезке $[a, c]$.

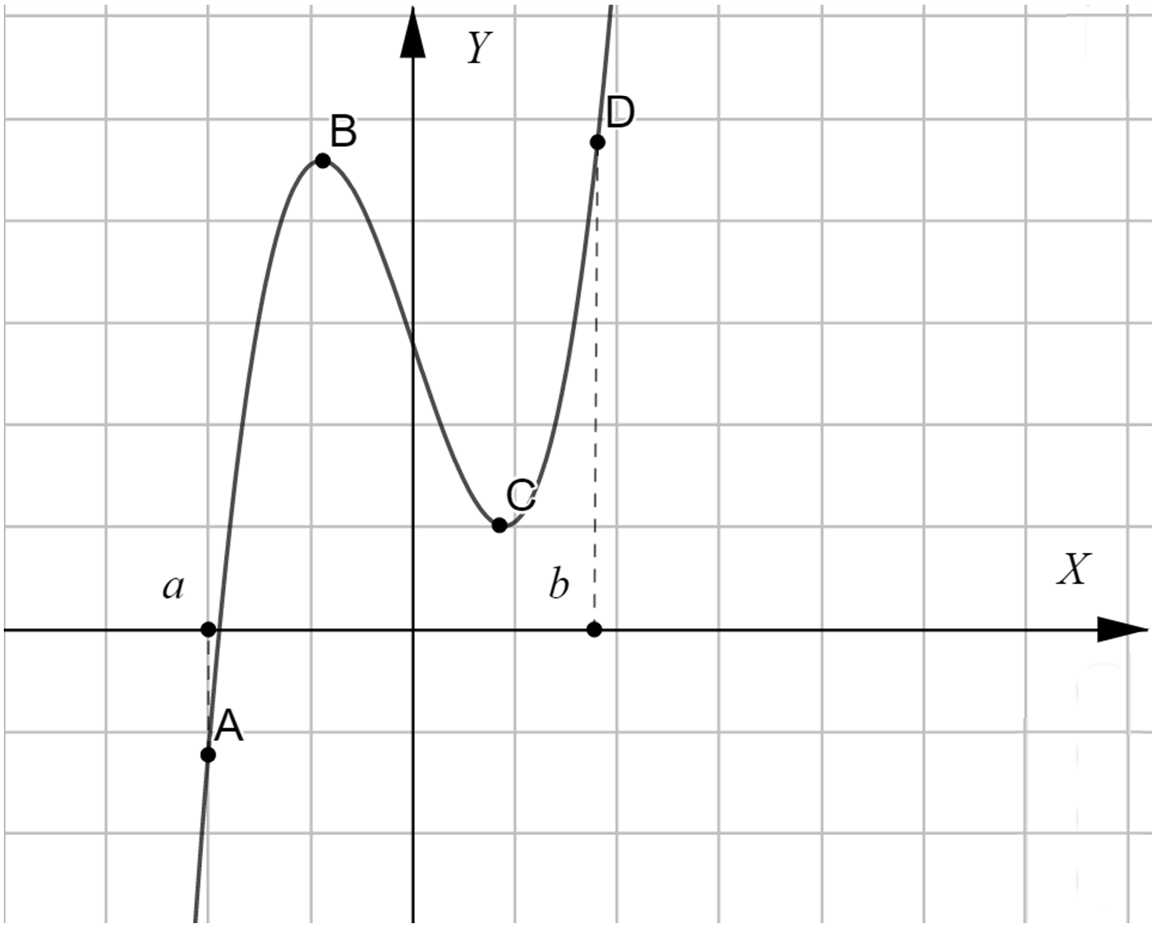

Рис. 1.1. Точки максимума и минимума непрерывной функции *y* = *f*(*x*)

Из рисунка 1.2 видно, что касательные, которые проходят через экстремумы функции, параллельны оси абсцисс. Таким образом, угол между касательной и осью абсцисс равен нулю, а значит, и производная равна нулю (поскольку $tg\alpha = f'(x)$). Кроме того, экстремумы функции могут наблюдаться и в тех точках, где производная не существует. Например, для функции   в точке x =0 (хотя левосторонняя и правосторонняя производная существуют, но они между собой не равны: $f'_-(x) = -1$, $f'_+(x) = 1$) (см. рис. 1.3).

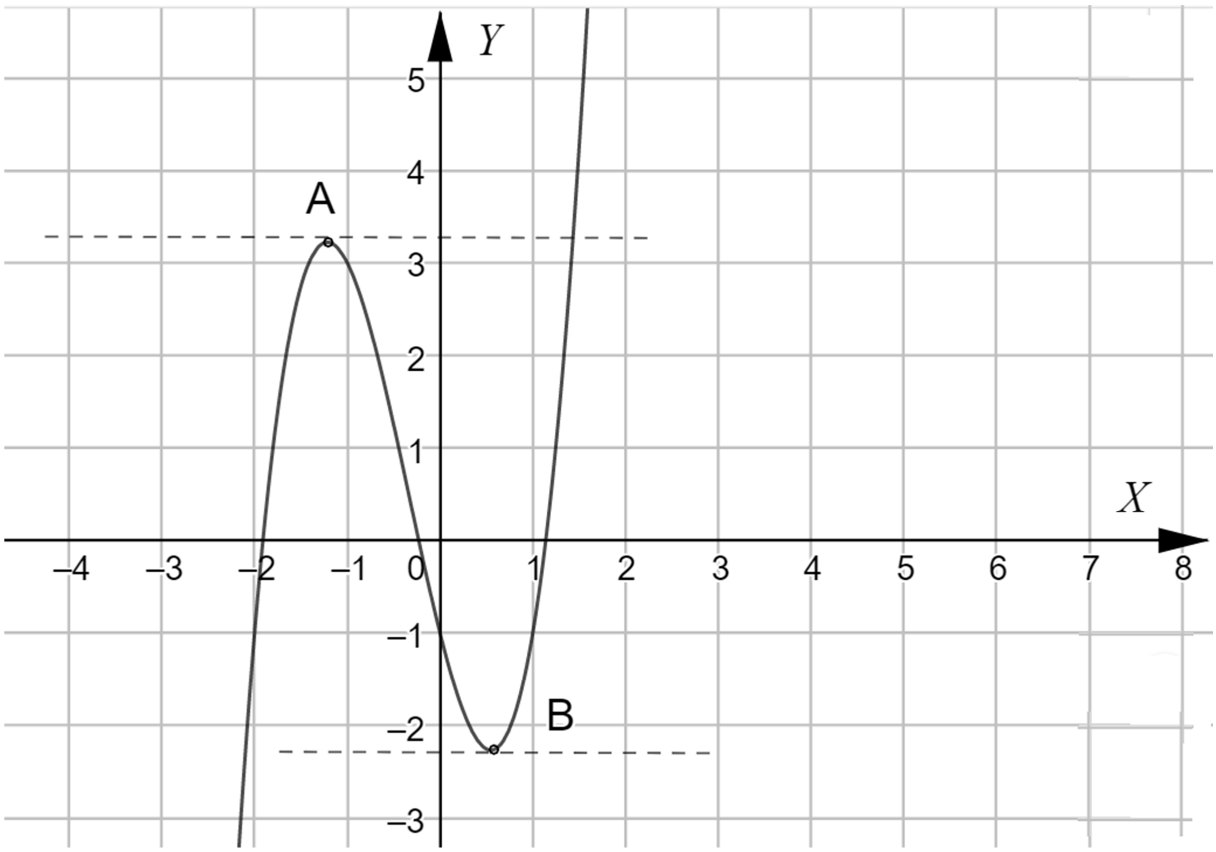

Рис. 1.2. Касательные в точках локального минимума и максимума функции

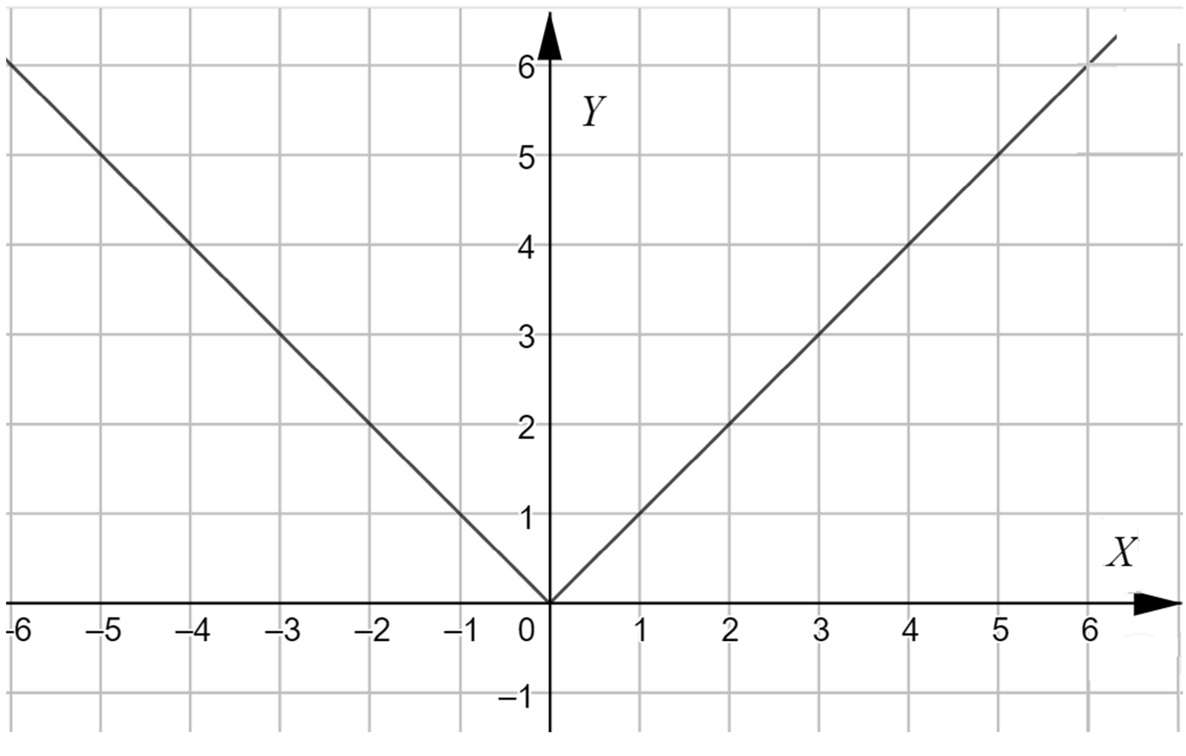

Рис. 1.3. График функции

Определение 1.4. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными.

Определение 1.5. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими.

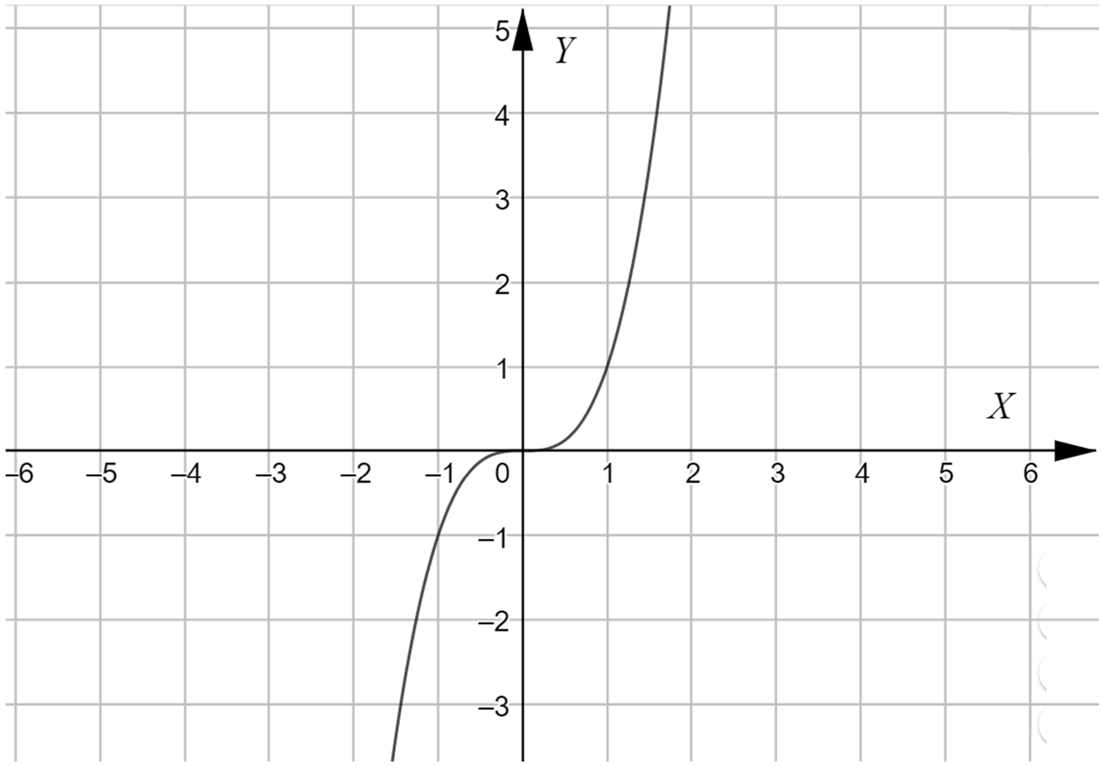

Рис. 1.4. График функции$y = x^3$

Однако вовсе не означает, что если данная точка является критической, то в ней обязательно будет наблюдаться либо максимум, либо минимум. Это необходимо, но не достаточно. Например, для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ является стационарной, однако в ней не наблюдается экстремума (рис. 1.4). Если функция возрастает в некотором интервале, то угол между касательной и осью абсцисс $0 < \alpha < \pi / 2$, а значит тангенс и, соответственно, производная больше нуля. Если же функция убывает, то очевидно, что $f'(x) < 0$. Таким образом, экстремумы обязательно наблюдаются в тех точка, при переходе через которые знак производной меняется на противоположный. Сформулируем теперь две теоремы, которые будут являться необходимым и достаточным условием существования экстремума функции.

Теорема 1.1. (необходимый признак существования экстремума функции). Если дифференцируемая в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то ее производная при $x = a$ обращается в нуль $f'(x) = 0$.

Теорема 1.2. (достаточный признак существования экстремума функции). Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку $x = a$ (за исключением, может быть, самой этой точки), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку $x = a$ меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум; если же при переходе слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

Таким образом, при классическом подходе для поиска минимума (максимума) функции одной переменной необходимо решить уравнение $f'(x)=0$ и установить знак в полученных точках. Аналитическое решение такого уравнения в общем случае невозможно, поэтому используются методы приближенного решения, известные из математического анализа (методы Ньютона, бисекций и т.д.).

В большинстве случаев задачу оптимизации $f(x) \to min$ не удается решить, опираясь на необходимые и достаточные условия оптимальности или на геометрическую интерпретацию задачи, и приходится ее решать численно с применением вычислительной техники. Причем, наиболее эффективными оказываются методы, разработанные специально для решения конкретного класса задач оптимизации, так как они позволяют полнее учесть ее специфику.

Любой численный метод имеет два этапа:

первый этап любого численного метода (алгоритма) решения задачи оптимизации основан на точном или приближенном вычислении ее характеристик (значений целевой функции; значений функций, задающих допустимое множество, а также их производных);

во втором этапе на основании полученной информации строится приближение к решению задачи – искомой точке минимума, или, если такая точка не единственна, к множеству точек минимума:

$$f^* = \min_{x \in X} f(x)$$

Иногда, если только это требуется, строится и приближение к минимальному значению целевой функции. Для каждой конкретной задачи вопрос о том, какие характеристики следует выбрать для вычисления, решается в зависимости от свойств минимизируемой функции, ограничений и имеющихся возможностей по хранению и обработки информации.

В зависимости от того, какие характеристики, в частности, целевой функции берутся, алгоритмы делятся на алгоритмы:

нулевого порядка – в них используется информация только о значениях минимизируемой функции;

первого порядка – использующие информацию также и о значениях первых производных;

второго порядка – использующие, кроме того, информацию о вторых производных

и так далее.

Когда решен вопрос о том, какие именно характеристики решаемой задачи следует вычислять, то для задания алгоритма достаточно указать способ выбора точек вычисления.

В зависимости от способа выбора точек вычисления, алгоритмы делятся на пассивные и активные (последовательные).

В пассивных алгоритмах все точки выбираются одновременно до начала вычислений.

В активных (последовательных) алгоритмах точки вычисления выбираются поочередно, то есть точка выбирается, когда уже выбраны точки предыдущих вычислений и в каждой из них произведены предусмотренные алгоритмом вычисления, результаты которых будем обозначать соответственно через $\tilde{x}^{i+1}$.

При этом конкретный алгоритм определяется заданием начальной точки; правилами выбора векторов и чисел на основе полученной в результате вычислений информации; условием остановки.

Вектор определяет направление i-го шага метода минимизации, а коэффициент λ_i– длину этого шага. Обычно название метода минимизации определяется способом выбора точки$\tilde{x}^{i+1}$.

Наряду с термином шаг метода будем пользоваться также термином как итерация метода.

Среди методов минимизации можно условно выделить, конечношаговые методы; бесконечношаговые методы.

Конечношаговыми (или конечными) называются методы, гарантирующие отыскание решения задачи за конечное число шагов.

Для бесконечношаговых методов достижение решения гарантируется лишь в пределе. Важной характеристикой бесконечношаговых методов является сходимость.

Метод сходится, если $x^k \to x^*$ при $k\to\infty$, где x^* – решение задачи.

Если $f(x^k)\to f(x^*)$ при $k\to\infty$, то иногда также говорят, что метод сходится (по функции), при этом последовательность $\{x^k\}$ называют <u>минимизирующей</u>.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве U вещественной оси $E^1=\{x: -\infty<x<\infty\}$. Поскольку максимизация целевой функции ($f(x)\to max$) эквивалентна минимизации противоположной величины ($-f(x)\to\min$), будем рассматривать только задачу минимизации функции $f(x)$ на множестве U. Для этого напомним некоторые основные понятия.

Если функция $f(x)$ на множестве U имеет, кроме глобального, локальные минимумы, отличные от него, то минимизация $f(x)$, как правило, сильно затрудняется. Многие методы поиска точки минимума $f(x)$ приспособлены только для функций, у которых каждый локальный минимум является одновременно и глобальным. Этим свойством обладают унимодальные функции.

Определение 1.6. Функция$y = f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если на данном отрезке имеется единственное значение x^* такое, что $f(x)$ – минимум функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ и что $f(x)$ строго убывает для $x \leq x^*$и строго возрастает для $x \geq x^*$.

Если функция нестрого убывает или возрастает, то говорят, что данная функция унимодальная.

Унимодальная функция не обязательно должна быть непрерывной и дифференцируемой. Ниже представлены примеры унимодальных функций.

