МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная, Д.А. Мустафина

«МАТЕМАТИКА. ЧАСТЬ V»

Электронное учебное пособие

Волжский
2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я73
М 333

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Фундаментальные дисциплины» филиала ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г.Волжском
Кульков В.Г.
кандидат пед. наук, методист ГБПОУ «ВКУиНТ им. Ю.Гагарина»
Ребро И.В.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Матвеева, Т.А.
Учебное пособие «Математика. Часть V» **[**Электронный ресурс**]** : учебное пособие / Т.А. Матвеева, В.Б. Светличная, Д.А. Мустафина ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 280 КБ). – Волжский, 2022. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул. экрана.
ISBN- 978-5-9948-4324-6

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата высших технических учебных заведений.

Библиограф.: 8 назв.

ISBN- 978-5-9948-4324-6

© Волгоградский государственный технический университет, 2022
© Волжский политехнический институт, 2022

Содержание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая общие закономерности случайных явлений и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления.

Комбинаторика событий изучает способы подсчёта числа событий.

1. **Комбинаторный принцип умножения**

   Пусть требуется выполнить последовательно k операций, при этом первую операцию можно выполнить n_1 способами, вторую – n_2 способами, и т.д., k-ю – n_k способами. Тогда все k операций могут быть выполнены числом способов, равным произведению $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

2. **Размещение**

   Размещением называется упорядоченный набор k элементов из n элементов. Тогда число всевозможных размещений $N = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

3. **Сочетание**

   Сочетанием называется любой набор k элементов из n элементов. Тогда число всевозможных сочетаний $N = C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

   Отметим, что $C_n^0 = C_n^n = 0! = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

4. **Перестановка**

   Перестановкой называется упорядоченный набор n элементов, число всевозможных перестановок $N = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Случайные события

Событием A называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого испытания (опыта).

Классификация событий

1. Событие называется достоверным, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом.
2. Событие называется невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.
3. Событие называется возможным (случайным), если в данном испытании оно может наступить или не наступить.
4. События называются равновозможными, если условия их появления одинаковы.
5. Два события называются зависимыми, если появление одного из них влияет на появление другого.

6. Два события называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого.
7. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого.
8. События образуют полную группу Ω, если в результате опыта обязательно наступает хотя бы одно из них.
9. Группа событий называется группой несовместных событий, если все события попарно несовместны.
10. Два события называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу (A и $\overline{A}$).

Комбинация событий

Суммой (объединением) нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением (пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в одновременном появлении этих событий.

◙ <u>Пример:</u> A – попадание в цель при первом выстреле,

B – попадание в цель при втором выстреле.

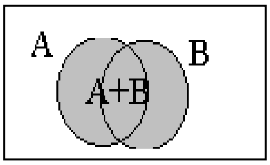
C=A+B – попадание хотя бы при одном выстреле.

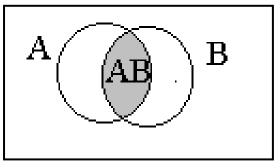
D=AB – попадание в цель при обоих выстрелах.

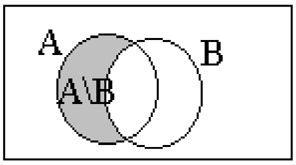
$\overline{\mathrm{A}}$ – промах при первом выстреле.

$\overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}$ – промах только при первом выстреле.

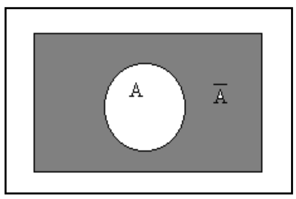
Разностью двух событий A и B называется событие $C = A \setminus B$, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B – нет ($A \setminus B = A \cdot \overline{B}$).







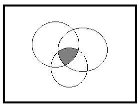
Замечания:



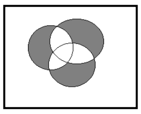
1. Если Ω – полная группа событий, то Ω\A – дополнение к событию A (или противоположное событие): $\Omega \setminus A = \overline{A}$.
2. Если рассматривать событие A при условии существования события B, то $A = AB + A\overline{B}$.

◙ <u>Примеры</u>: A, B, C – произвольные события.

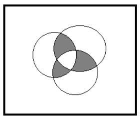
Составить математические выражения для событий:

– произошли все три события: 

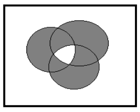
$$ABC$$

– произошло только одно событие: 

$$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$$

– произошло только два события: 

$$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$$

– произошло не более двух событий 

$$AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}=$$
$$=(A+B+C)\setminus ABC=\Omega\setminus ABC$$

Частота события

Относительной частотой $w(A)$ события А называется отношение числа опытов m, в которых появилось событие А, к числу всех опытов n: $w(\mathrm{A})=\dfrac{m}{n}$ $(0\le m\le n)$.

<u>*Свойства относительной частоты*</u>:

1. $0\le w(\mathrm{A})\le 1$.
2. Если А невозможное событие, то $w(\mathrm{A})=0$.
3. Если А достоверное событие, то $w(\mathrm{A})=1$.
4. Если события А и В несовместны, то $w(\mathrm{A}+\mathrm{B})=w(\mathrm{A})+w(\mathrm{B})$,

   где $(A+B)$ − появление либо события A, либо события B.
5. Если события А и В зависимы, то

$$w(AB)=w(A)w(B|A)=w(B)w(A|B),$$

где $w(B|A)$ – условная частота события В, вычисленная при условии наступления события А.