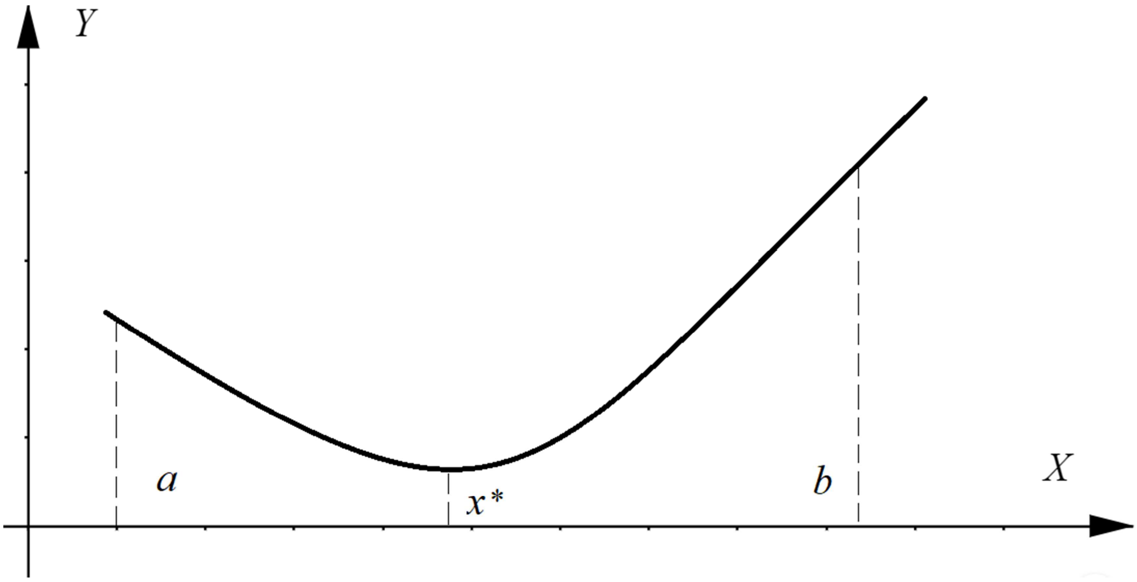

Рис. 1.5. Унимодальная, непрерывная, дифференцируемая функция

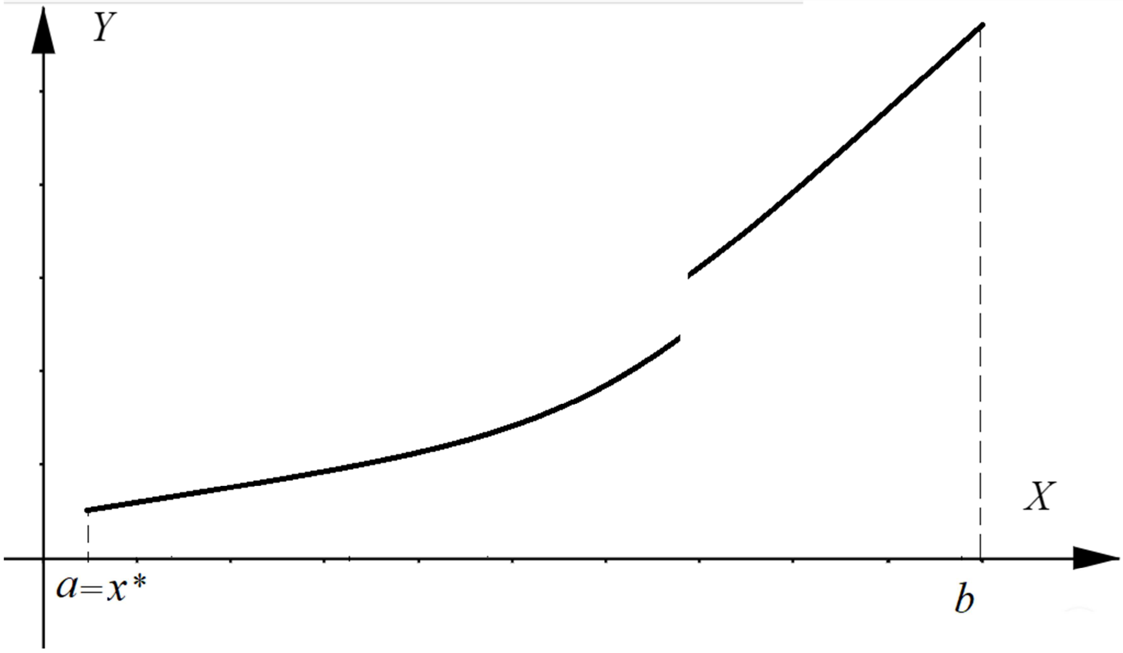

Рис. 1.6. Унимодальная функция с минимумом на конце отрезка [a, b]

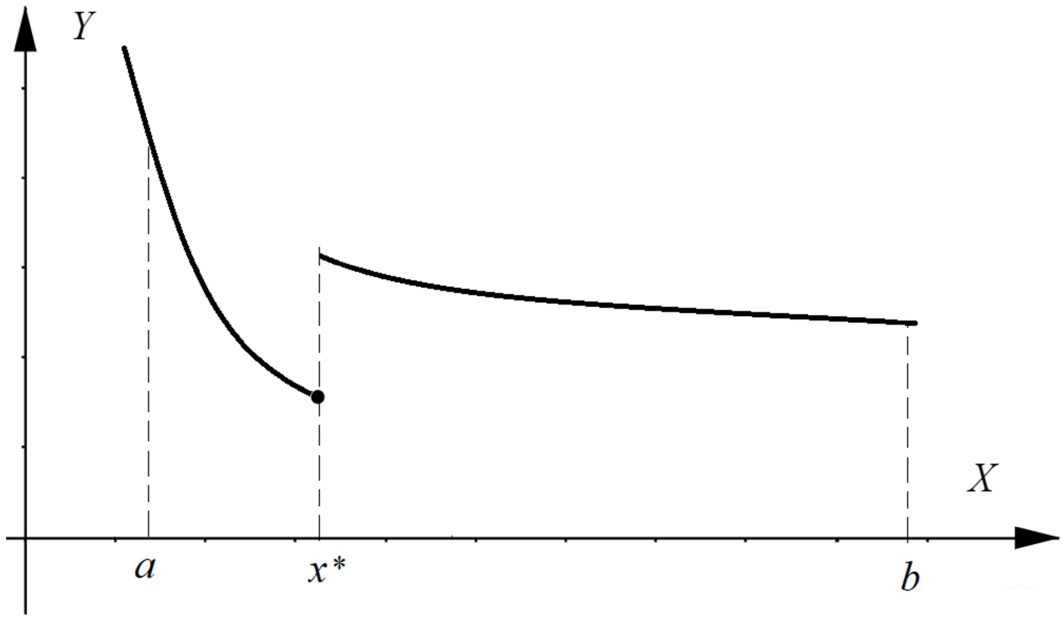

Рис. 1.7. В точке минимума имеется разрыв функции

Определение 1.7. Под численным методом одномерной минимизации понимается процедура получения числовой последовательности $\{x_k\}$ приближений к точному решению задачи минимизации.

Определение 1.8. Под численным методом одномерной минимизации понимается процедура получения вложенных отрезков, покрывающих точное решение.

Метод имеет порядок k, если он использует информацию о производных $f(x)$ до k-го порядка включительно. Обычно применяются методы 0-го, 1-го и 2-го порядков.

Численный метод сходится, если последовательность $\{x_k\}$ сходится к точному решению, то есть $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$(скорость сходимости характеризуется $|x_k - x^*|$) или метод сходится, если $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$; $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k = x^*$ (скорость сходимости характеризуется разностью $(b_k - a_k)$).

Процесс вычислений желательно прервать, если:

- достигнута требуемая точность вычислений;
- хорошее приближение не найдено, но скорость продвижения к оптимуму так упала, что нет смысла продолжать дальше;
- метод начал расходится или зациклился.

Часто на практике критерием прерывания по 2-й или 3-й причине является выполнение предельно допустимого числа получений приближенных решений.

Рекомендуется всегда этот критерий вводить в программу, даже если есть большая уверенность в благополучном завершении вычислений.

Если необходимо решить задачу оптимизации с точностью ε, то в качестве критерия окончания вычислений может служить неравенство:

$$\left|x^{k+1} - x^k\right| \le \varepsilon$$

Однако для ряда задач, особенно негладких, этот критерий может привести к ложному решению.

Поэтому наряду с этим критерием обычно применяют один из двух следующих или даже сразу два:

$$\left|f(x^{k+1}) - f(x^k)\right| \le \varepsilon$$

$$\left|f'(x^{k+1})\right| \le \varepsilon$$

2. Прямые методы одномерной оптимизации

Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются прямыми методами минимизации.

Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов оптимизации, это возможность определения значений $f(x)$ в заданных точках.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума. Самым слабым требованием на функцию $f(x)$, позволяющим использовать эти методы, является ее унимодальность. Поэтому далее будем считать функцию $f(x)$ унимодальной на отрезке $[a; b]$.

Метод перебора

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации. Пусть функция $y = f(x)$ – непрерывная функция на интервале $[a, b]$, и требуется найти точку минимума x_0 функции $y = f(x)$ на данном отрезке с абсолютной погрешностью ε. Отрезок $[a, b]$ разбивается на n равных частей точками деления $x_i = a + h \cdot i,\ h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n.$ Вычислив значение $f(x)$ в этих точках, путем сравнения найдем точку x_m, для которой:

$$f(x_m) = \min_{0 \le i \le n} f(x_i)$$

Далее, полагаем, что $x_0 \approx x_m$, $f_0 \approx f(x_m)$. При этом максимальная погрешность определения точки x_0 равна $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$.

Достоинства метода: простота алгоритма; нахождение глобального минимума (максимума) при исследовании функции с несколькими экстремумами. Недостаток метода: большое число вычислений значений целевой функции.

Метод поразрядного поиска

Можно усовершенствовать метод перебора с целью уменьшения количества значений $F(x)$, которые необходимо находить в процессе минимизации. Во-первых, если оказывается, что $F(x_i) \leq F(x_{i+1})$, то отпадает необходимость вычислять $F(x)$ в точках x_{i+2}, x_{i+3} и т.д. Во-вторых, разумно было бы сначала определить отрезок, содержащий оптимальную точку x_{min} с небольшой точностью, а затем искать ее на этом отрезке с меньшим шагом дискретизации, повышая точность. Эти возможности улучшения и реализованы в методе поразрядного поиска. В этом методе перебор точек отрезка происходит сначала с шагом $h=x_{i+1}-x_i> \varepsilon$ до тех пор, пока не выполнится условие $F(x_i)<F(x_{i+1})$ или пока очередная из точек не совпадет с концом отрезка. После этого шаг уменьшается (обычно в 4 раза), и перебор точек с новым шагом производится в противоположном направлении до тех пор, пока значения $F(x)$ снова не перестанут уменьшаться или очередная точка не совпадет с другим концом отрезка и т.д. Описанный процесс завершается, когда перебор в данном направлении закончен, а использованный при этом шаг дискретизации не превосходит ε.

Алгоритм метода поразрядного поиска

Шаг 1. Выбрать начальный шаг $s_h=(b-a)/4$. Положить $x_0=a$. Вычислить $F(x_0)$.

Шаг 2. Положить $x_1=x_0 + h$. Вычислить $F(x_1)$.

Шаг 3. Сравнить $F(x_0)$ и $F(x_1)$. Если $F(x_0) >F(x_1)$, то перейти к шагу 4, иначе – к шагу 5.

Шаг 4. Положить $x_0 = x_1$ и $F(x_0) = F(x_1)$. Проверить условие принадлежности x_0 интервалу $[a, b]$. Если $a<x_0<b$, то перейти к шагу 2, иначе – к шагу 5.

Шаг 5. Проверка на окончание поиска: если $|h| \leq \varepsilon$, то вычисления завершить, полагая $x_{min}=x_0$, $F_{min}=F(x_0)$, иначе – перейти к шагу 6.

Шаг 6. Изменить направление поиска: положить $x_0=x_1$, $F(x_0) = F(x_1)$, $h = -h/4$. Перейти к шагу 2.

Данный метод позволяет намного быстрее найти искомую точку, в отличие от метода перебора.

Метод дихотомии

Необходимо найти минимум функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью ε, предполагая, что данная функция унимодальна на данном отрезке. Это значит, что если x_0 – точное решение задачи минимизации функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а $\tilde{x}$ – приближенное, то:

$$|\tilde{x} - x_0| < \varepsilon.$$

Метод основан на делении текущего отрезка $[a, b]$, где содержится искомый экстремум на две равные части с последующим выбором одной из половин, в которой локализуется минимум в качестве следующего текущего отрезка. Экстремум локализуется путем сравнения двух значений критерия оптимальности в точках, отстоящих от середины отрезка на δ. При этом $\delta < \varepsilon$ (данные константы не должны быть меньше машинной точности).

Точкой $c = \frac{a+b}{2}$ делим отрезок $[a, b]$ пополам. Поскольку функция $y = f(x)$ унимодальная, то $f(c) < f(a)$ и $f(c) < f(b)$, однако точка минимума может оказаться как в левой, так и в правой части отрезка $[a, b]$.

На рисунке 1.8 показаны две унимодальные функции, имеющие точку минимума в разных половинах отрезка $[a, b]$.

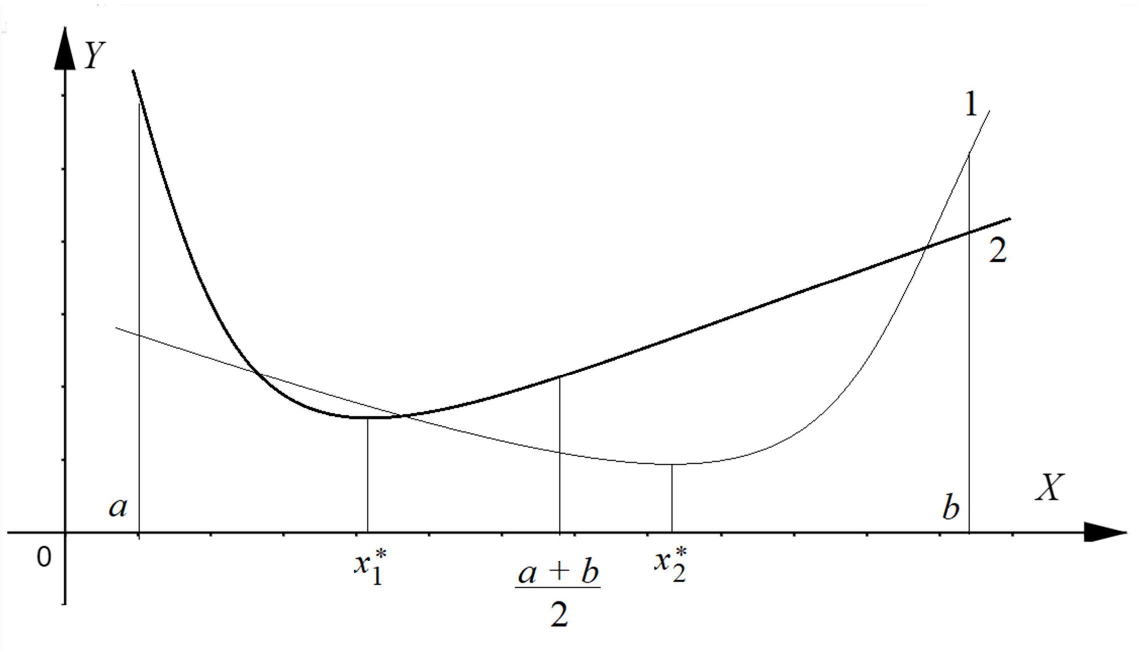

Рис. 1.8. Метод дихотомии

Следовательно, по значению функции в средней точке отрезка нельзя сузить отрезок неопределенности. Внутри [a, b] выберем две точки:

На первой итерации приняли, что $a = a_1$, $b = b_1$.

Поскольку функция унимодальная, то точка минимума попадет либо в отрезок [a, c_1], либо в [d_1, b]. Если , то ; если , то ; и если , то (однако последний вариант не выделяют отдельно, а включают знак равенства в один из выше рассмотренных случаев).

Процедура повторяется, пока не будет достигнута заданная точность, к примеру, пока длина отрезка не достигнет удвоенного значения заданной погрешности:

Название метода связано с тем, что при малых δ длины локализующих интервалов на каждом шаге уменьшаются почти в два раза.

Можно заменить, что с одной стороны выбор достаточно малых значений δ гарантирует быстрое сокращение длины локализующего отрезка, но с другой стороны при этом приходится вычислять значение функции с большей точностью, так как иначе можно пропустить точку минимума.

Метод золотого сечения

На каждой итерации приходится вычислять новые точки. Можно добиться того, чтобы на очередной итерации было необходимо высчитывать лишь одну новую точку, что заметно способствовало бы оптимизации процедуры. Это достигается путём зеркального деления отрезка в золотом сечении.

Золотое сечение – это сечение отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большему, как больший к меньшему: $c{:}b = b{:}a$ (здесь $c = a+b$). На рисунке 1.9 показан отрезок AB. Разделим его на две части согласно пропорции золотого сечения.

Пусть AB = c = 1, $ADb = x$, тогда:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

В результате решения квадратного уравнения получится один положительный корень:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Больший отрезок можно было отложить не от левого, а от правого конца отрезка. Тогда получили бы точку золотого сечения C, симметричную точке D относительно центра отрезка. При этом $AC = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

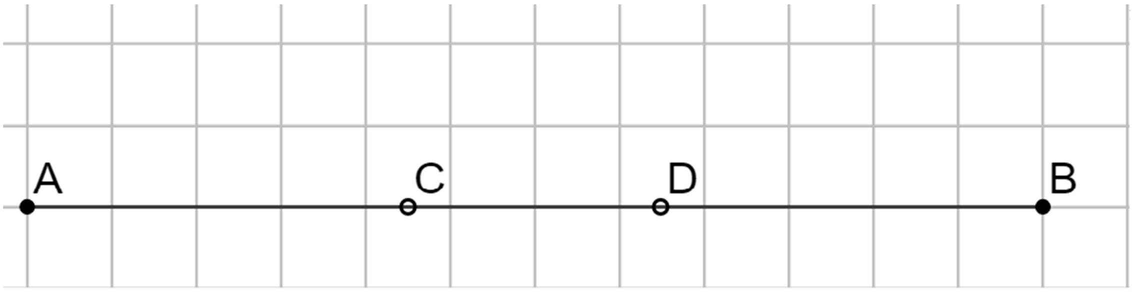

Рис. 1.9. Деление отрезка метода золотого сечения

Точку C называют первой, а точку D второй точкой золотого сечения. Эти точки обладают замечательными свойствами. Точка C не только первая точка золотого сечения отрезка AB, но и вторая точка золотого сечения отрезка AD.

Точка D не только вторая точка золотого сечения отрезка AB, но и первая точка золотого сечения отрезка CB.

Поэтому использование точек золотого сечения для определения границ локализующих отрезков позволяет на каждой итерации вычислять значение функции лишь в одной новой точке.

На первой итерации принимаем $a_1 = a$, $b_1 = b$ и вычисляем:

Далее, получив значения функции в точках и , сравниваем их:

Если , то , .

Если , то , .

Далее сравниваем $f(c_2)$ и $f(d_2)$, определяя новые значения a_3, b_3 и т.д., пока не выполнится условие

$$\frac{b_i - a_i}{2} < \varepsilon.$$

На каждой итерации длина локализующего отрезка уменьшается в $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ раз, следовательно:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{i-1} (b - a).$$

3. Методы одномерной оптимизации, использующие производные

Рассмотрим методы минимизации, в которых используются значения производных целевой функции $y = f(x)$. Для выпуклой дифференцируемой функции равенство $f'(x) = 0$ является не только необходимым, но и достаточным условием глобального минимума. Поэтому, если известно, что x является внутренней точкой отрезка $[a; b]$, то приближенное равенство $f'(\mathbf{x}) \approx 0$ или $|f'(x)| \leq \varepsilon$ может служить условием остановки вычислений в рассматриваемых ниже методах.

Метод Ньютона

Метод Ньютона часто используется на завершающем этапе минимизации, когда x_0 – точка минимума грубо найдена другим, менее трудоемким методом и требуется найти x^* с большой точностью.

Предполагается, что функция $y = f(x)$ – дважды дифференцируемая функция, причем $f''(x) > 0$ (это гарантирует выпуклость $f(x)$). Работа алгоритма начинается в точке x_0, которая представляет начальное приближение координаты стационарной точки, или корня уравнения $f'(x) = 0$. В очередной точке x_k $(k = 0,1,\ldots)$ строится линейная аппроксимация функции $f'(x)$ и точка, в которой аппроксимирующая линейная функция обращается в нуль, принимается в качестве следующего приближения x_{k+1} (рис. 1.10). Если точка x_k принята в качестве текущего приближения к стационарной точке, то уравнение касательной к графику точке $x = x_k$ имеет вид:

$$f'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k).$$

В точке пересечения данной касательной оси абсцисс первая производная равна:

$$f'(x_{k+1}) = 0.$$

Уравнение касательной в точке x_{k+1}:

Окончательно:

В зависимости от выбора начальной точки и вида функции алгоритм может как сходиться к истинной стационарной точке, так и расходиться, что отражено на рисунке 1.10. Если начальная точка расположена правее x_0, то получаемые в результате последовательных приближений точки удаляются от стационарной точки x^*.

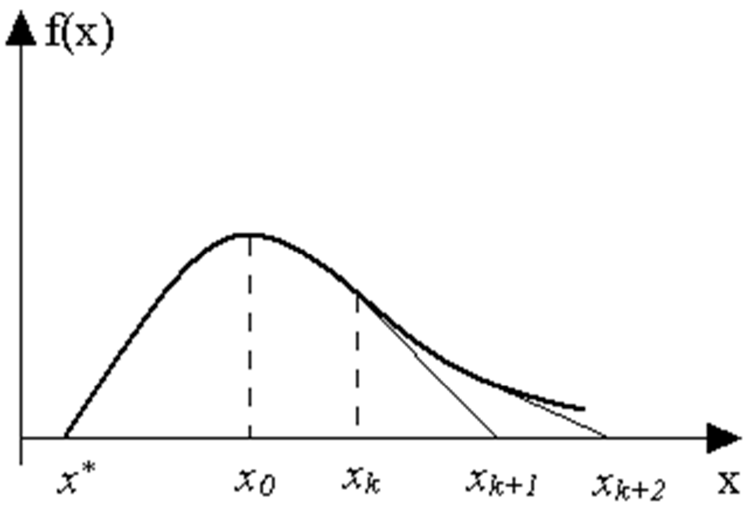

Рис. 1.10. Метод Ньютона (отсутствие сходимости)

Метод парабол

Этот метод применяется, когда сделано несколько шагов более грубыми методами, то есть отрезок локализации точки минимума достаточно мал.

Итак, найти $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ с точностью ε.

Выбираем $x_1 : a < x_1 < b$.

Разложение функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора, ограниченное тремя слагаемыми имеет следующий вид:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'^{(x_k)}(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2.$$

Найдем $f'(x_k)$. Значение функции в точке x_k+h:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)(x_k + h - x_k).$$

Отсюда:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + h \cdot f'(x_k)$$

Значение функции в точке x_k-h:

$$f(x_k - h) = f(x_k) - h \cdot f'(x_k)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):

$$f(x_k + h) - f(x_k - h) = 2h \cdot f'(x_k)$$

$$f'(x_k) \approx$$

Аналогично находим вторую производную $f'(x_k)$:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)(x + h - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_k + h - x_k)^2$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) + f'(x_k)(x - h - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_k - h - x_k)^2$$

$$f(x_k + h) + f(x_k - h) = 2f(x_k) + h^2 f''(x_k)$$

Отсюда:

$$f''(x_k) = \frac{1}{h^2}[f(x_k - h) - 2f(x_k) + f(x_k + h)]$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{1}{2h}[f(x_k + h) - f(x_k - h)]}{\frac{1}{h^2}[f(x_k - h) - 2f(x_k) + f(x_k + h)]}$$

Окончательно:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h[f(x_k + h) - f(x_k - h)]}{2[f(x_k - h) - 2f(x_k) + f(x_k + h)]}$$

Метод средней точки

Дана выпуклая функция $y = f(x)$. Известно, что минимум функции локализован на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим метод средней точки для поиска минимума.

При использовании данного метода необходимо, чтобы функция была дифференцируема на данном отрезке. Рисунок 1.11 иллюстрирует применение метода средней точки для поиска минимума. Очевидно, что в значение производной и .

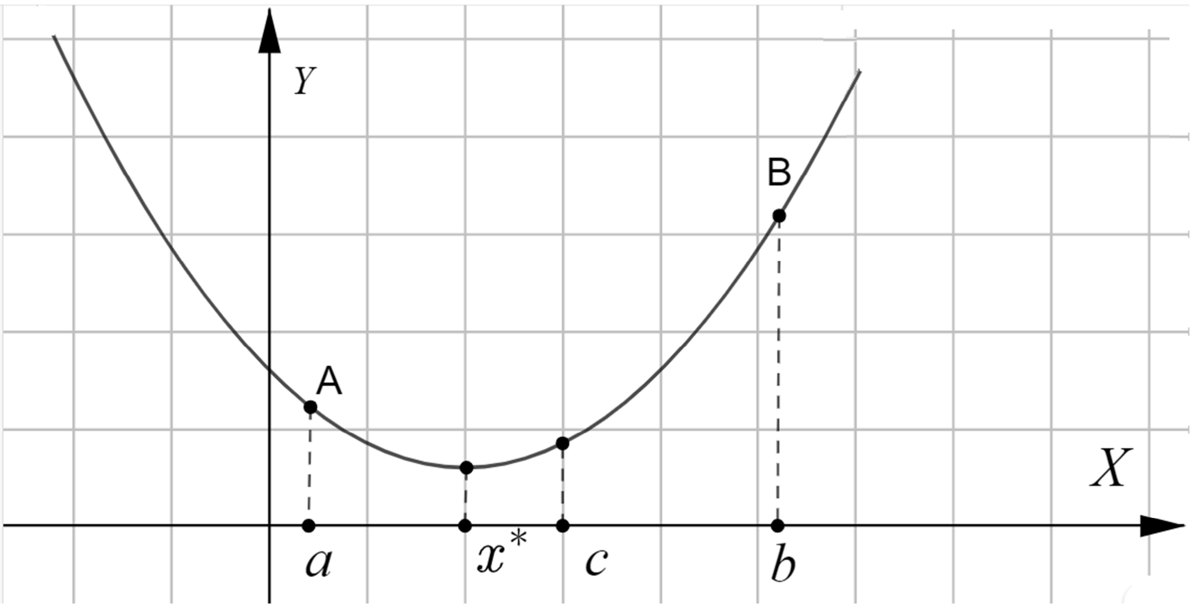

Рис. 1.11. Метод средней точки

На первом шаге находят середину отрезка $[a, b]$. Присваивают a_1=a, $b_1 = b$. Рассчитывают c_1:

Проверяется условие остановы:

Проверяют знак производной функции в точки c_1. Если

, то тогда поиски продолжатся на отрезке . При этом a_2=a, $b_2 = c_1$.

Если $f'(x = c_1) < 0$, то тогда поиски продолжатся на отрезке $[c_1, b_1]$. При этом $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$.

На втором шаге проводятся следующие вычисления:

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие останова.

Метод хорд

Равенство $f'(x) = 0$ является необходимым и достаточным условием глобального минимума выпуклой дифференцируемой функции $f(x)$. Поэтому если на концах отрезка $[c; d]$ производная $f'(x)$ имеет разные знаки, т.е. $f'(c)\ f'(d) < 0$, то на интервале $(a; b)$ найдется точка, в которой $f'(x)$ обращается в нуль, и поиск точки минимума $f(\mathrm{x})$ на $[c; d]$ эквивалентен решению уравнения:

$$f'(x) = 0, x \in (a; b) \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что при $f'(c)\ f'(d) < 0$ любой приближенный метод решения уравнения (1.1) можно рассматривать как метод минимизации выпуклой дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[c; d]$.

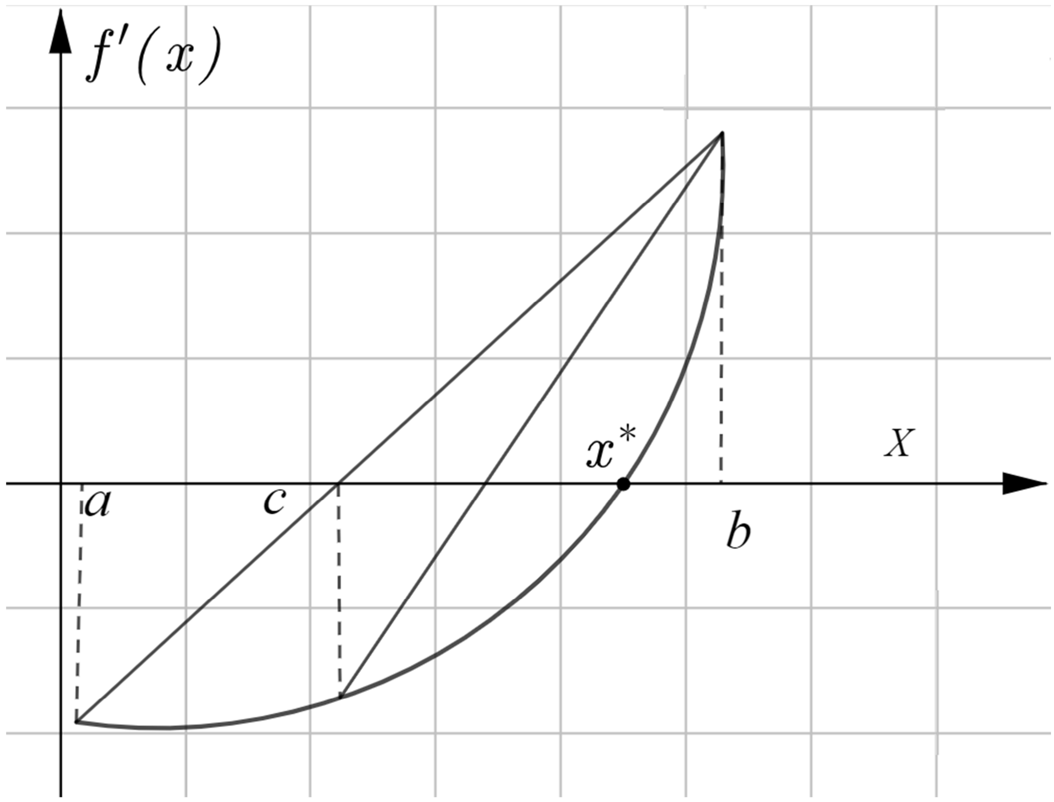

Рис. 1.12. Метод хорд

Предположим, что в процессе поиска стационарной точки функции $f(x)$ в интервале обнаружены две точки a и b, в которых знаки производной различны. В этом случае алгоритм метода секущих позволяет аппроксимировать функцию $f'(x)$ «секущей прямой» и найти точку, в которой секущая графика $f'(x)$ пересекает ось абсцисс (рис. 1.12).

Составим уравнение хорды с помощью уравнения прямой проходящей через две точки:

Найдем координату точки, в которой хорда пересекает ось абсцисс. В данном случае $f'(x) = 0$:

$$x = a - \frac{f'(a)(b-a)}{f'(b) - f'(a)}$$

Для первой итерации:

$$a_1 = a$$

$$x_1 = a_1 - \frac{f'(a_1)(b-a_1)}{f'(b) - f'(a_1)}$$

Вторая итерация:

$$a_2 = x_1$$

$$x_1 = a_1 - \frac{f'(a_1)(b-a_1)}{f'(b) - f'(a_1)}$$

Для k-й итерации:

$$a_2 = x_{k-1}$$

$$x_k = a_k - \frac{f'(a_k)(b-a_k)}{f'(b) - f'(a_k)}$$

Расчеты проводятся до тех пока не выполнится условие останова:

$$|f'(x_k)| < \varepsilon$$

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 2.1. Предприятие выпускает два вида продукции: P_1 и P_2. При изготовлении данной продукции используются ресурсы R_1, R_2 и R_3. В данной задаче предполагается, что ресурсы ограничены. В таблице 2.1 приведены запасы ресурсов, а также расход ресурсов на изготовление одной единицы продукции.

Таблица 2.1

Запасы ресурсов и расход ресурсов на изготовление одной единицы продукции

Ресурсы	Запасы ресурсов, условные единицы	Затраты ресурсов на изготовление одной единицы продукции, условные единицы	
		P_1	P_2
R_1	90	5	3
R_2	180	9	10
R_3	80	-	8

Будем считать, что вся изготовленная продукция будет реализована. Прибыль, которую получает предприятие при реализации одной единицу продукции P_1, составляет 5 руб., а при реализации продукции P_2 – 8 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Составим экономико-математическую модель данной задачи. Объем производства первой продукции обозначим x_1, второй – x_2. Таким образом, план производства будет представлять собой вектор $X = (x_1, x_2)$. Из таблицы

2.1 видно, что для исполнения данного плана ресурса R_1 потребуется в объеме $5x_1 + 3x_2$. Очевидно, что затраты на изготовление продукции не могут превысить запасы R_1, которые равны 90 условным единицам. Таким образом, можно составить следующее неравенство:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 90$$

Рассуждая аналогично, получим еще два неравенства:

$$9x_1 + 10x_2 \leq 180$$

$$8x_1 \leq 80$$

Учитывая также, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, окончательно запишем систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 180 \\ 8x_1 \leq 80 \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0 \qquad (2.2)$$

Суммарная прибыль F от реализации двух видов продукции составит:

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 \qquad (2.3)$$

Сформулируем требование задачи с использованием построенной экономико-математической модели: найти такой план продукции $X= (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений (2.1) и условию (2.2), при котором функция (2.3) принимает максимальное значение.

Рассмотренная задача называется *задачей об оптимальном распределении ресурсов*.

Задача обобщается на случай выпуска n видов продукции с использованием m видов ресурсов. Найти такой план производства продукции $X= (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \qquad (2.4)$$

и условию:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n \quad (2.5)$$

при котором функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (2.6)$$

принимает максимальное значение.

Функция $F(x_1, x_2, .., x_n)$ называется *целевой функцией*. В правой части выражения (2.6) находится сумма произведений прибыли c_j на соответствующий объем продукции x_j, т.е. средства достижения цели – максимальной прибыли F, которая расположена в левой части уравнения.

Определение 2.1. Функция $F(x_1, x_2, .., x_n)$, которая связывает цель и средства её достижения называется целевой функцией.

К функции $F(x_1, x_2, .., x_n)$ применяется также термин *линейная функция*.

Задача об оптимальном использовании ресурсов является частным случаем задачи линейного программирования.

Определение 2.2. *Линейное программирование* – это раздел математики, в котором изучаются теория и методика решения экстремальных задач (поиска максимума и минимума) на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых с помощью систем линейных уравнений и неравенств.

К задачам линейного программирования относятся также задача о раскрое, задача о составлении оптимального рациона питания, транспортная задача и другие.

Линейное программирование является частью более общего направления математической науки – математического программирования, которое еще делится и на нелинейное программирование.

Определение 2.3. *Математическое программирование* – это математическая дисциплина, в которой разрабатываются методы отыскания экстремальных значений *целевой функции* среди множества ее возможных значений, определяемых ограничениями.

В задаче об оптимальном использовании ресурсов целевая функции максимизируется. Рассмотрим задачу линейного программирования, в которой функция принимает минимальное значение на примере задачи о составлении рациона питания.

Задача 2.2. Предположим на ферме «Рога и копыта» выращивают сельскохозяйственных животных. При этом используют только два вида корма: N_1 и N_2. Работниками фермы был определен минимальный объем питательный веществ (белков, жиров и углеводов), который обеспечит оптимальный ежесуточный прирост веса. Стоимость кормов равна соответственно 10 и 6 руб./кг. В таблице 2.2 приведено содержание полезных веществ в кормах и минимальный объем ежесуточного потребления на 10 кг веса сельскохозяйственного животного.

Таблица 2.2

Содержание питательных веществ в 1 кг корма и минимальный объем потребления питательных веществ

Питательные вещества	Минимальный объем потребления питательных веществ, условные единицы	Содержание питательных веществ в 1 кг корма, условные единицы	
		N_1	N_2
Белки	120	80	20
Жиры	40	20	10
Углеводы	800	600	400
Минералы	60	20	30

Необходимо составить такой рацион питания животных, чтобы их ежесуточные потребности в питательных веществах были удовлетворены, при этом стоимость кормов была минимальной.

Составим экономико-математическую модель данной задачи. Объем корма N_1 обозначим x_1, N_2 – x_2. Таким образом, рацион питания животных будет представлять собой вектор $X= (x_1, x_2)$. Белки поступают в организм животного при поедании двух видом кормов в объеме $80x_1 + 20x_2$. Поскольку ежесуточное потребление белков не должно быть ниже 120 усл. ед. на 10 кг веса животного в сутки, то получим следующее неравенство:

$$80x_1 + 20x_2 \geq 120$$

Рассуждая аналогично для остальных питательных веществ, получим еще три неравенства:

$$20x_1 + 10x_2 \geq 40$$

$$600x_1 + 400x_2 \geq 800$$

$$20x_1 + 30x_2 \geq 60$$

Учитывая также, что переменные x_1 и x_2 должны быть неотрицательными окончательно запишем систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 120 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 40 \\ 600 + 400x_2 \geq 800 \\ 20x_1 + 30x_2 \geq 60 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0 \tag{2.8}$$

Суммарная затраты F от при покупки двух видов кормов составит:

$$F(x_1, x_2) = 10x_1 + 6x_2 \tag{2.9}$$

Сформулируем требование задачи с использованием построенной экономико-математической модели: составить такой рацион питания сельскохозяйственных животных $X= (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений (2.1) и условию (2.2), при котором функция (2.3) принимает минимальное значение.

Задачу о диете можно обобщить на n полезных веществ и m видов кормов. В системе ограничений могут также содержаться равенства. Поэтому в общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом:

Найти вектор $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \cdots + a_{k+1,n}x_n \ge b_{k+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \ge b_l \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \cdots + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_{1n} = b_m \end{cases} \tag{2.10}$$

и условию:

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, n \tag{2.11}$$

при котором целевая функция принимает оптимальное значение (максимум или минимум):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(min) \tag{2.12}$$

Если в систему ограничений (2.10) включены только уравнения и необходимо найти максимум целевой функции, то такая задача будет называться *задачей линейного программирования в канонической форме*. Ограничение в виде неравенства исходной задачи, которое имеет вид «≤», можно преобразовать в уравнение, добавив к его левой части дополнительную неотрицательную переменную, а ограничение – неравенство вида «≥» – путем вычитания из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Чтобы преобразовать (2.12) из условия поиска минимума целевой функции в условие поиска максимума, то для этого необходимо перед выражением справа поставить знак «минус».

2. Теоретические предпосылки для решения задачи линейного программирования

Рассмотрим некоторые теоретические сведения из разделов линейной алгебры и теории выпуклых множеств, которые потребуется при решении задачи линейного программирования.

Определение 2.4. Множество точек называется *выпуклым*, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок, который их соединяет. В противном случае множество называется *невыпуклым*.

На рисунке 2.1 показаны выпуклый многоугольник (2.1*а*) и невыпуклый многоугольник (2.1.*б*). В трехмерном пространстве речь шла бы, соответственно о выпуклом или невыпуклом многограннике.

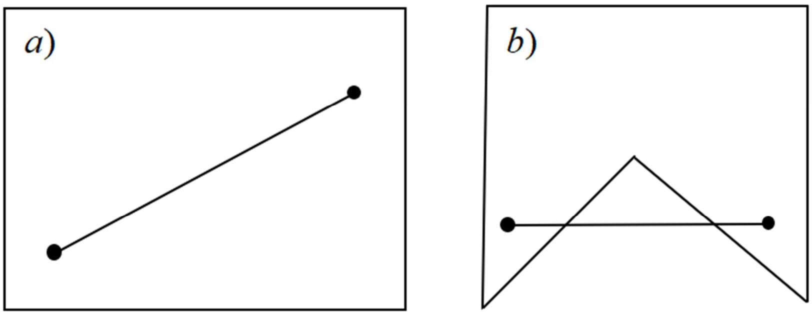

Рис. 2.1. Пример выпуклого (*a*) и невыпуклого (b) множества

Однако выпуклыми множествами могут быть не только многоугольники. Например, на плоскости – круг, сектор, отрезок, многоугольная область; в трехмерном пространстве: куб, пирамида, полуплоскость и т.д.