Замечание: Если события А и В независимы, то

$$w(AB)=w(A)w(B).$$

Вероятность события

При увеличении числа испытаний значение частоты $w(A)$ начинает приближаться к некоторому постоянному числу, которое назовём вероятностью события А и обозначим Р(А):

$\lim\limits_{n\to\infty}w(A)=P(A)$ ***(статистическое определение вероятности).***

__Классическое определение вероятности__

Вероятностью события А называется постоянное число P(A), равное отношению числа случаев m, благоприятствующих появлению события A, к общему числу равновозможных в данном опыте случаев n, т. е. $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

◙ Пример:

◘ Проверяя партию товаров в 100 шт, обнаружили 3 бракованных изделия. Событие A – выбранное изделие оказалось бракованным: $w(\mathrm{A})=\dfrac{3}{100}$

◘ Партия товаров в 100 шт имеет 3 бракованных изделия.

Событие A – наудачу выбранное изделие окажется бракованным: $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\dfrac{3}{100}$.

Геометрическое определение вероятности

Если бесконечное число равновозможных исходов образуют некоторую область, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области определяется как отношение размера (длины, площади, объёма) этой области к размеру всей области, в которой может появляться точка.

Аксиомы вероятности

1. Каждому событию A поставлено в соответствие число P(A), которое называют вероятностью события A: $0\le P(A)\le 1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность достоверного события равна 1.
4. Если A и B несовместны, то $\mathrm{P(A+B)=P(A)+P(B)}$,
   где $(A+B)$ − появление либо события A, либо события B.

Замечание: события $\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}$ – несовместны, $\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}}=\Omega$,

$p=\mathrm{P(A)}$, $q=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})=1-p$,

5. Если A и B зависимы, то

$$\mathrm{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)},$$

где $\mathrm{P(B|A)}$ – условная вероятность события B, вычисленная при условии наступления события A.

Замечание: если A и B независимы, то $\mathrm{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}$.

Теоремы вероятности

Теорема умножения 1 *(для зависимых событий):*

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ – зависимы, то вероятность их одновременного наступления (произведения) вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2 \dots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}),$$

где $P(A_k\mid A_1 \dots A_{k-1})$ условная вероятность события A_k, вычисленная в предположении, что все предшествующие события имели место.

***Теорема умножения* 2** (*для независимых событий*):

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ – независимы, то вероятность их одновременного наступления (произведения) вычисляется по формуле:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

Теорема сложения 1 (для несовместных событий):

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ – несовместны, то вероятность наступления одного из них (суммы) вычисляется по формуле:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + (A_n).$$

***Теорема сложения* 2** (*для совместных событий*):

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ – совместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них (суммы) вычисляется по формуле:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q_{A_1} \cdot q_{A_2} \cdot \ldots \cdot q_{A_n}.$$

где q – вероятность ненаступления события.

Теорема (*наступление только одного из двух совместных событий*):

Если события A *и* B – совместны, то вероятность наступления только одного из них вычисляется по формуле:

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = p_A q_B + q_A p_B$$

где p – вероятность наступления события, q – вероятность ненаступления события.

Формула связи суммы и произведения двух совместных событий (*вероятность суммы двух совместных событий*):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

◙ Пример:

Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна p_1=0,4; при втором – p_2=0,7; при третьем – p_3=0,8. Найти вероятности следующих событий:

◘ А – стрелок попал только при 1-ом и 3-ем выстрелах.

$$P(A) = p_1 q_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}096$$

◘ В – стрелок обязательно попал только при 1-ом и 3-ем выстрелах.

$$P(B) = p_1 (q_2 + p_2) p_3 = 0{,}4 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$

◘ С – стрелок попал хотя бы один раз (1раз, 2 раза, 3раза)

$$P(C) = P(\Omega - \overline{C}) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}036 = 0{,}964,$$

где $\overline{C}$ – стрелок не попал ни разу (попал 0 раз)

◘ D – стрелок попал не более двух раз (0,1,2)

$$P(D) = P(\Omega - \overline{D}) = 1 - p_1 p_2 p_3 = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1 - 0{,}224 = 0{,}776$$

где $\overline{D}$ – стрелок попал более двух раз (попал 3 раза)

Вероятность события при гипотезе

Рассмотрим событие А при уточняющих гипотезах.

◙ Пример: Событие А – "студент сдал экзамен".

Событие А при гипотезе H_1 – "студент сдал экзамен на отл.",

Событие А при гипотезе H_2 – "студент сдал экзамен на хор.",

Событие А при гипотезе H_3 – "студент сдал экзамен на уд.".

Формула полной вероятности

Если гипотезы H_i образуют полную группу попарно несовместных событий ($\sum_{i=1}^{n} p(H)_i = 1$), то вероятность появления события А вместе с одной из гипотез вычисляется по формуле: $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

где $P(A|H_i)$ условная вероятность события A, вычисленная в предположении наличия гипотезы H_i.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}$$ – ***Формула Бейеса,***

для вычисления вероятности гипотезы после испытания, когда событие А уже наступило.

◙ Пример: В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность, что машина–автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчёт на наудачу выбранной машине.

◘ Найти вероятность, что машина не выйдет из строя.

Событие А – "машина не выйдет из строя".

Гипотеза	*Вероятность гипотезы* $P(H_i)$	*Вероятность события при выбранной гипотезе* $P(A\|H_i)$
H_1 – студент выбрал машину I-ого типа	$P(H_1) = \frac{6}{10}$	$P(A\|H_1) = 0{,}95$
H_2 – студент выбрал машину II-ого типа	$P(H_2) = \frac{4}{10}$	$P(A\|H_2) = 0{,}8$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0{,}6 \cdot 0{,}95 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}89$$

◘ Студенту удалось произвести расчёты. Найти вероятность, что он работал на машине I-ого типа.