Выпуклые множества обладают важным свойством: пересечение (общая часть) двух выпуклых множеств также выпуклое множество.

Определение 2.5. Точка множества называется внутренней, если в некоторой ее окрестности содержатся только точки данного множества.

Определение 2.6. Точка множества называется граничной, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие данному множеству.

Определение 2.7. Точка выпуклого множества называется угловой (или крайней), если через нее нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек данного множества и для которого она была бы внутренней.

На рисунке 2.2 приведены примеры внутренних, граничных и угловых точек.

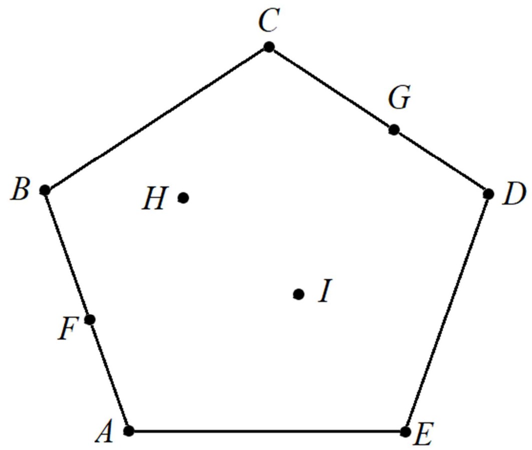

Рис. 2.2. Угловые точки – *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*; граничные точки – *F*, *G*; внутренние точки – *H*, *I*

Для внутреннего многоугольника угловыми точками являются все его вершины, для отрезка – его концы.

Определение 2.8. Множество точек называется замкнутым, если включает все свои граничные точки.

Определение 2.9. Множество точек называется ограниченным, если существует шар (круг) радиуса конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество, в противном случае множество называется неограниченным.

Определение 2.10. Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником (многоугольником), если оно ограниченное, и выпуклой многогранной (многоугольной) областью, если оно неограниченное.

Определение 2.11. Точка X называется выпуклой линейной комбинацией точек X_1, X_2, …, X_n, если выполняются условия:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n \qquad (2.13)$$

$$\alpha_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

Если $n = 2$, то выпуклой линейной комбинацией двух точек является соединяющий их отрезок.

Определение 2.12. Множество точек является выпуклым, если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Рассмотрим геометрическое решение линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10 \qquad (2.14)$$

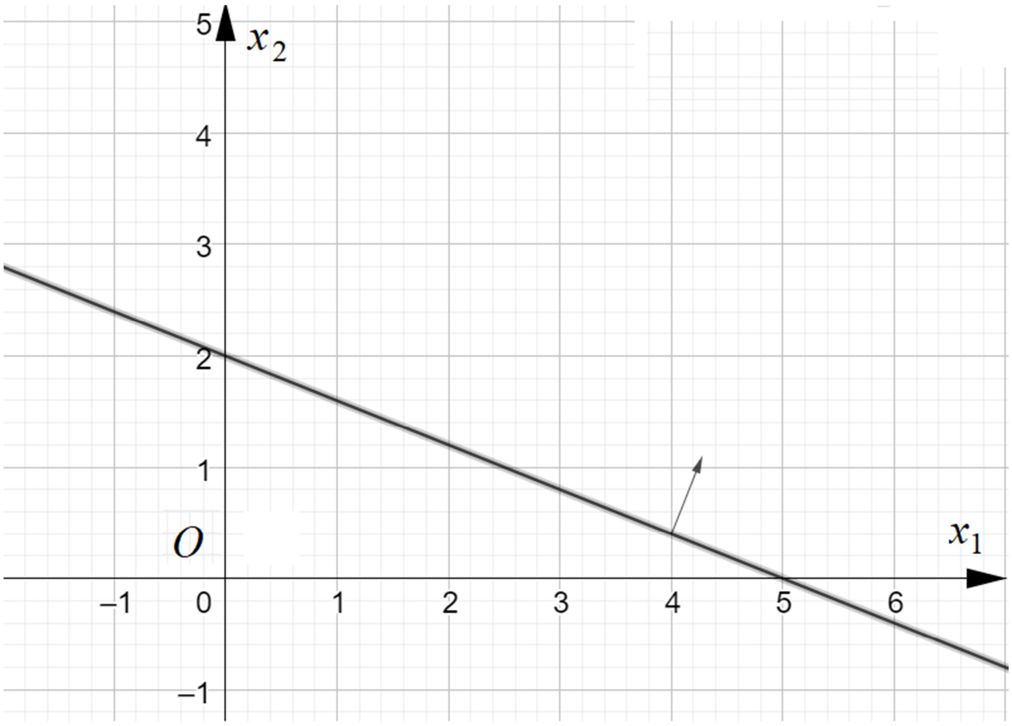

Рис. 2.3. Решение неравенства (2.14)

Построим в прямоугольной системе координат прямую

(см. рис. 2.3). Данная прямая делит плоскость на две части. Решением неравенства (2.14) будет являться одна из полуплоскостей, образованных прямой. Чтобы определить, какая из частей является решением неравенства (2.14), достаточно подставить в него координаты любой точки плоскостей. Удобнее взять точку начала координат: *O* (0, 0):

Данное выражение не выполняется, значит, полуплоскость, содержащая начало координат, не является решением неравенства. Таким образом, решением (2.14) будет полуплоскость, которая не содержит начало координат. На рисунке 2.3 она показана стрелкой.

Ограничения в рассмотренных выше задачах линейного программирования представляют собой неравенства. Множество решений системы неравенств может быть:

- выпуклым многоугольником;

- выпуклой многоугольной областью;
- пустым (если система противоречива).

Сформулируем ряд теорем, которые являются основой для решения задачи линейного программирования.

Теорема 2.1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым и представляет собой выпуклый многогранник или выпуклую многогранную область.

Теорема 2.2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (или минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Систему ограничений-неравенств задачи об оптимальном использовании ресурсов можно преобразовать к каноническому виду, добавив дополнительные неотрицательные переменные. В результате получится система, которая содержит m уравнений и $n+m$ переменных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad (2.15)$$

Будем предполагать, что данная система совместная и максимальное число линейно независимых уравнений равно m. Соответственно, ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен m. Поскольку $n+m>m$, то данная система будет иметь бесконечное множество решений.

Определение 2.13. m переменных называются основными (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них не равен нулю. Остальные n переменных называются неосновными (или свободными).

При этом одни переменные выражаются через другие, например:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \beta_1 - \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ x_{n+2} = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} = \beta_m - \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n \end{cases} \quad (2.16)$$

Среди всех возможных решений в нашем случае представляют интерес те решения, при которых переменные, расположенные в правой части уравнений, равны нулю. Такие решения называются базисными.

Можно комбинировать состав переменных в левой части системы (2.16) и таким образом получать различные базисные решение. Общее количество таких комбинаций равно количеству сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Поскольку возможны варианты, когда определитель из матрицы коэффициентов при неизвестных может оказаться равным нулю, то общее число базисных решений не превышает C_n^m.

Теорема 2.3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и, наоборот, каждой угловой точке многогранника решения соответствует допустимое базисное решение.

Таким образом, из данных теорем непосредственно вытекает важное следствие: если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает, по крайней мере, с одним из ее допустимых базисных решений. Оптимальное решение целевой функции задачи линейного программирования необходимо искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.

3. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод для решения задачи линейного программирования применим в том случае, когда в модели содержатся две неизвестные. Если переменных больше, то тогда применяется симплексный метод.

Этапы решения задачи линейного программирования графическим методом

1. Построение множества допустимых решений. Оно будет представлять собой либо выпуклый многоугольник, либо выпуклую многоугольную область. Если множество пустое, то решений задача не имеет.

2. Поиск оптимального решения. Строится линия уровня $F(x_1, x_2) = \text{const}$. Затем перпендикулярно к ней проводится вектор $\vec{N}$, представляющий собой градиент линейной функции. Линию уровня смещают вдоль вектора $\vec{N}$. Первая точка множества допустимых решений, которую пересечет линия уровня, будет минимумом линейной функции, а последняя – максимумом. Если линейная функция не ограничена снизу в задаче на минимум (сверху – в задаче на максимум), то это означает, что задача не имеет конечного оптимума. Возможен вариант, при котором множество оптимальных решений будет принадлежать отрезку. Это означает, что множество оптимальных решений можно представить как выпуклую линейную комбинацию двух угловых точек многоугольника решений.

Решим графическим методом задачу об оптимальном использовании ресурсов, экономико-математическая модель которой которая была построена в пункте 1 данной главы.

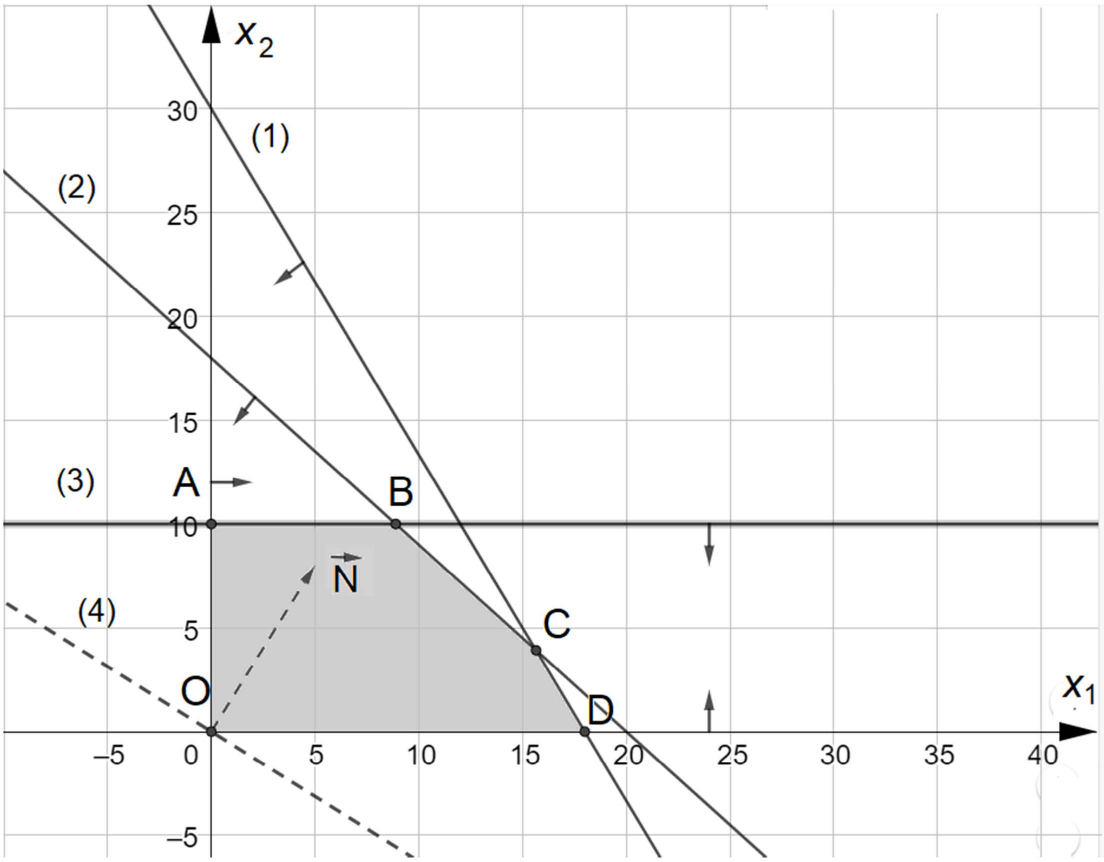

Рис. 2.4. Геометрическое решение задачи об оптимальном использовании ресурсов

В прямоугольной системе координат (рис. 2.4) строим многоугольник решений. Для этого решаем систему неравенств (2.1) и условия неотрицательности переменных (2.2), используя графический метод. Процесс построения многоугольника решений происходит последовательно. Сначала находим решение первого неравенства   . Для этого проводим прямую   (на рис. 2.4. по номером 1), которая делит плоскость на две части. Решением неравенства является полуплоскость, содержащая начало координат. На рисунке это показано стрелкой. В процессе решения остальных неравенств плоскость сокращается, «отбрасываются ненужные части плоскости». Номера прямых на рисунке соответствуют порядку записи неравенств в системе (2.2). Итоговым результатом решения всех неравенств будет выпуклый многоугольник *ABCDO*. Оптимум линейной функции будет лежать в одной из угловых точек. Для его нахождения можно пересчитать значение F в каждой угловой точке и выбрать ту, в которой целевая функция примет максимальное значение. Однако такой подход нерационален. Для поиска оптимума построим линию уровня и будет смещать ее вдоль градиента.

Линия уровня имеет вид:

$$5x_1 + 8x_2 = \text{const}$$

Обычно линию уровня проводят через начало координат, поэтому уравнение будет иметь вид:

$$5x_1 + 8x_2 = 0$$

На рисунке 2.4. линия уровня имеет обозначение «(4)». Найдем градиент функции $F(x_1, x_2)$. По определению:

$$grad\big(F(x_1, x_2)\big) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\vec{\imath} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\vec{\jmath}$$

Вычислив частные производные линейной функции, найдем градиент:

$$grad\big(F(x_1, x_2)\big) = 5\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$$

На рисунке 2.4 градиент линейной функции обозначен как вектор $\vec{N}$. Поскольку задача об оптимальном использовании ресурсов подразумевает поиск максимума, то при перемещении линии уровня (2.14) вдоль вектора (2.15) последней точкой многоугольника, которую пересечет линия уровня, будет точка B. Чтобы найти точные координаты данной точки, надо решить систему уравнений, с помощью которых и была образована данная точка:

$$\begin{cases} 8x_2 = 80 \\ 9x_1 + 10x_2 = 180 \end{cases}$$

Решением данной системы является точка $C\left(\frac{80}{9}, 10\right)$.

Максимум линейной функции равен

$F_{max} = 5 \cdot \frac{80}{9} + 8 \cdot 10 = \frac{1120}{9}$ руб.≈124,4 руб.

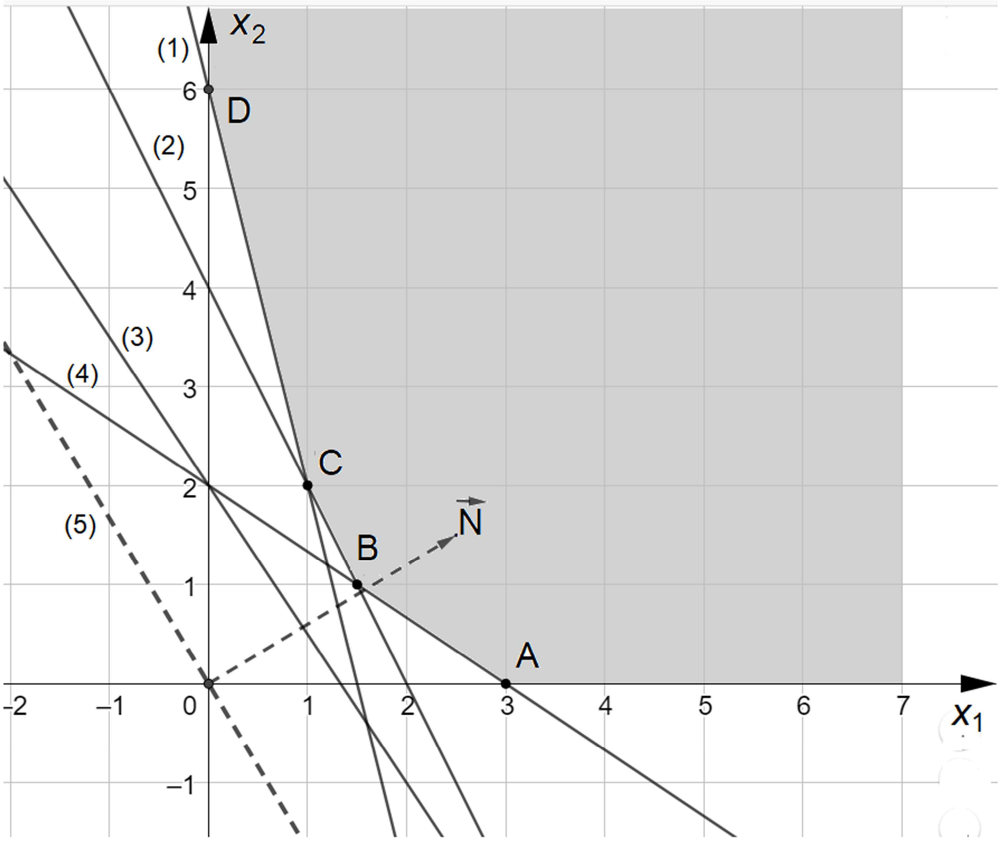

Рис. 2.5. Геометрическое решение задачи о составлении рациона питания

Решим теперь графическим методом задачу о составлении рациона.

При построении многоугольника решений видно, что он представляет собой неограниченную многоугольную область (рис. 2.5). Линия уровня =0 на рисунке изображена под номером 5. Градиент линейной функции определяется вектором .

Очевидно, что точка минимума – это точка *B* «входа» в многогранник решений, поскольку при дальнейшем перемещении линии уровня в направлении вектора значения линейной функции увеличиваются.

Точка *B* образована в результата пересечения прямых (прямая 2) и (прямая 4). Решим систему:

Или:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

Находим координаты точки $B(1{,}5, 1)$. Значение целевой функции равно:

$$F_{\min} = 10 \cdot 1{,}5 + 6 * 1 = 21 \text{ руб.}$$

Таким образом, минимальная стоимость рациона составляет 21 рубль, если в него включить 1,5 кг корма N_1 и один кг корма N_2 в сутки в расчете на 10 кг веса сельскохозяйственного животного.

3. Симплексный метод

Симплексный метод в отличие от геометрического универсален. С его помощью можно решить любую задачу линейного программирования. Предложен этот метод был американским математиком Дж. Данцигом в 1946 г. Существенный вклад в развитие методов решения задач ЛП внёс российский математик, лауреат Нобелевской премии по экономике Л.В. Канторович (1912-1986).

Поиск оптимального решения задачи линейного программирования нужно ограничить рассмотрением только базисных решений системы ограничений-уравнений, число которых всегда конечно. Но даже при небольших значениях m и n число базисных решений оказывается достаточно большим, и беспорядочный перебор таких решений является громоздким и нецелесообразным. Симплексный метод позволяет организовать поиск исходного базисного решения, а также порядок перехода к другим базисным решениям.

Идея данного метода заключается в следующем. Систему ограничений задачи линейного программирования преобразуют к канонической форме. Находят любое базисное решение этой системы. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то осуществляется переход к другому, обязательно допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении целевая функция, если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему. С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Таким образом, симплексный метод состоит из двух этапов:

- нахождение допустимого базисного решения или установления факта несовместности системы ограничений;

- нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Но так как число базисных решений всегда ограничено, то и ограничено и число шагов симплексного метода.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника к соседней, в которой линейная функция принимает лучшее (по крайней мере, не худшее) значение (по отношению к цели задачи) до тех пор, пока не будет найдено оптимальное значение функции цели (если задача имеет конечный оптимум).

Решим задачу об оптимальном использовании ресурсов симплексным методом, которая ранее была решена графически. Представим задачу в канонической форме. Для этого введем три дополнительные переменные, которые имеют смысл остатков ресурсов после окончания производство всех запланированных изделий, а именно: x_3, x_4, x_5 – остатки ресурсов R_1, R_2 и R_3 соответственно.

Задача об оптимальном использовании ресурсов в каноническом виде:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 90 \\ 9x_1 + 10x_2 + x_4 = 180 \\ 8x_2 + x_5 = 80 \end{cases} \qquad (2.17)$$

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0$$

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 \to \max$$

Решение задачи будем искать среди допустимых базисных решений системы (2.17). Она содержит три уравнения с пятью неизвестными. Число основных (базисных) переменных должно равняться трем, а число неосновных – двум.

Для решения задачи симплексным методом первоначально надо найти любое базисное решение. В данном случае это легко сделать, выбрав в качестве трех основных переменных добавочные переменные x_3, x_4, x_5. Так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу, то соответствующий ей определитель будет равен единице, т.е. отличен от нуля, и их можно использовать в качестве базисных переменных.

1 шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5; свободные переменные: x_1, x_2. В системе (2.17) основные переменные выразим через свободные. Тогда:

$$\begin{cases} x_3 = 90 - 5x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 180 - 9x_1 - 10x_2 \\ x_5 = 80 - 8x_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Считая неосновные переменные x_1 и x_2 равными нулю, получим базисное решение $X_1 = (0; 0; 90; 180; 80)$, которое оказалось допустимым, поскольку все переменные неотрицательные. (Отметим, что не всегда на первом же шаге получается допустимое базисное решение.) Данное решение называют *опорным***.** При этом решении целевая функция равна $F(x_1, x_2) = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$. Полученное решение соответствует точке O многогранника решений на рисунке 2.4.

Теперь от этого первоначального решения нужно перейти к другому, при котором F увеличится. Из рассмотрения целевой функции видно, что ее значение возрастает при увеличении значений переменных x_1 и x_2, поэтому эти переменные невыгодно считать свободными (т.е. равными нулю), их нужно перевести в число основных. Это и будет означать переход к новому базисному решению. При симплексном методе на каждом шаге решения предполагается перевод в число основных только одной из свободных переменных.

Из выражения для функции цели $F(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2$ ясно, что реализация одного изделия вида P_2 приносит большую сумму (8 руб.), чем реализация одного изделия вида P_1 (5 руб.). Из этого следует, что вводить в базис целесообразнее сначала переменную x_2. Одна из основных переменных должна быть переведена в разряд свободных. Мы заинтересованы сделать значение x_2 как можно большим, так как это соответствует максимизации F. Но рост значения x_2 ограничен требованием неотрицательности переменных. Так, из первого уравнения (2.18) следует, что переменная x_2 не должна превышать значения 90/3=30, так как только при этих значениях переменная x_3 остается положительной. Переменная x_1 остается равной нулю как свободная переменная.

Из второго уравнения (20.18) следует, что $x_2 \leq 180/10=18$, а из третьего $-x_2 \leq 80/8=10$. Очевидно, что для ответа на вопрос, какую переменную нужно ввести в число свободных, нужно принять:

$$x_2 = \{30, 18, 10\} = 10$$

В случае одинаковых знаков или отсутствия в уравнении переменной, переводимой в основные, соответствующее оценочное отношение считается равным бесконечности.

Увеличение x_2 наиболее «опасно» для переменной x_5, т.к. она раньше других становится меньше нуля. Поэтому переменную x_5 следует вывести из базиса. Окончательно переменную x_2 из свободных переводим в базис, а переменную x_5 делаем свободной.

Третье уравнение системы (2.18) называется разрешающим, из него надо выразить переменную x_2 и подставить в другие уравнения.

2 шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_4; свободные переменные: x_1, x_5. Выразим основные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 10 - \frac{1}{8}x_5 \\ x_3 = 60 - 5x_1 + \frac{3}{8}x_5 \\ x_4 = 80 - 9x_1 + \frac{10}{8}x_5 \end{cases} \qquad (2.19)$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_1, x_5) = 80 + 5x_1 - x_5$$

Второе базисное решение: X_2 = (0; 10; 60; 80; 0). Значение целевой функции $F(x_1, x_5) = 80 + 5 \cdot 0 - 0 = 80$. Полученное решение соответствует точке A многогранника решений на рисунке 2.4.

Полученное базисное решение допустимое и, действительно, лучше первого. Проведем проверку на оптимальность полученного опорного плана. План будет являться оптимальным, если все коэффициенты при неизвестных в функции цели не являются положительными. У нас функция цели $F(x_1, x_5) = 80 + 5x_1 - x_5$, и коэффициент при x_1 – это число 5>0, решение не является оптимальным, так как увеличение значения переменной x_1 приведет к увеличению функции цели F. Переменную x_1 невыгодно считать свободной, т.е. равной нулю. Её следует ввести в базис вместо одной из базисных переменных. Вместо какой из них определим из системы (2.19). Примем:

$$x_1 = \min\{10/0, 60/5, 80/9\} = \min\{\infty, 12, 80/9\} = \frac{80}{9}$$

Увеличение x_1 наиболее «опасно» для переменной x_4, т.к. она раньше других становится меньше нуля, поэтому ее следует вывести из основных в свободные. Это позволит еще более приблизиться к оптимальному решению. Таким образом, третье уравнение системы (2.19) является разрешающим. Из него необходимо выразить переменную x_1 и подставить в остальные уравнения.

3 шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3; свободные переменные: x_4, x_5. Выразим основные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{80}{9} - \frac{1}{9}x_4 + \frac{5}{36}x_5 \\ x_2 = 10 - \frac{1}{8}x_5 \\ x_3 = \frac{140}{9} + \frac{5}{9}x_4 - \frac{29}{36}x_5 \end{cases} \tag{2.20}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$F(x_4, x_5) = \frac{1120}{9} - \frac{5}{9}x_4 - \frac{11}{36}x_5$$

Третье базисное решение: X_3 = (80/9; 10; 140/9; 0; 0). Значение целевой функции $F(x_4, x_5) = \frac{1120}{9} - \frac{5}{9} \cdot 0 - \frac{11}{36} \cdot 0 = \frac{1120}{9} \approx 124{,}4$ руб.

Полученное решение соответствует точке *B* многогранника решений на рисунке 2.4. Данное базисное решение является допустимым и лучше первых двух. Поскольку у целевой функции все коэффициенты при неосновных переменных отрицательные, то дальнейшее увеличение значений переменных x_4, x_5 приведет к уменьшению значения функции *F*. Таким образом, найденное решение является оптимальным и совпадает с выводами, полученными при решении данной задачи графическим методом.

Окончательно запишем:

X^* = (80/9; 10; 140/9; 0; 0).

$F_{max} \approx 124{,}4$ руб.

Таким образом, чтобы прибыль была максимальной необходимо произвести первой продукции 80/9 единиц, второй продукции 10 единиц. При этом ресурса R_1 останется 140/9 ед., а ресурсы R_2 и R_3 будут израсходованы полностью.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума линейной функции: если в выражении линейной функции через неосновные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.

При определении минимума линейной функции *Z* возможны два пути:

1. Отыскать максимум функции *F*, полагая *F* = -*Z* и учитывая, что $Z_{min} = -F_{max}$.

2. Модифицировать симплексный метод: на каждом шаге уменьшать линейную функцию за счет той неосновной переменной, которая входит в выражение линейной функции с отрицательным коэффициентом.

Критерий оптимальности при отыскании минимума линейной функции: если в выражении функции через неосновные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально.

На каждом шаге симплексного метода какая-либо неосновная переменная переводится в основные, при этом каждое уравнение системы ограничений определяет конечное или бесконечное наибольшее возможное значение этой переменной – оценочное отношение. Ранее встречались различные случаи оценки роста неосновной переменной, которые зависели от знаков и значений свободного члена и коэффициента при переводимой переменной. Сформулируем все возможные случаи. Введем обозначения: x_i – переводимая неосновная переменная, b_j – свободный член, a_{ij} – коэффициент при x_i. В общем виде уравнение $x_j = b_j + \cdots + a_{ij}x_i + \cdots$ определяет наибольшее возможное значение x_i по следующим правилам:

1) $x_i = |b_j/a_{ij}|$, b_j и a_{ij} разного знака и $b_j \neq 0, a_{ij} \neq 0$; например: $x_3 = 8 - 2x_2 + \cdots$, $x_2 = \frac{8}{2} = 4$ или $x_3 = -8 + 2x_2 + \cdots$, $x_2 = \frac{8}{2} = 4$.

2) $x_i = \infty$, если b_j и a_{ij} одного знака и $b_j \neq 0, a_{ij} \neq 0$; например: $x_3 = 8 + 2x_2 + \cdots$, $x_2 = \infty$.

3)$x_i = 0$, если $b_j = 0, a_{ij} < 0$, например, $x_3 = 0 - 2x_2 + \cdots$, $x_2 = 0$.

4)$x_i = \infty$, если $b_j = 0, a_{ij} > 0$; например: $x_3 = 0 + 2x_2 + \cdots$, $x_2 = \infty$..

5) $x_i = \infty$, если $a_{ij} = 0$; например: $x_3 = 5 + 0 \cdot x_2 + \cdots$, $x_3 = -5 + 0 \cdot x_2 + \cdots x_2 = \infty$.

4. Двойственные задачи

Ранее нами была рассмотрена задача об оптимальном использовании ресурсов. Экономико-математическая модель данной задачи имеет следующий вид.

Найти такой план производства продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2.21)$$

и условию:

$$x_j \ge 0, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.22)$$

при котором функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max \qquad (2.23)$$

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы предприятия $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Очевидно, что покупатель заинтересован в том, чтобы затраты на приобретение всех ресурсов Z в объемах $b_1, b_2, \ldots, b_m$ по ценам, соответственно, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ были минимальными. Данное условие можно записать в виде линейной функции:

$$Z(y_1, y_2, \ldots, y_n) = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m \to \min \qquad (2.24)$$

Предприятие, которое продает ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса R_1, a_{21} единиц ресурса $R_2, \ldots, a_{m1}$ единиц ресурса R_m по ценам, соответственно, $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_1, должна быть не менее ее цены c_1. Таким образом, получаем следующее неравенство:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \ge c_1$$

Рассуждая аналогично для других ресурсов получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \geq c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots a_{m1}y_m \geq c_1 \end{cases} \qquad (2.25)$$

Переменные, очевидно, должны быть неотрицательными:

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \qquad (2.26)$$

В результате получим следующую задачу. Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, при котором общие затраты на покупку ресурсов будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции. Данная задача называется *двойственной* к исходной.

Цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m имеют различные названия: учетные, неявные, теневые. В отличие от «внешних» цен x_1, x_2, …, x_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m являются «внутренними», поскольку они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют объективно обусловленными оценками ресурсов.

Свойства двойственных задач

1. В одной из задач ищут максимум целевой функции, в другой – минимум.

2. В обеих задачах есть неотрицательные переменные.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида «≤», а в задаче минимизации – все неравенства вида «≥».

4. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи.

5. Матрицы коэффициентов при переменных в системе ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу.

6. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадают с числом переменных в другой задаче.

Таким образом, для каждой задачи линейного программирования с помощью указанных выше свойств можно составить другую задачу линейного программирования. Эти задачи называются симметричными или взаимно-двойственными. Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Теорема 2.4. Первая теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$$F_{max} = Z_{min} \tag{2.27}$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать следующим образом. Предприятию, имеющему определенные ресурсы R_1, R_2, …, R_m , для получения максимальной прибыли безразлично, производить ли продукцию по оптимальному плану либо продавать ресурсы по оптимальным ценам.

Между переменными взаимно двойственных задач, которые представлены в (2.21) - (2.26) можно установить соответствие, как показано в таблице 2.3.

Таблица 2.3.

<table>
<tr><th colspan="2">Переменные исходной задачи</th></tr>
<tr><td>первоначальные</td><td>дополнительные</td></tr>
<tr><td></td><td>x_{n+1} x_{n+2} … x_{n+i} … x_{n+m}
$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$
y_1 y_2 … y_i … y_m</td></tr>
</table>

$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \cdots & y_{m+j} & \cdots & y_{m+n} \end{matrix}$	
дополнительные	первоначальные
Переменные двойственной задачи к исходной	

Теорема 2.5. Вторая теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.

Задача 2.3. Составим задачу линейного программирования двойственную к задаче об оптимальном использовании ресурсов, которая была сформулирована в пункте 2.1.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 180 \\ 8x_2 \leq 80 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0$$

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

Решение:

Расширенная матрица (A|B) системы ограничений имеет вид:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 90 \\ 9 & 10 & 180 \\ 0 & 8 & 80 \\ 5 & 8 & F \end{array}\right)$$

Транспонируем данную систему:

$$(A|B)^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 9 & 0 & 5 \\ 3 & 10 & 8 & 8 \\ 90 & 180 & 80 & Z \end{array}\right)$$

Из полученной матрицы можно записать целевую функцию двойственной задачи:

$$Z = 90y_1 + 180y_2 + 80y_3 \rightarrow \min$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 5y_1 + 9y_2 \ge 5 \\ 3y_1 + 10y_2 + 8y_3 \ge 8 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

Решение задачи об оптимальном использовании ресурсов было получено ранее:

$$F(x_4, x_5) = \frac{1120}{9} - \frac{5}{9}x_4 - \frac{11}{36}x_5$$

X^* = (80/9; 10; 140/9; 0; 0). Значение целевой функции $F_{max} \approx 124{,}4$ руб.

Найдем решение двойственной задачи, используя теоремы двойственности.

На основе первой теоремы можно записать, что оптимальное значение линейной функции Z_{min} = 124,4 руб. Составим соответствие между переменными двойственных задач, используя таблицу 2.3.

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right) \qquad (2.28)$$

На основе второй теоремы двойственности и соответствия (2.28) запишем целевую функцию, выраженную через неосновные переменные двойственной задачи и оптимальное решение. Целевая функция:

$$Z = \frac{1120}{9} + \frac{140}{9}y_1 + \frac{80}{9}y_4 + 10y_5$$

Оптимальное решение:

$$Y^* = \left(0, \frac{5}{9}, \frac{11}{36}, 0, 0\right)$$

Определение 2.14. Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимум и оптимальное решение исходной задачи с помощью теорем двойственности, называется двойственным симплексным методом.

Этот метод выгодно применять, когда первое базисное решение первой задачи недопустимое или, например, когда число ее ограничений m больше числа переменных n.

Проанализируем компоненты решения взаимно-двойственных задач. В соотношении (2.28) дополнительные переменные исходной задачи x_3, x_4, x_5, представляющие разность между запасами b_i ресурсов R_1, R_2, R_3 и их потреблением, выражают остатки ресурсов, а дополнительные переменные двойственной задачи y_5, y_6, представляющие разность между затратами на ресурсы производства из них единице продукции и ценами c_j продукции P_1, P_2, выражают превышение затрат над ценой.

Ресурсы R_2 и R_3 по оптимальному плану полностью использованы ($x_4^* = 0, x_5^* = 0$), и поэтому объективно обусловленные оценки этих ресурсов ненулевые ($y_2^* = \frac{5}{9}, y_3^* = \frac{11}{36}$). Ресурс R_1 не полностью используется в оптимальном плане ($x_3^* = \frac{140}{9}$), и объективно обусловленная оценка данного ресурс равна нулю.

Таким образом, объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные – нулевые оценки.

5. Транспортная задача

Одной из типичных задач линейного программирования является так называемая транспортная задача. Она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов, а также при организации и планировании производства.

Любую задачу линейного программирования можно решить симплекс-методом. Однако существуют методы, которые учитывают конкретные особенности решаемой задачи, а потому более эффективные. Для транспортной задачи – это метод потенциалов.

Транспортная задача в общем виде формулируется следующим образом. Пусть имеется m поставщиков продукции A_1, A_2, …, A_m и n пунктов потребления продукции B_1, B_2, …, B_n. Обозначим запасы груза в i-ом пункте отправления через $a_i (i = 1, 2, ..., m)$, т.е. $a_1, a_2, a_3, ..., a_m$, а потребность каждого j – ого пункта потребления через $b_j (j = 1, 2, ..., n)$, т.е $b_1, b_2, ..., b_n$. Заданы стоимости перевозки единицы груза c_{ij} от каждого i – ого пункта отправления до каждого j – ого пункта потребления. Требуется определить, какое количество груза x_{ij} необходимо перевезти из каждого i – ого пункта отправления до каждого j – ого пункта потребления так, чтобы:

– вывести грузы всех поставщиков;
– удовлетворить всех потребителей;
– достичь минимального значения общей стоимости перевозок.

Чтобы лучше представить условие задачи, сведем все исходные данные в таблицу 2.4, называемую матрицей планирования перевозок.

Строки таблицы соответствуют поставщикам, а столбцы потребителям. В последней строке записаны заявки каждого потребителя, а в последнем столбце запасы каждого поставщика. В верхних правых углах внутренних клеток таблицы записываются истинные тарифы c_{ij}, а в нижних левых – планируемые перевозки x_{ij}.

Таблица 2.4.

став-	**потребители**						**запасы**
	B_1	B_2	$\dots$	B_j	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1j} x_{1j}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2j} x_{2j}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	$\dots$	c_{ij} x_{ij}	$\dots$	c_{in} x_{in}	a_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mj} x_{mj}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
потреб-ности	b_1	b_2	$\dots$	b_j	$\dots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

При постановке задач перевозки грузов могут возникнуть три различные ситуации:

1) количество груза у всех поставщиков равно потребностям всех потребителей в данном грузе:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ; \tag{2.29}$$

2) количество груза у всех поставщиков больше заказов всех потребителей на данный груз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,; \qquad (2.30)$$

3) количество груза у всех поставщиков меньше потребностей всех потребителей в данном грузе:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,; \qquad (2.31)$$

При выполнении условия (2.29), накладываемого на соотношение запасов груза и потребностей в нем, т.е. при равенстве общих запасов и общих потребностей, экономико-математическая модель транспортной задачи называется **закрытой**, а сама задача – **сбалансированной**.

Модели, для которых запасы не равны потребностям, т.е. выполняются соотношения (2.30) или (2.31), называются – **открытыми**, а задачи – **несбалансированными**.

Из соотношения (2.29) следует, что весь груз, имеющейся у поставщиков, должен быть вывезен, и каждый потребитель должен получить столько груза, сколько ему необходимо, поэтому первая группа ограничений означает, что весь груз, имеющейся у каждого из поставщиков, должен быть вывезен (количество ограничений равно числу поставщиков – m):

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + \ldots + x_{3n} = a_3 \\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \ldots + x_{mn} = a_m
\end{aligned} \qquad (2.32)$$

Вторая группа ограничений означает, что каждый потребитель должен получить ровно столько груза, сколько ему необходимо (количество ограничений равно числу потребителей – n):

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+\ldots+x_{1n}=b_1\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+\ldots+x_{2n}=b_2\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+\ldots+x_{3n}=b_3\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&x_{m1}+x_{m2}+x_{m3}+\ldots+x_{mn}=b_m
\end{aligned} \qquad (2.33)
$$

Третья группа ограничений означает, что количество перевозимого груза должно быть величиной неотрицательной:

$$x_{ij}\geq 0,\quad (i=1,2,\ldots,m),\quad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (2.34)$$

Цель решения транспортной задачи – составить такой план перевозок грузов, при котором стоимость транспортных расходов будет минимальной. Стоимость перевозки единицы груза от *i*-ого пункта отправления до *j*-ого пункта потребления составляет c_{ij}. Стоимость перевозки всего груза x_{ij} от *i*-ого пункта отправления до *j*-ого пункта потребления составляет $x_{ij}c_{ij}$. Суммарная стоимость перевозки единицы груза от всех поставщиков ко всем потребителям должна быть минимальной и будет равна:

$$
\begin{aligned}
F=\ &x_{11}c_{11}+x_{12}c_{12}+x_{13}c_{13}+\ldots+x_{1n}c_{1n}+x_{22}c_{22}+x_{23}c_{23}+\ldots+\\
&+x_{2n}c_{2n}+x_{31}c_{31}+x_{32}c_{32}+x_{33}c_{33}+\ldots+x_{3n}c_{3n}+\ldots+x_{m1}c_{m1}+\\
&+x_{m2}c_{m2}+x_{m3}c_{m3}+\ldots+x_{mn}c_{mn}\to min
\end{aligned} \qquad (2.35)
$$

Математическая модель транспортной задачи в компактной форме имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}c_{ij}\to min\\
&\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,(i=1,2,\ldots,m),\\
&\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,(j=1,2,\ldots,n),\\
&x_{ij}\geq 0,(i=1,2,\ldots,m),(j=1,2,\ldots,n).
\end{aligned} \qquad (2.36)
$$

Разрешимой является только закрытая модель или сбалансированная транспортная задача, т.е. для существования оптимального плана необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.29). Чтобы решить открытую транспортную задачу, ее необходимо сбалансировать, т.е. свести к закрытой. Для сведения открытой транспортной задачи к закрытой необходимо:

1. В случае, когда запасы в пунктах отправления превосходят потребности всех пунктов назначения, т.е. выполнено условие $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, необходимо ввести фиктивного потребителя (пункт назначения) B_{n+1} с потребностью в грузе равной разности общих запасов и общих потребностей: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. Так как введенный потребитель фиктивный, то все истинные тарифы доставки груза полагают равными нулю $c_{i,n+1} = 0$. В реальности излишки груза останутся в пунктах отправления и с введением фиктивного потребителя такая открытая задача станет разрешимой. В этом случае в матрицу планирования перевозок добавится еще один столбец, соответствующий фиктивному потребителю B_{n+1}.