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}95}{0{,}89} \approx 0{,}64.$$

Последовательность независимых однородных испытаний

I. Производится n испытаний, в каждом из которых событие A может наступить с вероятностью $p=const$, не зависящей от исхода других испытаний.

Пусть событие А произошло m раз, тогда событие $\overline{A}$ – (n-m) раз. Составим событие $\mathrm{B} = \underbrace{\mathrm{A}\cdot\ldots\cdot\mathrm{A}}_{m}\cdot\underbrace{\overline{\mathrm{A}}\cdot\ldots\cdot\overline{\mathrm{A}}}_{n-m}$, где A произошло первых m раз. Так как испытания независимы, то

$$\mathrm{P(B)} = \underbrace{\mathrm{P(A)}\cdot\ldots\cdot\mathrm{P(A)}}_{m}\cdot\underbrace{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})}_{n-m} = p^m\cdot q^{n-m}.$$

Событие A может появиться в разной очерёдности. Число таких комбинаций очерёдности наступления события А равна $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, и каждая комбинация имеет вероятность $\mathrm{P(B)}$. Тогда вероятность, что событие А произойдёт ровно m раз в n испытаниях, будет вычисляться по формуле:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot P(B)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$$ – ***формула Бернулли.***

II. При больших значениях n $(n\to\infty)$ применение формулы Бернулли приводит к большим вычислениям. Поэтому используют приближённые формулы.

А) При $n\to\infty$ и малых вероятностях p (p<<0,1).

Обозначим $n\,p=\lambda$ $(=const<10,\ т.к.\ n,\ p-const)$.

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$$ – ***формула Пуассона.***

В) При больших значениях n $(n\to\infty)$, но не слишком малых вероятностях p формула Пуассона даёт значительную погрешность. В связи с этим применяется другое приближение – ***локальную формулу Муавра-Лапласа:***

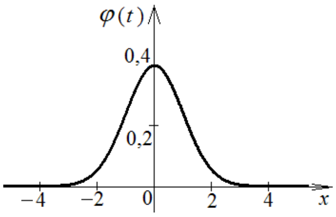
$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

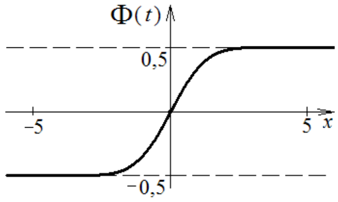
где $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ – функция Гаусса (табулирована).

С) Вероятность наступления события А в интервале $[m_1,\ m_2]$ раз при n испытаниях определяется ***по интегральной формуле Муавра-Лапласа***:

$$\mathrm{P}(\text{от } m_1 \text{ до } m_2)\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ – функция Лапласа (табулирована).

<table>
<tr><th>Свойства функции Гаусса $\varphi(t)$</th><th>Свойства функции Лапласа $\Phi(t)$</th></tr>
<tr><td>
1. Чётность: $\varphi(-t)=\varphi(t)$
2. Для $t\in[-4;4]$: $\varphi(\mathrm{t})\in[0;0{,}4]$
3. Для $t\notin[-4;4]$: $\varphi(\mathrm{t})=0$
4. $\varphi_{\max}(t)=\varphi(0)=0{,}4$


</td><td>
1. Нечётность $\Phi(-t)=-\Phi(t)$
2. Для $t\in[-5;5]$: $\Phi(t)\in[-0{,}5;\ 0{,}5]$
3. Для $t\in[5;\infty]$: $\Phi(t)=0{,}5$.


</td></tr>
</table>

В результате вероятность наступления события А ровно m (или в интервале $[m_1,\ m_2]$) раз при n испытаниях определяется по формуле Бернулли или по предельным формулам, представленным в таблице.

<table>
<tr><th>Ограничения</th><th>Вероятность наступления события А ровно m раз в n испытаниях $\mathrm{P}_n(m)$</th><th>Вероятность Наступления события А в интервале $[m_1,\ m_2]$: $\mathrm{P}_n(m_1\le m\le m_2)$</th></tr>
<tr><td>Если n невелико и $0{,}1<p<0{,}9$</td><td>Формула Бернулли: $P=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$</td><td>$P=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2}C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$</td></tr>
<tr><td>Если n велико и $p<<0{,}1$ (или $q>>0{,}9$)</td><td>Формула Пуассона: $P\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, где $\lambda=np$ $(\lambda<10)$</td><td rowspan="2">Интегральная формула Муавра-Лапласа: $\mathrm{P}\approx\Phi(t_1)-\Phi(t_2)$,
где $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$
$t_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $t_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$,</td></tr>
<tr><td>Если n велико и $0{,}1<p<0{,}9$</td><td>Локальная формула Муавра-Лапласа: $\mathrm{P}\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t)$,
где $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$,
$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$</td><td></td></tr>
</table>

◙ <u>Пример</u>. Найти вероятность события A – "из n человек гриппом заболеет m человек", если известна вероятность заболевания *p*.

◘ *n=6, m=4, p=0,4*

по формуле Бернулли имеем:

$$\mathrm{P}_6(4)=\mathrm{C}_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}=\mathrm{C}_6^4\cdot p^4\cdot q^2\approx 0{,}138$$

◘ *n=100, m=4, p=0,4*

по локальной формуле Муавра-Лапласа имеем:

$$t=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{4-100\cdot 0{,}4}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\approx -7{,}348$$

$$\varphi(t)=\varphi(-7{,}348)=\varphi(7{,}348)=0{,}0001$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_{100}(4)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}0{,}0001\approx 2\cdot 10^{-5}$$

◘ *n=100, m=4, p=0,04*

по формуле Пуассона имеем:

$$\lambda=np=100\cdot 0{,}04=4<10\Rightarrow \mathrm{P}_{100}(4)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\frac{4^4}{4!}e^{-4}=.....$$

Простейший поток событий (пуассоновский)

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

◙ *<u>Пример</u>*: В справочной службе в течение 5 минут раздаётся 10 звонков.