2. В случае, когда запасы в пунктах отправления меньше потребности всех пунктов назначения, т.е. выполнено условие (2.31) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, необходимо ввести фиктивного поставщика (пункт отправления) A_{m+1} с наличием груза в количестве, равном разности общих потребностей и общих запасов: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Так как введенный поставщик фиктивный, то все истинные тарифы $c_{m+1,j}$ доставки груза из этого пункта полагают равными нулю $c_{m+1,j} = 0$.

Особенности экономико-математической модели транспортной задачи по сравнению с другими моделями задач линейного программирования:

– системы ограничений (2.32) и (2.33) сразу имеют вид уравнений, а не неравенств (отпадает необходимость вводить добавочные переменные);

– матрицы коэффициентов при переменных в (2.32) и (2.33) состоят только из 0 и 1;

– число m равно числу строк матрицы планирования (таблица 2.4), а число n – числу столбцов в ней;

– особые методы решения – распределительный метод и различные его модификации;

– любое допустимое решение (с неотрицательными поставками) транспортной задачи $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{mn})$ называется распределением поставок;

– число переменных, входящих в целевую функцию (2.36) и системы ограничений (2.32) – (2.33), равно произведению $m \cdot n$, т.е. числу внутренних клеток таблицы 2.4;

– система уравнений, состоящая из ограничений (2.32), (2.33) и равенства (2.29), линейно зависима и содержит только $m+ n- 1$ линейно-независимых уравнений, следовательно, исходный допустимый базисный план должен иметь $(m+ n– 1)$ базисных переменных и $(mn-(m+n-1))$ свободных (небазисных) переменных равных нулю;

– оптимальному решению транспортной задачи соответствует оптимальное распределение поставок, при котором целевая функция F (2.35) достигает своего минимума; всякое неотрицательное решение систем линейных ограничений (2.32) – (2.34), определяемое матрицей $X=(x_{ij})(i=1, 2, ..., m),(j=1, 2, ..., n)$, называется планом транспортной задачи; план $X^* = (x_{ij}^*)$, при котором F принимает минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи;

– при распределительном методе решения последовательно используются расчетные таблицы, у которых в клетки, соответствующие основным переменным, записывают поставки, а клетки, которые соответствуют неосновным, т.е. равным нулю, переменным, оставляют незаполненными (свободными);

– решение транспортной задачи состоит в переходе от одного распределения поставок к другому распределению, причем новое распределение должно снижать или, по крайней мере, не увеличивать общую стоимость затрат на перевозки и перераспределение осуществляется до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок;

– исследование и решение задачи осуществляется в два этапа: на первом этапе находят исходное опорное решение или убеждаются, что такое решение не существует; на втором этапе производится последовательное улучшение этого плана по определенным правилам до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение и дальнейшее улучшение станет невозможным.

Для получения опорного плана перевозок существует несколько методов, например, метод северо-западного угла, метод минимального тарифа.

Метод северо-западного угла. При использовании этого метода распределение поставок, т.е. определение значений, x_{ij} начинается с левой верхней клетки (она соответствует северо-западному углу на географической карте) таблицы 2.4.

1. Определяем значение x_{11}, сопоставляя значение b_1 – потребности первого потребителя и значение a_1 – запасов у первого поставщика, т.е. выбираем $x_{11} = min \{a_1, b_1\}$.

При этом могут возникнуть три варианта:

а) $a_1 > b_1$ (запас превосходит потребность), в этом случае $x_{11} = b_1$ и весь спрос первого потребителя полностью удовлетворен и первый столбец надо исключить из дальнейшего рассмотрения, а запас первого поставщика уменьшится на величину b_1 и составит $(a_1 - b_1)$, что следует отметить в последнем столбце первой строки;

б) $a_1 < b_1$ (запас меньше потребности), в этом случае $x_{11} = a_1$ и весь запас первого поставщика полностью израсходован, и первую строку надо исключить из дальнейшего рассмотрения, а спрос первого потребителя уменьшится на величину a_1 и составит $(b_1 - a_1)$, что следует отметить в последней строке первого столбца;

в) $a_1 = b_1$ (запас равен потребности), в этом случае $x_{11} = a_1 = b_1$, весь запас первого поставщика полностью израсходован и весь спрос первого потребителя полностью удовлетворен, поэтому первую строку и первый столбец надо исключить из дальнейшего рассмотрения.

2. После исключения соответствующих строк и столбцов в оставшейся части таблицы снова начинаем с северо-западного угла, заполняя поставкой ее верхний левый угол.

3. На последнем шаге процесса заполнения останется одна m-ая строка и один n-ый столбец. После заполнения клетки, стоящей на их пересечении, все запасы будут исчерпаны и потребности удовлетворены.

После окончания процесса распределения поставок необходимо проверить полученный план на вырожденность. Если количество заполненных клеток равно $m+ n- 1$, то план является невырожденным, если меньше, то он вырожденный. В данном случае среди заполненных клеток ищут те, у которых минимальные тарифы перевозок. Их заполняют нулевыми поставками так, чтобы общее количество заполненных клеток стало равно $m+ n- 1$.

Метод минимального тарифа. В отличие от метода северо-западного угла метод минимального тарифа учитывает при построении исходного плана стоимости перевозок, т.е. тарифы c_{ij}. В большинстве случаев он позволяет получить лучший, с точки зрения оптимальности, план перевозок.

Определение значений x_{ij} начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки. Если таких клеток несколько, то выбираем любую из них. В выбранную клетку, номер которой (i, j) помещается поставка $x_{ij} = min\{a_i, b_j\}$.

Строка или столбец, соответствующий наименьшему числу, исключается из дальнейшего рассмотрения, а заявка потребителя или наличие запаса у поставщика уменьшается на соответствующую величину. Если для выбранной клетки $a_i = b_j$, то из дальнейшего рассмотрения исключаются i-ая строка и j-й столбец. Из оставшейся части таблицы вновь выбирают клетку с наименьшей стоимостью и повторяют аналогичные действия. Процесс заполнения клеток продолжается до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности полностью удовлетворены.

Проверка полученного плана на вырожденность и расстановка нулей осуществляется так же, как и для метода северо-западного угла.

Задача 2.4. В таблице 2.5 представлены данные о потребностях трех потребителей и запасы трех поставщиков. В верхних правых углах расположены тарифы перевозок. Составить опорный план методами северо-западного угла и минимального тарифа.

Таблица 2.5

Поставщики	Потребители			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	8	1	80
A_2	4	9	8	70
A_3	1	3	7	50
Потребности	50	90	60	

Решение:

Метод северо-западного угла. Последовательность заполнения клеток:

1. $x_{11} = \min\{80, 50\} = 50$ Первый столбец исключаем из дальнейшего рассмотрения, а запас первого поставщика уменьшается на 50 и становится равным 30.

2. В оставшейся таблице северо-западная клетка находится в первой строке и втором столбце $x_{12} = \min\{30, 90\} = 30$. Запас первого поставщика исчерпан, поэтому первую строку вычеркиваем. Потребности второго потребителя уменьшились и составили 60 единиц.

3. $x_{22} = \min\{70, 60\} = 60$. Потребности второго потребителя полностью удовлетворены, поэтому второй столбец исключаем из рассмотрения. Запасы второго поставщика остались на уровне 10.

4. $x_{23} = \min\{10, 60\} = 10$. У второго поставщика запасы исчерпаны, потребности третьего потребителя составили 50 единиц.

5. В таблице осталась свободной одна клетка. Это последний шаг процесса: $x_{33} = \min\{50, 50\} = 50$.

Количество заполненных клеток равно 5. Следовательно, полученный план невырожденный, т.к. выполняется равенство $m + n - 1 = 3+3-1=5$. Значения базисных переменных: $x_{11} = 50, x_{12} = 30$, $x_{22} = 60$, $x_{23} = 10$, $x_{33} = 50$. Остальные переменные – свободные, их значения равны 0. Значение целевой функции:

$$F = 50 \cdot 6 + 30 \cdot 8 + 60 \cdot 9 + 10 \cdot 8 + 50 \cdot 7 = 1510$$

Построим первоначальный опорный план задачи методом наименьшей стоимости. Последовательность заполнения клеток:

1. Переменным x_{31}, x_{13} соответствуют клетки с минимальными стоимостями $c_{13} = c_{31} = 1$. Выбираем первую по порядку клетку $x_{13} = \min\{80, 60\} = 60$. Третий столбец исключаем из дальнейшего рассмотрения (т.к. потребность в этом столбце стала равна 0 и это указываем рядом с исходным значением потребности), а запас первого поставщика уменьшается и становится равным 20.

2. В оставшейся части таблицы переменной x_{31} соответствует клетка с минимальной стоимостью $x_{31} = 1$. Следовательно, $x_{31} = \min\{50, 50\} = 50$. Первый столбец и первую строку исключаем из рассмотрения.

3. Следующая клетка, которую будем заполнять с учетом минимальности тарифа находится в первой строке, втором столбце с тарифом $c_{12} = 8$: $x_{12} = \min\{20, 90\} = 20$. Первую строку и второй столбец вычеркиваем.

4. Поскольку в таблице осталась одна вторая строка и один второй столбец, то это последний шаг алгоритма $x_{12} = \min\{70, 70\} = 70$.

Количество заполненных клеток равно 4, а $m + n - 1 = 3+3-1=5$. Следовательно, полученный план вырожденный. Для устранения вырожденности одну из свободных клеток, желательно с минимальной стоимостью, будем считать занятой и проставим в ней поставку, равную 0 (притом необходимо помнить, что в таблице не должно быть ни одного цикла, все вершины которого являются заполненными клетками). Удовлетворяющей требованиям является клетка (3, 2), поэтому считаем $x_{32} = 0$. Полученный план становится невырожденным. Значения базисных переменных: $x_{12} = 20, x_{13} = 60$, $x_{22} = 70$, $x_{31} = 50$, $x_{32} = 0$. Остальные переменные – свободные, их значения равны 0. Значение целевой функции:

$$F = 20 \cdot 8 + 60 \cdot 1 + 70 \cdot 9 + 50 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 910$$

Как видим, значение целевой функции существенно меньше, чем при использовании метода северо-западного угла.

Построенный одним из методов исходный опорный план можно довести до оптимального путем последовательного улучшения. Воспользуемся распределительным методом.

Сформулируем критерий оптимальности транспортной задачи. Транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, в которой целевая функция должна на оптимуме быть минимальной. Поэтому если целевую функцию выразить через неосновные переменные (незаполненные клетки), то коэффициенты при них должны быть неотрицательными.

Пусть было получено некоторое базисное распределение поставок. Целевая функция, выраженная через свободные переменные x_{ij} (незаполненные клетки), имеет вид:

$$F = F_0 + \delta_{ij} x_{ij} + \cdots \quad (2.37)$$

F_0 – суммарная стоимость перевозки грузов для данного опорного плана; δ_{ij} – оценка клетки (i, j) или коэффициент при в выражении линейной функции через свободные переменные.

Теорема 2.4. (о потенциалах). Оценка свободной клетки не изменится, если к коэффициентам затрат некоторой строки (столбца) таблицы поставок прибавить некоторое число. Это число, прибавляемое к коэффициентам затрат выделенной строки (столбца), будем называть потенциалом данной строки (столбца).

Оценку для свободных клеток будем рассчитывать по формуле:

$$\delta_{ij} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j \quad (2.38)$$

α_i – потенциал i-й строки, β_j – потенциал j-го столбца. Данные потенциалы подбираются таким образом, чтобы оценки при основных переменных были равны нулю. Для заполненных клеток должно выполняться равенство $c_{ij} - \alpha_i - \beta_j = 0$. Для одной из строк (или столбца) потенциал подбирается произвольно, а затем определяется для остальных заполненных клеток.

Введем понятие *цикла* в транспортной задаче. Циклом называется замкнутый многоугольник, одна вершина которого совпадает с той клеткой, для которой он строится, и все остальные вершины совпадают с заполненными клетками. Вершины соединяются замкнутой ломаной линией, отрезки которой в каждой заполненной клетке образуют угол 90°. Никакие три вершины не могут быть расположены на одной прямой.

В случае вырожденности плана ввод нулевых поставок производится таким образом, чтобы не было ни одного цикла, все вершины которого являются заполненными клетками.

Примеры возможных конфигураций циклов показаны на рисунке 2.6.

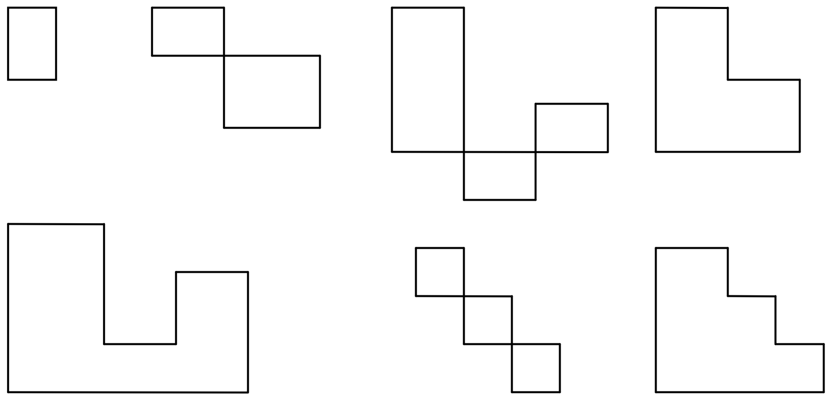

Рис. 2.6

Проверим на оптимальность решение задачи 2.4. Добавим к таблице 2.5 столбец с потенциалами поставщиков и строку с потенциалами потребителей. Первой строке поставим в соответствие число ноль (см. таблицу 2.6). Это будет потенциал для первой строки. Для остальных строк и столбцов потенциалы последовательно рассчитываются для заполненных клеток с помощью соотношения:

$$\alpha_i + \beta_j + c_{ij} = 0$$

Определив потенциал для первой строки $\alpha_1 = 0$, найдем потенциалы для второго и третьего столбца, соответственно:

$$0 + \beta_2 + 8 = 0$$

$$\beta_2 = -8$$

$$0 + \beta_3 + 1 = 0$$

$$\beta_3 = -1$$

Аналогично находим потенциалы других строк и столбцов (см. таблицу 2.6).

Таблица 2.6

Поставщики	Потребители			Запасы	α_i
	B_1	B_2	B_3		
A_1	6	8 **20**	1 **60**	80	0
A_2	4	9 **70**	8	70	-1
A_3	1 **50**	3 **0**	7	50	5
Потребности	50	90	60		
β_j	-6	-8	-1		

Для свободных клеток по формуле (2.28) рассчитаем оценки δ_{ij}. В результате получится матрица оценок:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Оценка δ_{21} отрицательная, поэтому план не является оптимальным. Чтобы его улучшить, необходимо в данную клетку сделать поставку.

Таблица 2.7

Поставщики	Потребители			Запасы	
	B_1	B_2	B_3		
A_1	6	8 **20**	1 **60**	80	0
A_2	4 +	9 **70** -	8	70	-1
A_3	1 **50** -	3 **0** +	7	50	5

Потребности	50	90	60	
	-6	-8	-1	

Составляем контур пересчета, как показано в таблице 2.7. Определяем элемент $\lambda = \min\{50, 70\} = 50$. Таким образом, в клетки (2, 1) и (3,2) поместим по 50 единиц продукции. В клетке (2, 2) останется 20 ед., в клетке (3, 1) ничего. План будет выглядеть так, как показано в таблице 2.8.

Рассчитаем стоимость перевозки:

$$F = 20 \cdot 8 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 4 + 20 \cdot 9 + 50 \cdot 3 = 750$$

Таким образом, новый план оказался более эффективным по сравнению с опорным, полученным методом минимального тарифа.

Таблица 2.8

Поставщики	Потребители			Запасы	
	B_1	B_2	B_3		
A_1	6	8 **20**	1 **60**	80	0
A_2	4 **50**	9 **20**	8	70	-1
A_3	1	3 **50**	7	50	5
Потребности	50	90	60		
	-3	-8	-1		

Проверим новый план на оптимальность. Найдем потенциалы для каждой строки и столбца. В результате получится матрица оценок:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Все оценки отрицательные, поэтому план является оптимальным.

6. Целочисленное программирование

При решении некоторых задач на переменные x_1, x_2, $\dots x_n$ могут накладываться дополнительные требование о их целочисленности. Например, в задаче об оптимальном использовании ресурсов предприятие может выпускать автомобили, которые не могут быть дробными числами. В связи с эти возникает задача линейного целочисленного программирования, которая формулируется следующим образом.

Найти такое решение $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором линейная функция:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.39}$$

принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m \tag{2.40}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \ \ x_j - \text{ целые числа} \qquad (2.41)$$

При решение задачи целочисленного программирования используются различные методы, которые можно разделить на три группы: 1) методы отсечения; 2) комбинаторные методы; 3) приближенные методы.

Рассмотрим задачу о рюкзаке (о ранце). Турист готовится к длительному переходу в горах. В рюкзаке он может нести груз, масса которого не более G кг. Груз может включать n предметов, причем i-й из них обладает массой g_i кг, i= 1, 2, …, n; для каждого предмета турист определяет его ценность (полезность) c_i во время перехода.

Составить набор предметов таким образом, чтобы их суммарная масса не превосходила G, а суммарная полезность $f(x_i)$ была наибольшей.

Обозначим $x_i = 0$, если i-й предмет отвергается и $x_i = 1$, если предмет берут в рюкзак.

Экономико-математическая модель задачи о рюкзаке:

$$f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \tag{2.42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \le G \tag{2.43}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n \tag{2.44}$$

Решим данную задачу методом ветвей и границ.

Метод ветвей и границ (МВГ) относится к группе комбинаторных методов целочисленного программирования и является одним из наиболее распространенных методов этой группы. В основу МВГ положены методы построения, позволяющие в ряде случаев существенно уменьшить объем перебора вариантов. МВГ – метод направленного перебора множества вариантов решения задачи. Графически перебор можно представить в виде дерева, т.е. связанного графа, но не содержащего циклов. Корень этого дерева все множество вариантов, а вершины дерева подмножества частично упорядоченных вариантов решения.

Идея метода состоит в том, что для ветвления выбираются те подмножества, которые имеют лучшую оценку. Трудность задачи заключается в получении этой оценки.

Понятие оценки подмножества (множества). Если $M_к$ – некоторое подмножество множества М, то оценкой множества $M_к$ называется число ($M_к$) такое что, $f(\bar{x}) \le \varphi(M_k)$ для любого $x \in M_k$, где *f*– целевая функция рассматриваемой оптимизационной задачи.

Алгоритм МВГ

Строятся вершины первого уровня. Для каждой вершины подсчитывается оценка $\varphi(M_k)$. Ветвится вершина, которой соответствует максимальная оценка. Для всех вершин *j* – го уровня (*j*= 2, 3, …) подсчитывается оценка $\varphi(M_k)$. Ветвится та из висячих вершин уровня j, которой соответствует максимальная оценка.