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами:

1) *стационарности* (вероятность появления *k* событий в любом промежутке времени длительностью *t* есть функция, зависящая только от *k* и *t*);

2) *"отсутствием последействия"* (вероятность появления *k* событий в любом промежутке времени не зависит от того, появились или не появились события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка);

3) *ординарности* (появление двух или более событий за малый промежуток времени практически невозможен).

Введем следующие обозначения:

L – длина временного интервала;

n – число событий, произошедших за время L;

μ – интенсивность потока (среднее число событий, которые появляются в единичном временном отрезке): $\mu=\dfrac{n}{L}$;

Рассмотрим временной отрезок длины $l<<L$, тогда вероятность, что одно из событий произойдёт за время l, равна геометрической вероятности $p=\dfrac{l}{L}=const<<0{,}01$.

Тогда по формуле Пуассона имеем:

вероятность наступления события А ровно m *раз в заданном временном интервале вычисляется по формуле:*

$$\mathrm{P}(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad где \quad \lambda = np = n \cdot \frac{l}{L} = \frac{n}{L} \cdot l = \mu \cdot l$$

Вероятность наступления события А не более k *раз в заданном временном интервале вычисляется по формуле:*

$$\mathrm{P}(m \le k) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

◙ <u>Пример</u>:

Среднее число заказов такси за минуту равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: a) 2 вызова; b) не менее трёх вызовов.

Решение.

a) $\mu = 3$, $l = 2$, $\lambda = \mu \cdot l = 6$. Тогда $\mathrm{P}(2) = \frac{6^2}{2!} e^{-6} = 0{,}045$.

b) $\mathrm{P(m \ge 3)} = 1 - \mathrm{P(m < 3)} = 1 - e^{-6} \cdot \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} \right) = 0{,}938$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число $m_0 \in \mathrm{N}$ наступления события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления p события есть величина постоянная, называют ***наивероятнейшим числом***, если ему соответствует максимальное значение вероятности $\mathrm{P}_n(m_0)$.

При заданных n и p это число определяется формулой:

$$np - q \le m_0 \le np + p, \quad \text{где} \quad m_0 \in \mathrm{N}$$

***Замечания*:**

1) np – целое, то наивероятнейшее число $m_0 = np$.
2) $(np - q)$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число;
3) $(np - q)$ – целое,

то существует два наивероятнейшего числа $m_0 = \left[\begin{array}{l} np - q \\ np - q + 1 \end{array} \right.$;

ОДНОМЕРНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайной величиной (СВ) **X** называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное число.

Законом распределения случайной величины называется любое правило, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

Различают два типа СВ: дискретные; непрерывные.

Дискретной СВ называется такая величина, число всевозможных значений x_i которой является счётным множеством (конечным или бесконечным).

Непрерывной СВ называется такая величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

◙ Пример

1. X – число человек, пришедших на лекцию – дискретная СВ.
2. X (град) – температура воздуха в данный момент – непрерывная СВ.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для любого вещественного числа *x* равна вероятности события $X < x$: $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения F(x):

1. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
2. $F(x)$ - неубывающая непрерывная функция.
3. $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Функция распределения $F(x)$ является вероятностной характеристикой случайной величины X, т.е. одним из видов закона распределения случайной величины X (для дискретной и непрерывной СВ).

Закон распределения дискретной случайной величины

Пусть в результате опыта могут произойти следующие события $X = x_1, X = x_2, ..., X = x_n$, которые образуют полную группу событий.

Каждому событию $X = x_i$ будет соответствовать вероятность p_i, причём:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X = x_i\right) = P(\Omega) = 1$$

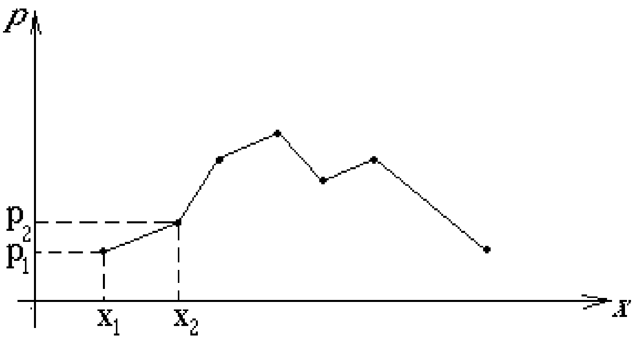
Законом распределения вероятностей СВ X называется функция $f(x_i) = p_i$, устанавливающая связь между возможными значениями x_i и их соответствующими вероятностями p_i.

I. ***Табличный закон распределения***

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2		p_n	

$\sum p_i = 1$

Табличный закон можно проиллюстрировать на графике:

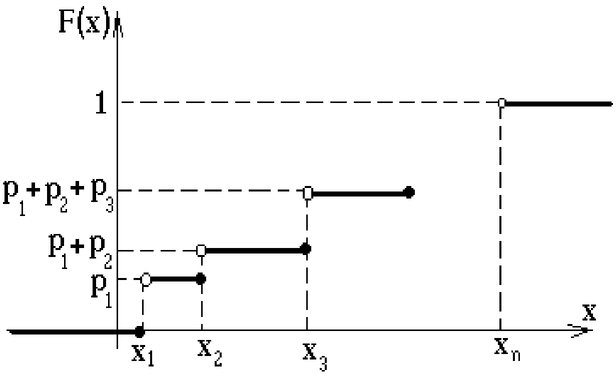


Ломаная, соединяющая точки $(x_i; p_i)$ называется ***многоугольником распределения.***

II. ***Интегральный закон распределения***

– определяется интегральной функцией распределения:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4, \\ \ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, & x_n < x. \end{cases}$$



Свойства интегральной функции:

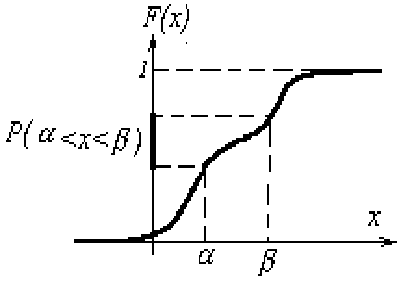
1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;
3. $P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;
4. $F(x)$ – неубывающая функция.

Закон распределения непрерывной случайной величины

I. Интегральный закон распределения

Интегральной функцией распределения непрерывной СВ X называется функция $F(x)$, которая для любого действительного числа x равна вероятности события $\{X < x\}$:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ F_1(x), & x_1 < x \le x_2, \\ F_2(x), & x_2 < x \le x_3, \\ \dots \\ 1, & x_n < x. \end{cases}$$



Теорема: Вероятность попадания значений СВ в интервал $(\alpha;\beta)$ определяется формулой: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Замечание: Для непрерывной СВ вероятность попасть в точку равна нулю, поэтому интервал $(\alpha;\beta)$ может быть закрытым или полуоткрытым.

Свойства интегральной функции:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;
3. $F(x)$ **–** неубывающая функция;
4. $F(x)$ – непрерывная функция.

II. Дифференциальный закон распределения

Дифференциальной функцией распределения непрерывной СВ X (**плотностью** распределения) называется функция:

$$f(x) = F'(x),$$

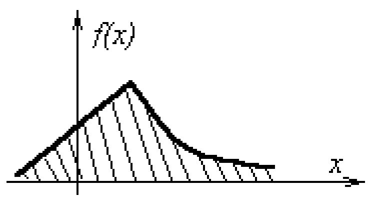
где $F(x)$ – интегральная функция распределения СВ.

Плотность распределения указывает на то, как часто СВ появляется в некоторой окрестности т. x при повторении опытов.

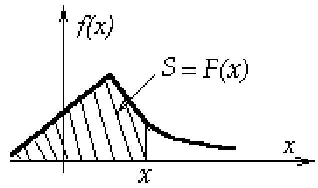
График плотности распределения $f(x)$ называется ***кривой распределения***.

Свойства плотности вероятности:

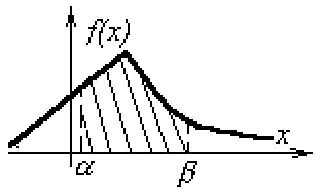
1. $f(x) \ge 0\ \forall x \in R$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ – основное свойство плотности. Геометрически это означает, что площадь соответствующей криволинейной трапеции =1;



3. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ – нахождение функции распределения по плотности СВ.



4. $P(\alpha<x<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} \ = S_{кр.тр}$



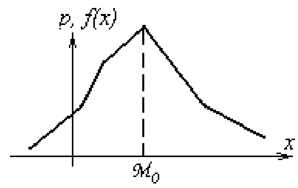
Числовые характеристики СВ

Числовые характеристики *СВ* – это числа, которые характеризуют особенности распределения СВ.

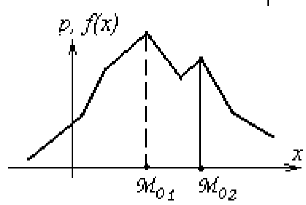
I. Модой *СВ Х* (обозн: M_0) называется такое значение *СВ:*

в случае дискретной СВ	в случае непрерывной СВ
которому соответствует максимальное значение вероятности.	которому соответствует максимум дифференциальной функции.

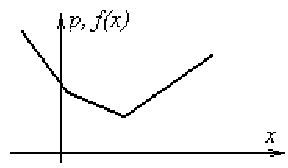
- Если график распределения СВ Х обладает единственным локальным максимумом, то распределение называется ***модальным***.



- Если график распределения имеет несколько локальных максимумов, то распределение называется ***полимодальным.***



- Если график распределения не имеет локальных максимумов, но имеет локальный минимум, то распределение называется ***антимодальным.***



II. Медианой СВ Х называется такое значение СВ (обозн: M_L), для которого справедливо:

в случае дискретной СВ	в случае непрерывной СВ
$\begin{cases} P(X \le M_L) \ge 0{,}5; \\ P(X \ge M_L) \ge 0{,}5 \end{cases}$	$P(X<M_L)=P(X>M_L)=0{,}5$ Графически – это точка $x=M_L$, для которой прямая $x=M_L$ делит пополам площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения.

III. Математическим ожиданием СВ называется ориентировочное (среднее) число, около которого группируются все возможные значения СВ.
(Обозначения: $M[X]$, m_X)

1) Если p_i принять за "вес" значения x_i дискретной СВ, то центр масс $M[X]$ будет определяться формулой

$$M[X]=\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n},$$

учитывая что $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, имеем $M[X]=\sum_i x_i p_i$

2) В случае с непрерывной СВ точечная вероятность $p_i = 0$. Поэтому работают с интервальной вероятностью: $\Delta p_i = P(x_i < X < x_{i+1})$, которая равна площади частичной криволинейной трапеции графика дифференциальной функции СВ. При большом разбиении интервала значений СВ X частичная криволинейная трапеция принимает форму прямоугольника, следовательно $\Delta p_i = S_i = f(x_i)\cdot \Delta x_i$
Тогда, переходя к пределу, имеем

$$M[X]=\lim_{n\to+\infty}\sum_i x_i \cdot f(x_i)\cdot \Delta x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx.$$

Если распределение является симметричным; модальным; и для него существует математическое ожидание, то оно ($M[X]$) совпадает с медианой M_L и модой M_0 – центром симметрии распределения.