Действия пункта 2 повторяются до тех пор, пока не будет получено точное решение на последнем n-ом уровне. Конечная висячая вершина отвечает конкретному варианту $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_4^*)$. Для него подсчитывается точное значение целевой функции $f(x^*)$.

Если значение $f(x^*)$ не хуже оценок оставшихся вершин, т.е. $f(x^*) \geq \varphi(M_k)$, то найдено оптимальное решение. Причем:

а) в случае строгого неравенства $f(x^*) > \varphi(M_k)$ оптимальное решение единственно;

б) для висячих вершин, в которых $f(x^*) = \varphi(M_k)$, производится ветвление и осуществляется поиск других оптимальных решений задачи в соответствии с пунктами 2 и 3.

Если значение $f(x^*)$ для вершин последнего уровня не лучше значения оставшихся висячих вершин, т.е. $f(x^*) < \varphi(M_k)$, то переходят на шаг 2.

При использовании алгоритма МВГ о задаче наилучшей загрузки «рюкзака» учитывают, что каждый предмет может быть выбран единственный раз в единичном количестве.

В общем случае имеется 2^n вариантов, однако часть этих вариантов недопустима, т.к. соответствующий некоторому вектору x вариант может не удовлетворять ограниченного по максимальной загрузке «рюкзака», что позволяет дополнительно отсекать ветви.

Ветвление задачи организуется следующим образом:

1. Все множество вариантов M на два подмножества:

$M = M_1 \cup \overline{M_1}$, где M_1 – множество вариантов отвечающих $x_1 = 1$ (т.е. выбору первого предмета), а $\overline{M_1} = M_0$ – множество вариантов, в которых первый предмет не выбирается ($x_1 = 0$).

2. Дальнейшее ветвление ведется аналогично, т.е. разбиваем множества M_0 и M_1 по второй переменной x_2:

$M_1 = M_{11} \cup M_{10}$ и $M_{01} \cup M_{00}$ и т.д.

В качестве оценки $\varphi(M_j)$ каждого из рассматриваемых в задаче множеств M_j выбираем значение целевой функции $f(x_1^*)$ соответствующее решениям также задачи (3) – (5), но без ограничения $x_i \in \{0, 1\}$ (т.е. допускается выбор кратных и нецелых частей предметов).

Решение этой вспомогательной задачи записывается в явном виде, если номера предметов упорядочены по удельным полезностям:

$$L_i = \frac{c_i}{g_i}, \text{т. е.} \frac{c_1}{g_1} \geq \frac{c_2}{g_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{g_n} \qquad (2.45)$$

Оптимальное решение задачи (2.42) – (2.43) без учета условия (2.44) запишем, выбрав максимальное количество первых предметов:

$$x_M^* = \left(\frac{G}{g_1}, 0, 0, \dots, 0\right);$$

$$\varphi(M) = f(x_M^*) = \frac{G}{g_1} c_1 = GL_1 \geq f(x) \text{для } \forall x \in M \qquad (2.46)$$

Указанное предварительное упорядочение заказов позволяет сформулировать эвристическое правило порядка ветвления. Для построения оценки каждого следующего множества M_j следует:

1. Смещаться по списку заказов на следующую позицию, добавляя к этой оценке уже имеющуюся часть $f(x)$ отвечающую уже выбранным заказом.

2. Заменять g на оставшийся объем ресурса.

Задача 2.5. Пусть имеются все необходимые данные для задачи о «рюкзаке», которые уже упорядочены по убывающим L_jи $G = 14$ … (табл. 2.9).

Таблица 2.9

i	1	2	3	4	5
g_i	5	4	5	4	3
c_i	15	12	10	8	6

L_i	3	3	2	2	2

Решение:

1. Оценку множества M проводим в соответствии с соотношениями (2.46) берем относительное решение вспомогательной задачи $x_M^* = \left(\frac{14}{5}, 0, 0, 0, 0\right)$, на котором получим оценку множества M:

$$\varphi(M) = f(x_M^*) = 15 \cdot \frac{14}{5} + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 42$$

2. Произведем разбиение $M = M_1 \cup M_0$, где M_1 – множество содержащее варианты с выбором первого предмета, M_0 – множество, содержащее варианты с отказом от первого предмета.

Оптимальное решение ослабленной задачи на множестве M_0 имеет вид $x_0^* = \left(0, \frac{14}{5}, 0, 0, 0\right)$, а оценка этого множества M_0 равна:

$$\varphi(M_0) = f(x_0^*) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{14}{5} + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 42$$

Оптимальное решение вспомогательной задачи на множестве M_1:

$$x_0^* = \left(1, \frac{14 - 5}{4}, 0, 0, 0\right)$$

Это решение дает оценку множества M_1 в виде:

$$\varphi(M_1) = f(x_1^*) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{9}{4} + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 42$$

Полученные оценки множеств M_1 и M_0 равны, поэтому на этом шаге ветвятся оба множества: $M_0 = M_{00} \cup M_{01}$, $M_1 = M_{10} \cup M_{11}$.

3. Во множестве M_{00} – содержатся варианты, в которых первые два предмета в «рюкзак» не взяли. По правилу выбора решения вспомогательной задачи получим, что на множестве M_{00}:

$$x_{00}^* = \left(0, 0, \frac{14}{5}, 0, 0\right)$$

$$\varphi(M_{00}) = f(x_{00}^*) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{14}{5} + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 28$$

Множество M_{01} включает варианты с отказом от первого предмета и выбором второго. Для него:

$$x_{01}^* = \left(0, 1, \frac{14 - 4}{5}, 0, 0\right)$$

$$\varphi(M_{01}) = f(x_{01}^*) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 32$$

Переходим на ветвь, соответствующую множеством с выбором первого предмета. Для множества M_{10} имеем:

$$x_{10}^* = \left(1, 0, \frac{14 - 5}{5}, 0, 0\right)$$

$$\varphi(M_{01}) = f(x_{01}^*) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot \frac{9}{5} + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 33$$

Для множества M_{11} имеем:

$$x_{11}^* = \left(1, 1, \frac{14 - 5 - 4}{5}, 0, 0\right)$$

$$\varphi(M_{11}) = f(x_{11}^*) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 37$$

Таким образом, на третьем уровне наибольшую оценку имеет подмножество M_{11}. Поэтому, в дальнейшем будем рассматривать только подмножества множества $M_{11:}$

$$M_{11} = M_{110} \cup M_{111}$$

4. Для множества M_{110} имеем решение:

$$x_{110}^* = \left(1, 1, 0, \frac{14 - 5 - 4}{4}, 0\right)$$

$$\varphi(M_{110}) = f(x_{110}^*) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{5}{4} + 6 \cdot 0 = 37$$

Для множества M_{111} имеем решение:

$$x_{111}^* = \left(1, 1, 1, \frac{14 - 5 - 4 - 5}{4}, 0\right)$$

$$\varphi(M_{11}) = f(x_{11}^*) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 37$$

Поскольку оценки для висячих вершин M_{110} и M_{111} одинаковы, то продолжим рассматривать их подмножества:

$$M_{110} = M_{1100} \cup M_{1101} \text{ и } M_{111} = M_{1110} \cup M_{1111}$$

5. Для множества M_{1100} имеем решение:

$$x_{1100}^{*} = \left(1, 1, 0, 0, \frac{14 - 5 - 4}{3}\right)$$

$$\varphi(M_{1100}) = f(x_{1100}^{*}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{5}{3} = 37$$

Для множества M_{1101} имеем решение:

$$x_{1101}^{*} = \left(1, 1, 0, 1, \frac{14 - 5 - 4 - 4}{3}\right)$$

$$\varphi(M_{1101}) = f(x_{1101}^{*}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{3} = 37$$

Для множества M_{1110} имеем решение:

$$x_{1110}^{*} = \left(1, 1, 1, 0, \frac{14 - 5 - 4 - 5}{3}\right)$$

$$\varphi(M_{1110}) = f(x_{1110}^{*}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 37$$

Подмножество M_{1111} не отвечает критерию:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \leq G$$

Действительно: 5+4+5+4>14.

На пятом уровне все три висячие вершины имеют равные оценки. Поэтому производим ветвление множеств $M_{1100} = M_{11000} \cup M_{11001}, M_{1110} = M_{11100} \cup M_{11101}$ и $M_{1101} = M_{11010} \cup M_{11011}$

6. Множества $M_{11101}M_{11011}$ – выходят за ограничения по ресурсу:

$$\sum_{i=1}^{5} g_i x_i = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 17 > 14$$

$$\sum_{i=1}^{5} g_i x_i = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 16 > 14$$

Для множества M_{11100} решение:

$$x^*_{11100} = (1, 1, 1, 0, 0)$$

$$\varphi(M_{11100}) = f(x^*_{11100}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 37$$

Для множества M_{11010} решение:

$$x^*_{11010} = (1, 1, 1, 0, 1)$$

$$\varphi(M_{11010}) = f(x^*_{11010}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 35$$

Для множества M_{11000} решение:

$$x^*_{11000} = (1, 1, 0, 0, 0)$$

$$\varphi(M_{11000}) = f(x^*_{11000}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 27$$

Для множества M_{11001} решение:

$$x^*_{10001} = (1, 1, 0, 0, 1)$$

$$\varphi(M_{11001}) = f(x^*_{11001}) = 15 \cdot 1 + 12 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 33$$

На рисунке 2.7 показано дерево решений, иллюстрирующее решение задачи о рюкзаке.

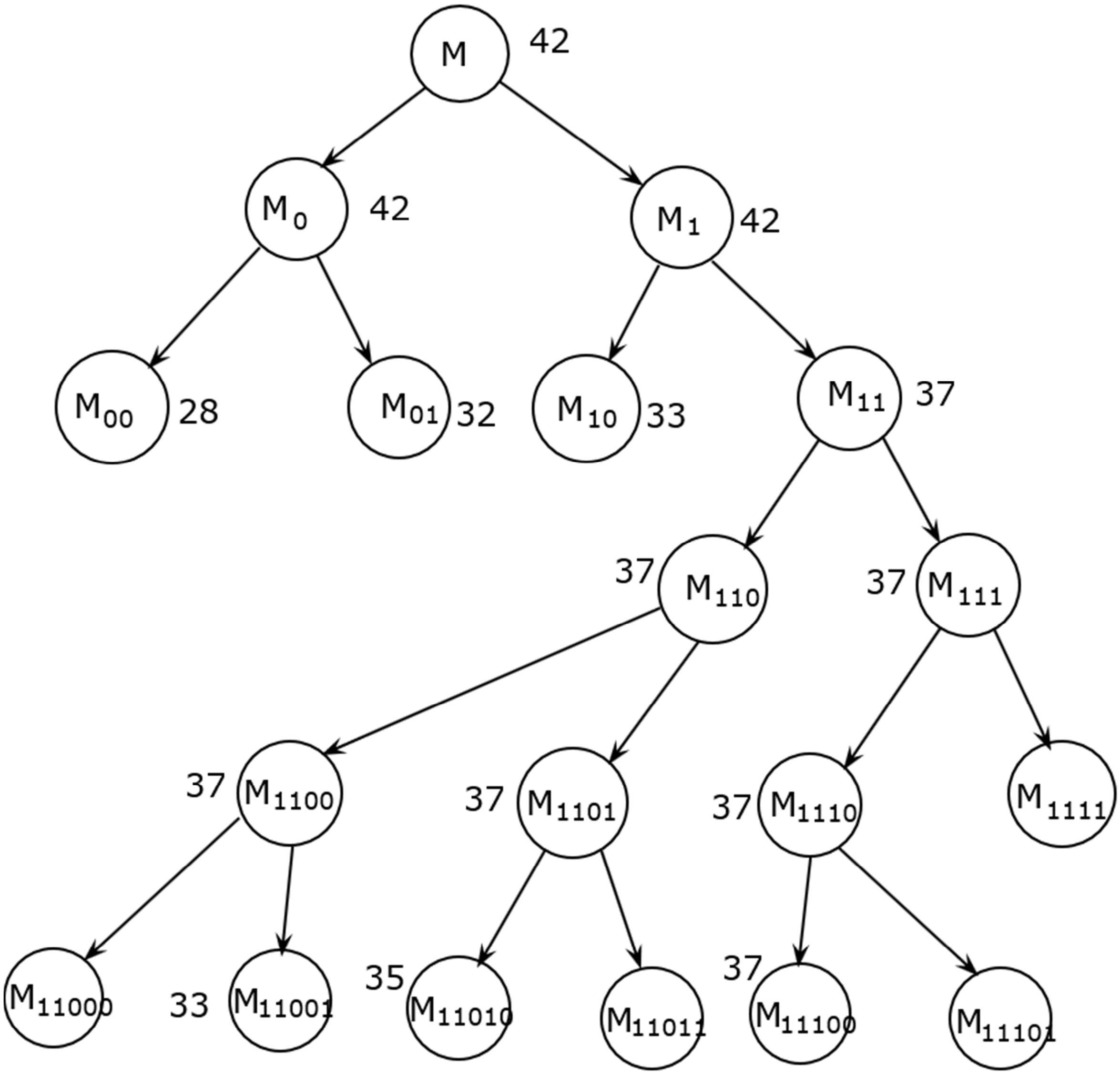

Рис. 2.7. Дерево решений задачи о рюкзаке

Вывод: Задача имеет одно оптимальное решение , на котором целевая функция $f(x^*_{11100}) = 37$.

На оставшихся висячих вершинах значение оценок меньше 37, поэтому других оптимальных решений нет.

Рассмотрим задачу о назначениях. В общем виде задача о назначениях формулируется следующим образом.

Задача о назначениях. Имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Затраты i – го кандидата на выполнение j – ой работы равны

$C_{ij}(i,j=1,\dots,n)$. Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работы минимальны.

Пуст $x_{ij} = 1$ – значение переменной, если i–й кандидат выполняет j–ю работу; $x_{ij} = 0$ – в противном случае. Тогда суммарные затраты на выполнение всех видов работ будут равны:

$$C=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}\to\min \quad (2.47)$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, j=1,2,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, i=1,2,\dots,n \\ x_{ij}\in\{0,1\}, \quad i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (2.48)$$

В целевую функцию (2.47) входят только те значения $C_{ij}(i,j=1,\dots,n)$ для которых $x_{ij\neq 0}$, т.е. входят затраты соответствующие назначенным работам.

Уравнения системы (2.48) означают, что каждый кандидат выполняет только одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом.

Решить задачу о назначениях – значит найти x_{ij}, удовлетворяющее (2.48) и доставляющее минимум (2.47).

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Однако ее относительно простая структура позволяет разработать достаточно простые методы решения. Одним из таких методов является венгерский метод.

Математическое обоснование венгерского метода решения задачи о назначениях заключено в трех теоремах.

Теорема 2.5. (Теорема Кененга). Если элементы матрицы разделить на два класса на основании свойства *S*, то минимальное число линий содержащих все элементы со свойствами *S*, равно максимальному числу таких элементов со свойством *S,* которые могут быть выбраны так, чтобы никакие два из них не лежали на одной и той же линии (термин «линия» обозначает либо строку, либо столбец в матрице). При решении задачи о назначениях венгерским методом свойство S состоит в том, что элемент матрицы нулевой.

Теорема 2.6. Если набор $X = (x_{ij})$ минимизирует функцию $C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

по всем x_{ij}, таким, что $x_{ij} \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, то $X = (x_{ij})$ минимизирует также функционал $C' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij}$, где $C'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, при всех $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$.

Говоря другими словами, решение задачи о назначениях не изменится, если прибавить к любому столбцу или строке матрицы C_{ij} некоторую константу или вычесть ее из них.

Теорема 2.7. Если все $C_{ij} \geq 0$ и можно отыскать набор $x = (x_{ij})$ такой, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 0$, то это решение оптимально.

Алгоритм венгерского метода

Для решения задачи о назначениях составляют таблицу (табл. 2.10) в левой колонке записаны номера кандидатов, в верхней строке номера работ, а в *i*–ой строке и *j*–ом столбце стоят затраты на выполнение *i*–м кандидатом *j*–ой работы.

Таблица 2.10

№	1	2	…	*j*	…	*n*
1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1j}	…	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2j}	…	C_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
i	C_{i1}	C_{i2}	…	C_{ij}	…	C_{in}
…	…	…	…	…	…	…
n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nj}	…	C_{nn}

Метод решения задачи сводится к прибавлению и вычитанию констант к строкам и столбцам (на основании теоремы 2.6) до тех пор, пока достаточное число величин C_{ij} не образуется в ноль, что дает решение равное нулю (на основании теоремы 2.7).

Алгоритм Венгерского метода

<u>1 шаг.</u> Получить нули в каждой строке, в каждом столбце. Для этого определяют сначала наименьший элемент в каждой строке и его значения отнимают от всех элементов этой строки. Затем в преобразованной таблице определяют минимальный элемент в каждом столбце и его значение вычитают из всех элементов этого столбца.

<u>2 шаг.</u> Если после выполнения 1-го шага алгоритма можно отметить нули в полученной таблице так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находится один отмеченный нуль, то, согласно теореме 2.7, получим решение задачи. Данное решение будет оптимальным.

В противном случае следует переходить к третьему шагу.

<u>3 шаг.</u> На основании теоремы Кенинга производят поиск набора строк, содержащих все нули. Доказано, что во всех матрицах $n \times n$ все нули можно пересечь меньшим числом линий, чем n тогда и только тогда, когда эти нули не обеспечивают решение задачи. Для этого пользуются следующими правилами:

а) отмечают все строки, в которых не имеется ни одного отмеченного нуля;

б) отмечают все столбцы, содержащие неотмеченный нуль хотя бы в одной из отмеченных строк;

в) отмечают все стороны, содержащие отмеченные нули хотя бы в одном из отмеченных столбцов.

Действия (*б*) и (*в*) повторяют поочередно до тех пор, пока существуют варианты для разметки. После этого вычерчивают отмеченные столбцы и неотмеченные строки.

Цель третьего шага – провести минимальное число горизонтальных и вертикальных линий, пересекающих, по крайней мере, один раз все нули.

<u>4 шаг.</u> Перестановка некоторых нулей. Находят наименьшее число из тех, которые остались не вычеркнутыми после третьего шага. Затем вычитают это число из невычеркнутых столбцов (точнее и тех столбцов, которые содержат невычеркнутые элементы) и прибавляют это число по всем вычеркнутым строкам.

Это шаг не изменяет оптимального решения и после его выполнения появится, по крайней мере, один новый ноль. Далее следует вернуться к шагу 2 и весь цикл расчета повторять до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Задача 2.6. Институт получил гранты на выполнение четырех исследовательских проектов. Выходные результаты первого проекта являются входными данными для второго проекта, выходные результата второго проекта – это входные данные для третьего проекта, результаты третьего проекта используются для работы над четвертым проектом.

В качестве научных руководителей проектов кандидатуры четырех ученых, обладающих различным опытом и способностями. Каждый ученый оценил время необходимое ему для реализации проекта. Матрица времен задана.

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 19 \\ 12 & 10 & 16 & 9 \\ 24 & 13 & 19 & 12 \\ 15 & 18 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

В i–ой строке и j–ом столбце матрицы T стоит время на выполнение i–м ученым j–го проекта. Пусть продолжительность времени задана в месяцах и требуется выбрать научного руководителя для выполнения каждого проекта так, чтобы суммарное время выполнения всех проектов было минимальным.

Решение:

В данной задаче о назначениях в качестве работ рассматриваются исследовательские проекты, а в качестве кандидатов – ученые, претендующие на роль научных руководителей.

Введем переменные x_{ij}. x_{ij}= 1 – если i – й ученый научный руководитель j – го проекта.

x_{ij} = 0 – если i – й ученые не являются руководителем j – го проекта.