Свойства:

1. $M[C]=C$, где $C = const$
2. $M[C\cdot X]=C\cdot M[X]$
3. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$
4. $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$, где $X, Y - \textit{независимые СВ}$

IV. Средняя величина $M[X]$– это абстрактная, обобщающая характеристика распределения СВ. Значения СВ всегда колеблются около своего среднего значения. Это явление называют рассеиванием СВ. Но $M[X]$ не даёт представления о том, как отдельные значения СВ сосредоточены вокруг неё.

Рассеивание СВ определяет непредсказуемость принимаемых значений СВ, показателем которой является степень отклонения СВ от её математического ожидания.

Центрированной СВ $\overset{\circ}{X}$, соответствующей СВ X, называется отклонение величины от своего математического ожидания: $\overset{\circ}{X} = X - M[X]$. Закон распределения центрированной СВ совпадает с законом распределения самой СВ. При этом кривая распределения становится "симметричной" относительно оси OY.

Дисперсией СВ X (обозначение: $D[X]$) называется математическое ожидание квадрата центрированной СВ $\left(\overset{\circ}{X}{}^2\right)$:

$$D[X]=M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right]=M\left[(X-m_X)^2\right].$$

Дисперсия является мерилом надёжности математического ожидания. Чем меньше дисперсия, тем лучше $M[X]$ отражает собой всё распределение СВ.

Формула для вычисления

в случае дискретной СВ	в случае непрерывной СВ
$D[X]=\sum_i (x_i-m_X)^2\, p_i$	$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^2\, f(x)dx$

Если воспользуемся свойствами математического ожидания, то получим формулу для вычисления дисперсии СВ:

$$D[X]=M\left[X^2\right]-m_X^2 .$$

<u>*Свойства*</u>

1. $D[C]=0$, *где* $C=const$
2. $D[C\cdot X]=C^2\cdot D_X$
3. $D[X\pm Y]=D_X+D_Y$
4. $D[X\cdot Y]=D_X\cdot D_Y+m_Y^2\cdot D_X+m_X^2\cdot D_Y$,   *где* X,Y *– независимые СВ.*

V. Дисперсия СВ имеет размерность квадрата. Для наглядности ввели понятие среднего квадратического отклонения СВ, имеющего одинаковую с ней размерность.

Средним квадратическим отклонением СВ X называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma[X]=\sqrt{D_X}$.

СВ X называется стандартной, если справедливо:

$$M[X]=0 \text{ и } D[X]=1.$$

VI. Серединным (вероятным) отклонением СВ X (обозн: E_X), называется половина участка, симметричного относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна 0,5: $P\left(|X-m_X|<E_X\right)=0{,}5$.

Обобщение числовых характеристик

Начальным моментом k–ого порядка СВ X называется математическое ожидание СВ, возведённой в k–ую степень: $\nu_k=M\left[X^k\right]$

В частности: $\nu_1=M[X]$.

Абсолютным начальным моментом k–ого порядка СВ X называется математическое ожидание модуля СВ, возведённого в k–ую степень:

$$\alpha_k=M\left[|X|^k\right]$$

Начальные моменты, мода, медиана являются характеристиками общего вида графика распределения СВ.

Центральным моментом k–ого порядка СВ X называется математическое ожидание центрированной СВ, возведённой в k–ую степень:

$$\mu_k=M\left[\overset{\circ}{X}{}^k\right]=M\left[(x_i-m_X)^k\right]$$

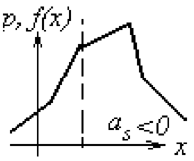
В частности:

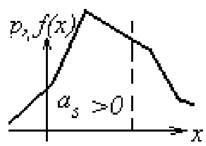
$$\mu_1 = M[X] - m_X = 0; \quad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = D[X];$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \qquad \mu_4 = \nu_4 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 - 4\nu_3\nu_1.$$

Третий центральный момент μ_3 служит для характеристики асимметрии («скошенности») графика распределения СВ.

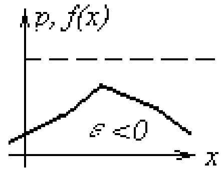
$a_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ – ***коэффициент асимметрии***

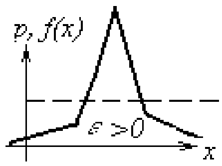




Четвёртый центральный момент μ_4 характеризует островершинность графика распределения СВ.

$\varepsilon_s = \dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3$ – ***эксцесс***





СВ X, у которой $a_s = 0,\ \varepsilon_s = 0$, является нормально распределённой.

Абсолютным центральным моментом k–ого порядка СВ X называется математическое ожидание модуля центрированной СВ, возведённого в k–ую степень: $\beta_k = M\left[\left|\overset{\circ}{X}\right|^k\right] = M\left[\left|x_i - m_X\right|^k\right].$

Распределения дискретной случайной величины

1. ***Биномиальное распределение определяется формулой Бернулли***:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}, \ \ m = 0,1,\dots,n, \ q = 1 - p$$

Случайная величина X есть число появлений события A при n независимых испытаниях по схеме Бернулли.

Справедливы формулы: $M[X] = np,\ D[X] = npq$.

2. ***Распределение Пуассона*** определяется формулой:

$$P(X = m) = P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},\ m = 0,1,\dots, \text{ где } \lambda = np\,.$$

При этом $M[X] = \lambda,\ D[X] = \lambda$.