Целевая функция задачи в общем виде:

$T = 10x_{11} + 20x_{12} + 15x_{13} + 19x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + 16x_{23} + 9x_{24} + 24x_{31} + 13x_{32} + 19x_{33} + 12x_{34} + 15x_{41} + 18x_{42} + 12x_{43} + 17x_{44} \to \min$.

Составим таблицу 2.9. Найдем минимальный элемент в каждой строке и запишем его в последний столбец.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 19 \\ 12 & 10 & 16 & 9 \\ 24 & 13 & 19 & 12 \\ 15 & 18 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

Таблица 2.11

№	**1**	**2**	**3**	**4**	min
1	10	20	15	19	10
2	12	10	16	9	9
3	24	13	19	12	12
4	15	18	12	17	12

Вычитаем минимальные элементы из каждой строки и записываем в таблицу 2.12.

Таблица 2.12

№	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	10	5	9
2	3	1	7	0
3	12	1	7	0
4	3	6	0	5
min	0	1	0	0

Вычитаем минимальные элементы из соответствующих столбцов и записываем таблицу в 2.13.

Таблица 2.13

№	**1**	**2**	**3**	**4**
1	**0**	9	5	9
2	3	**0**	7	0
3	12	0	7	**0**
4	3	5	**0**	5

Теперь необходимо составить комбинацию из нулей таким образом, чтобы каждый из них находился в разных строках и столбцах. Если хотя бы одна такая комбинация будет найдена, то это означает, что оптимальное решение найдено.

Например, данному требованию соответствует решение $X = (x_{11}, x_{22}, x_{43}, x_{34})$. В таблице 2.14 полученному распределению соответствуют нули, выделенные жирным шрифтом. Затраты времени на такое распределение составят:

$T = 10{\cdot}1 + 20{\cdot}0 + 15{\cdot}0 + 19{\cdot}0 + 12{\cdot}0 + 10{\cdot}1 + 16{\cdot}0 + 9{\cdot}0 + 24{\cdot}\mathit{0} + 13{\cdot}\mathit{0} + 19{\cdot}\mathit{0} + 12{\cdot}\mathit{1} + 15{\cdot}0 + 18{\cdot}0 + 12{\cdot}1 + 17{\cdot}0 = 44$.

Таблица 2.14

№	**1**	**2**	**3**	**4**
1	**0**	9	5	9
2	3	0	7	**0**

3	12	**0**	7	0
4	3	5	**0**	5

Отметим, что есть еще одно решение данной задачи:

$T_2^* = (x_{11}, x_{24}, x_{32}, x_{43})$.

Данное решение показано в таблице 2.12. Затраты времени на такое распределение составят:

T = 10·1 + 20·0 + 15·0 + 19·0 + 12·0 + 10·0 + 16·0 + 9·1 + 24·0 + 13·1 + 19·0 + 12·0 + 15·0 + 18·0 + 12·1 + 17·0 = 44.

ГЛАВА III. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка задачи нелинейного программирования

Во второй главе нами была рассмотрена задача линейного программирования. В данной задаче целевая функция, а также уравнения в системе ограничений представляют собой линейные функции. Однако в ряде случаев функции могут быть и нелинейными как на месте целевой функции, так и в системе ограничений.

Если хотя бы одна из функций является нелинейной, то такая задача называется задачей нелинейного программирования, которая в общем виде формулируется следующим образом.

Дана система ограничений:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

и целевая функция:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

Необходимо найти такое решение $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы (3.1), при котором целевая функция (3.2) принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение.

Для решения задачи нелинейного программирования в некоторых случаях можно применять классические методы оптимизации, например, метод множителей Лагранжа. Однако применение данных методов ограничено, поскольку задача нахождения условного экстремума функции n переменных технически достаточно трудоемка.

Общих методов решения задачи нелинейного программирования не существует. Однако для случаев, когда целевая функция обладает некоторыми свойствами, разработан ряд специальных методов. Например, если целевая функция, а также система ограничений являются линейными, то используется симплексный метод.

Кроме того, для решения задачи нелинейного программирования используют численные методы, например, градиентный метод.

2. Классические методы решения задач нелинейного программирования

Рассмотрим классические методы нахождения максимумов и минимумов функции.

Определение 3.1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ из области определения функции $z = f(x, y)$ называется точкой минимума (точкой максимума) данной функции, если существует такая $r-$ окрестность этой точки, что для всех точек $M(x, y) \neq M_0(x_0, y_0)$ из указанной $r-$окрестности выполняется неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$).

Рассмотрим необходимое условие существования экстремума функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (a, b) максимум или минимум, т. е. (a, b) – точка локального экстремума. Зафиксируем один из аргументов функции $z = f(x, y)$, например, положим переменную y равной постоянной b.

Функция $z = f(x, y)$ является в этом случае функцией одной переменной x. Эта функция имеет максимум или минимум в точке $x = a$. Поэтому ее производная при $x = a$ должна обращаться в нуль или не существовать.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что производная функции *f(a, y)* по переменной *y* должна обращаться в нуль или не существовать при $y = b$.

В итоге мы приходим к необходимому условию существования экстремума.

Теорема 3.1. Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума, то каждая частная производная первого порядка или обращается в нуль или не существует.

Например, дана функция двух переменных $z = x^2 - y^2$. Частные производные первого порядка равны $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Производные обращаются в нуль при $x=0$ и $y=0$, но функция не имеет ни максимума ни минимума в этой точке.

Теорема 3.2. (достаточное условие экстремума функции двух переменных)**.** Пусть функция $z = f(x, y)$:

а) определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $z'_x(x_0, y_0)=0$ и $z'_y(x_0, y_0)=0$;

б) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка: $z''_{xx}(x_0, y_0)=A$, $z''_{xy}(x_0, y_0)=z''_{yx}(x_0, y_0)=B$, $z''_{yy}(x_0, y_0)=C$.

Тогда если $\Delta = AC-B^2>0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, причем, если $A<0$ – максимум, если $A>0$ – минимум. В случае $\Delta = AC-B^2<0$, функция $z = f(x, y)$ экстремума не имеет. Если $\Delta = AC-B^2=0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Заметим, что выражение $\Delta = AC-B^2$ представляет собой определитель второго порядка, составленный из частных производных второго порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0, y_0) & z''_{xy}(x_0, y_0) \\ z''_{yx}(x_0, y_0) & z''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Исследование функции двух переменных на экстремум рекомендуется проводить по следующей схеме**:**

1. Найти частные производные функции z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$ и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка.

4. Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке.

5. Найти определитель $\Delta = AC-B^2$ и установить факт существования или несуществования экстремумов в данных критических точка.

6. Определяют характер экстремума (если $A<0$ – максимум, если $A>0$ – минимум).

Задача 3.1. Исследовать функцию $z=x^3+y^3-3xy$ на максимум и минимум.

1. Найдем частные производные первого порядка $z'_x=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_x=3x^2-3y$;

$z'_y=\left(x^3+y^3-3xy\right)'_y=3y^2-3x$

2. Решим систему:

$\begin{cases}3x^2-3y=0\\3y^2-3x=0\end{cases}$. Отсюда получаем две критические точки: $M_1(1,1)$ и $M_2(0,0)$.

3. Найдем производные второго порядка:

$z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=-3$, $z''_{yy}=6y$

Найдем значения частных производных второго порядка в точке $M_1(1,1)$.

$A_1=6\cdot1=6$, $B_1=-3$, $C_1=6\cdot1=6$.

Найдем значения частных производных второго порядка в точке $M_2(0,0)$.

$A_2=6\cdot0=0$, $B_2=-3$, $C_2=6\cdot0=0$.

4. $\Delta_1=6\cdot6-(-3)^2=27>0$; $A<0$. Таким образом, точка $M_1(1,1)$ является максимумом.

$\Delta_2=0\cdot0-(-3)^2=-9<0$. Таким образом, точка $M_2(0,0)$ не является точкой экстремума.

Пусть дана задача математического программирования: найти максимум функции:

$$Z=f(x_1,x_2,\dots,x_n) \tag{3.4}$$

при ограничениях:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{3.5}$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

Ограничения в задаче заданы уравнениями, поэтому для ее решения можно воспользоваться классическим методом отыскания условного экстремума функций нескольких переменных. При этом полагаем, что функции (3.4) и (3.5) непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

Для решения задачи составим следующую функцию:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{3.6}$$

Данная функция называется функцией Лагранжа, а метод основанный на использовании данной функции называется методом множителей Лагранжа.

Определим частные производные функции Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ и приравняем их к нулю. В результате получится система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial Z}{\partial x_j} + \sum \lambda_i \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0; j = 1, 2, \dots, n; \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_i} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \tag{3.7}$$

Если функция (3.4) в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ имеет экстремум, то существует такой вектор $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$, что точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ является решением системы (3.7). Следовательно, решая систему (3.7), получим множество точек, в которых функция Z имеет экстремальные значения. При этом неизвестен способ определения точек глобального минимума или максимума. Однако если решения системы найдены, то для определения глобального максимума (минимума) достаточно найти значения функции Z в соответствующих точках. Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (3.7), как правило, имеет несколько решений.

Задача 3.2. Найти условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x^2 + y^2 = 2$ методом множителей Лагранжа.

Решение:

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 2)$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)) = y + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)) = x + 2\lambda y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)) = x + y - 2$$

Решим следующую систему:

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Выражаем из первого уравнения данной систему переменную y, из второго – переменную x и подставляем их в третье уравнение:

$$\begin{cases} y = -\lambda \\ x = -\lambda \\ -\lambda - \lambda - 2 = 0 \end{cases}$$

Из третьего уравнения:

$$-2\lambda = 2$$

Отсюда $\lambda = -1$. Подставляем найденной значение множителя Лагранжа в первое и второе уравнение и получаем координаты точки экстремума $A(1;\,1)$.

3. Геометрический метод решения задачи выпуклого программирования

Функция   , определенная на выпуклом множестве Мn-мерного пространства, называется выпуклой на этом множестве, если:

для любых точек   и любого числа   .

Если в условии (3.8) изменить знак неравенства с «≤» на «≥», то получим определение вогнутой функции. Если же в условии (3.8) неравенства будут строгими, то функция   будет называться строго выпуклой или строго вогнутой функцией. На рисунке 3.1 показана геометрическая интерпретация выпуклости функции одной переменной.

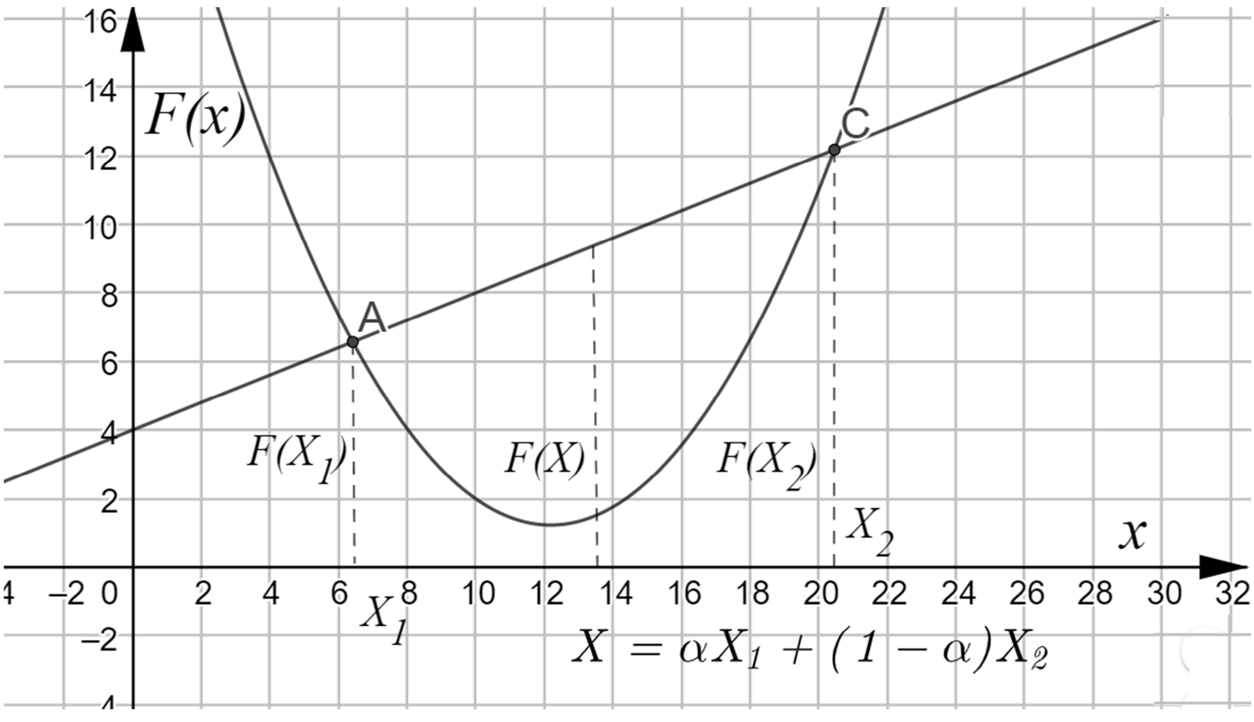

Рис. 3.1. График функции *F*(*x*) выпуклой на всей числовой области

Задача выпуклого программирования состоит в отыскании такого решения   системы ограничений (3.1), при котором целевая функция (3.2) принимает минимальное значение, если она выпуклая, и максимальное значение, если она вогнутая.

Выделение задач выпуклого программирования в специальный класс объясняется экстремальными свойствами выпуклых функций: любой локальный минимум выпуклой функции является одновременно и глобальным.

Если задача выпуклого программирования имеет две переменные, то можно применять графический метод. В главе 2 рассматривалось использование графического метода при решении задачи линейного программирования. Поиск оптимальных решений осуществлялся в угловых точках. В данном случае оптимальные решения вследствие нелинейности уравнений могут находится практически в любой точке многоугольника решений. Если задача содержит нелинейные ограничения, то область допустимых решений не является выпуклой и кроме глобального оптимума могут существовать точки локального оптимума.

Задача 3.3. Найти наибольшее значение функции, используя геометрический метод.

$$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Построим область допустимых решений. Поскольку уравнения в системе линейные, то данная область будет выпуклой. На рисунке 3.2 область допустимых решений представляет собой выпуклый пятиугольник *BDEFG*.

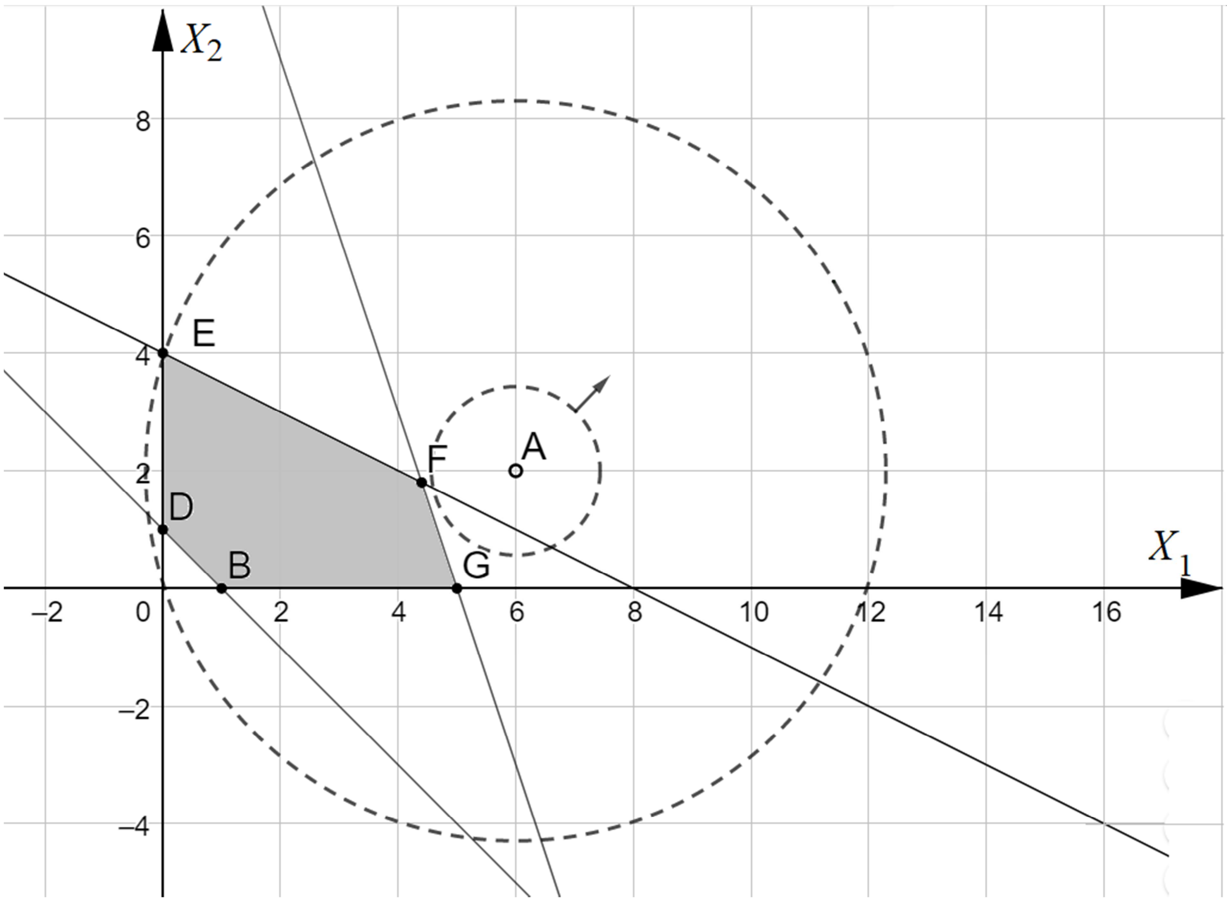

Рис. 3.2. Геометрический метод решения задачи 3.4

Для поиска максимального значения целевой функции построим линию уровня, например:

Это уравнение окружности с центром в точке $A(6, 2)$ радиусом . В любой точке линии уровня при перемещении от центра окружности функция Z возрастает, а при перемещении к центру убывает. Последняя точка, которую пересечет линия уровня, – точка $E(0, 4)$. Таким образом, максимум функции достигается в точке E и значение равно

.

Библиографический список

1. Аббасов М.Э. Методы оптимизации: Учеб. пособие / Аббасов М.Э. СПб.: Издательство “ВВМ”, 2014. – 64 с.

2. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 432 с.

3. Гребенникова, И. В.Методы оптимизации : учебное пособие / И. В. Гребенникова. —Екатеринбург : УрФУ, 2017. — 148 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х ч. Ч. II. / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : «Высшая школа», 1986. – 304 с.

5. Исследование операций в экономике : Учебн. Пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; по ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – М. – ЮНИТИ. 2000. – 407 с.

6. Калмыков, С. И. Исследование операций : учебное пособие / С. И. Калмыков, М. А. Первухин, А. А. Степанова. — Владивосток : ВГУЭС, 2019. — 152 с. — ISBN 978-5-9736-0555-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/161484 (дата обращения: 28.02.2021).

7. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций: Учебник / Косоруков О.А., Мищенко А.В. // под общ. ред. д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. – М. : Издательство «Экзамен», 2003. – 448 с.

8. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришина И.М. Математика для экономистов : от Арифметики до Эконометрики : учеб.-справоч. Пособие / под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – М. : Высшее образование, 2007. – 646 с.

9. Писарук, Н.Н. Исследование операций / Н.Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2015. – 304 с.

10. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : Т. 1 / Н.С. Пискунов. – М. : «Наука», 1968. – 550 с.

11. Прокопенко Н. Ю. Методы оптимизации [Текст]: учеб. пособие / Н. Ю. Прокопенко; Нижегор. гос. архитектур. - строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 118 с.

12. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций. 6-е издание. : Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.

Электронное учебное издание

Алексей Викторович **Алпатов**

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ (ЧАСТЬ 1)

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2021 г. Поз. № 2.
Подписано к использованию 27.04.2021. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 6,5.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.