Распределение Пуассона является предельным законом биномиального распределения, когда n – велико, а p – мало ($p \le 0{,}1$).

3. ***Геометрическое распределение*** определяется формулой:

$$P(X = k) = p \cdot q^{k-1},\ k = 1,2,\dots$$

Случайная величина X есть число испытаний в так называемой «геометрической схеме испытаний»: независимые испытания проводятся до первого появления события А. При этом событие А в каждом испытании может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$.

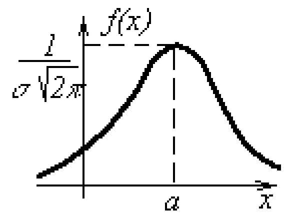
X	1	2	3	….	n	….
p	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	…..	$q^{n-1} \cdot p$	….

Имеют место формулы: $M[X] = \dfrac{1}{p}$, $D[X] = \dfrac{q}{p^2}$.

Распределения непрерывной случайной величины

1. ***Нормальное распределение (закон Гаусса)*** определяется плотностью вероятности

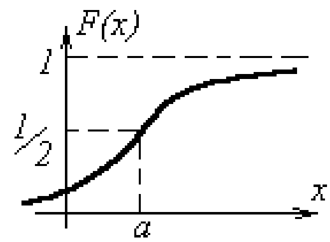
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right)$$



Краткое обозначение нормального закона: $N(a,\sigma)$.
Справедливы формулы: $M[X] = a, D[X] = \sigma^2$.

Функция распределения нормального закона $F(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma} \right)$,

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\dfrac{t^2}{2} \right) dt$ – функция Лапласа.



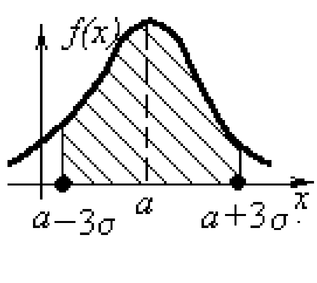
Значения функции Лапласа табулированы.
Свойства функции Лапласа: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1/2$, $\Phi(x)$ – нечетная функция.
Справедливы формулы вычисления вероятностей:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma} \right),$$

$$P(|X - m_X| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma} \right).$$

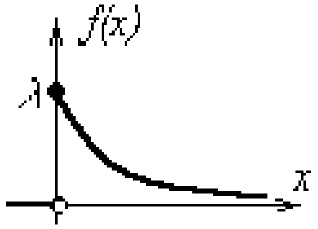
«Правило трех сигм»:

$P(|X - m_X| < 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) = 0{,}9973$, вероятность $p = 0{,}9973$ называется *практической достоверностью.*



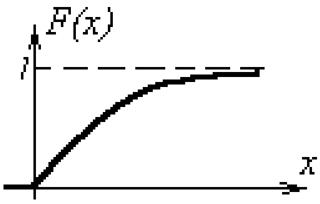
2. ***Показательное (экспоненциальное) распределение*** определяется плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases},\ \lambda>0$$



Функция распределения показательного закона

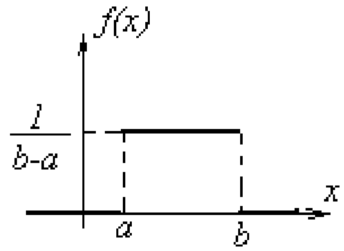
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$



Справедливы формулы: $M[X]=\dfrac{1}{\lambda}, D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

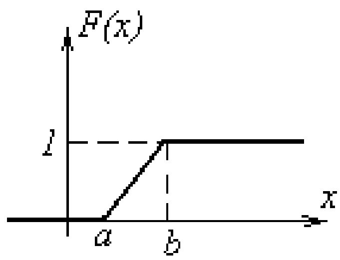
4. ***Равномерное распределение на*** $[a,b]$ определяется плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$



Функция распределения равномерного закона

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 1, & x>b\end{cases}$$



Для него справедливо $M[X]=\dfrac{a+b}{2}, D[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

ДВУМЕРНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Пусть на вероятностном пространстве Ω заданы две случайные величины: $X = X(\omega),\ Y = Y(\omega),\ \omega \in \Omega$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие упорядоченная пара значений (x, y) случайных величин X, Y.

Упорядоченную пару (X, Y) двух одномерных случайных величин X, Y называют ***двумерной случайной величиной.***

Двумерную случайную величину называют также ***случайным двумерным вектором, случайной двумерной точкой, системой двух случайных величин.*** Одномерные случайные величины X, Y называются ***компонентами*** двумерной случайной величины (X, Y).

Функцией распределения $F_{XY}(x, y)$ ***двумерной случайной величины*** (X, Y) называется вероятность произведения событий $X < x$ и $Y < y$, определенная для любых вещественных x, y: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$.

Функция $F(x, y)$ для краткости называется ***двумерной функцией распределения.***

Геометрический смысл равенства (1): функция $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y); точка (X, Y) будет левее и ниже этой вершины.

Свойства двумерной функции распределения

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.
2. $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$.
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$.
4. $F(x, +\infty) = P(X < x) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = P(Y < y) = F_2(y)$,
   где $F_1(x), F_2(y)$ – функции распределения ее одномерных компонент.
5. $F(x, y)$ неубывающая функция по каждому из своих аргументов при фиксированном другом аргументе.

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $\{a \le X < b; c \le Y < d\}$:

$$P(a \le X < b; c \le Y < d) = [F(b, d) - F(a, d)] - [F(b, c) - F(a, c)].$$

Дискретная двумерная случайная величина

Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***дискретной,*** если множество ее значений (x, y) – конечное или счетное.

Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X, Y) можно задать формулой

$$P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik} \quad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n).$$

События $X = x_i, Y = y_k$ образуют полную группу событий, поэтому сумма всех вероятностей p_{ik} $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$ равна 1, т.е. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1$.

В случае конечности чисел m и n закон распределения можно оформить в виде таблицы:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	p_2
…	…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	q_2	…	q_n	1

По теореме сложения получаем

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = p_i = P(X = x_i), \ \ i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} = q_k = P(Y = y_k), \ \ k = 1, \dots, n.$$

Если известен закон распределения двумерной случайной величины (X, Y), то можно найти законы распределения компонент X, Y:

x_i	x_1	x_2	…	x_m	$\sum$
p_i	p_1	p_2	…	p_m	1

y_k	y_1	y_2	…	y_n	$\sum$
q_k	q_1	q_2	…	q_n	1

Функция распределения дискретной случайной величины (X, Y) записывается в виде $F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_k < y} p_{ik}$. Суммирование распространяется на те значения i и k, для которых выполняются неравенства $x_i < x,\ y_k < y$.

Условным законом распределения дискретной случайной величины X ***при*** $Y = y_k$ называется множество значений x_i $(i = 1, \dots, m)$ и условных вероятностей $P(x_1/y_k),\ P(x_2/y_k),\ \dots,\ P(x_m/y_k)$, вычисленных по формулам

$$P(x_i/y_k) = P(X = x_i/Y = y_k) = \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{p_{ik}}{q_k}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Аналогично строится условный закон распределения дискретной случайной величины Y при $X = x_i$, где условные вероятности $P(y_k/x_i)$ ($k = 1, \dots, n$) вычисляются по формулам

$$P(y_k/x_i)=P(Y=y_k/X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_k)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ik}}{p_i},\ \ k=1,\ldots,n.$$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Непрерывная двумерная случайная величина

Двумерная случайная величина *называется* (X,Y) ***непрерывной,*** если существует такая неотрицательная функция $f(x,y)$, называемая ***двумерной плотностью вероятности***, что вероятность попадания случайной величины (X,Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по этой области:

$$P((X,Y)\in D)=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy.$$

Из данного равенства следует формула для нахождения функции распределения двумерной непрерывной случайной величины по известной плотности распределения:

$$F(x,y)=P(-\infty<X<x,\ -\infty<Y<y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)dx\,dy.$$

Свойства двумерной плотности вероятности

1. $f(x,y)$ неотрицательная функция и определена на всей плоскости xOy.
2. $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$ в каждой точке непрерывности плотности.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=f_1(x);\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=f_2(y)$, где $f_1(x),\ f_2(y)$ – плотности распределения ее одномерных компонент.
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\,dy=1$.

Функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ одномерных компонент случайного вектора можно получить из функции распределения двумерной случайной величины, которые в непрерывном случае примут вид:

$$F_1(x)=F(x,+\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}f_1(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,$$

$$F_2(y)=F(+\infty,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}f_2(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{y}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

Условной плотностью распределения компоненты X ***при заданном значении*** $Y=y$ называют отношение плотности совместного распределения случайной величины к плотности распределения случайной величины Y:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения компоненты Y:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$

Как и любая плотность распределения, условные плотности обладают следующими свойствами:

$$f(x/y) \ge 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)dx = 1, \text{ и } \quad f(y/x) \ge 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)dy = 1.$$

Зависимость и независимость двух случайных величин

Случайные величины X, Y называются ***независимыми,*** если независимыми являются события $X < x$ и $Y < y$ для любых вещественных x, y. В противном случае величины называются ***зависимыми.***

Общее необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин: $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, где x, y – любые вещественные числа.

Необходимое и достаточное условие независимости двух непрерывных случайных величин: $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, где x, y – любые вещественные числа.

Если условные плотности распределения случайных величин X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы.

Необходимое и достаточное условие независимости двух дискретных случайных величин: $p_{ik} = p_i \cdot q_k$, где $i = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, n$.

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Средние значения (математические ожидания) $M[X] = a, M[Y] = b$ определяют точку (a, b), называемую ***центром совместного распределения вероятностей*** или ***центром рассеивания.***

Корреляционный момент и коэффициент корреляции

Числовыми характеристиками связи между случайными величинами являются корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом K_{XY}, иначе – ***ковариацией двух случайных величин*** X, Y, называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий:

$$K_{XY} = M[(X - m_X) \cdot (Y - m_Y)].$$

Формулы для вычисления корреляционного момента K_{XY}:

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X) \cdot (y - m_Y) \cdot f(x,y)dx\,dy$$

– для непрерывных случайных величин,

$$K_{XY}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(x_i-m_X\right)\cdot\left(y_k-m_Y\right)p_{ik}$$

– для дискретных случайных величин.

Коэффициентом корреляции r_{XY} ***двух случайных величин*** X,Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений:

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}.$$

Если $K_{XY}=0$, то случайные величины X,Y называются ***некоррелированными.***

Из формулы корреляционного момента следуют соотношения

$$D[X]=K_{XX},\ D[Y]=K_{YY}.$$

Свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции

1. $K_{XY}=M[XY]-m_X\cdot m_Y$, где величина $M[XY]$ вычисляется по формуле

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy \text{ – в непрерывном случае,}$$

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_iy_k\cdot p_{ik} \text{ – в дискретном случае.}$$

2. $-1\le r_{XY}\le 1$.
3. Если две случайные величины независимы, то они некоррелированны, то есть $K_{XY}=0$. Обратное неверно: существуют зависимые некоррелированные случайные величины.
4. Для случайных величин $X,\ Y=a\cdot X+b$, связанных линейной зависимостью, $r_{XY}=1$ при $a>0$ и $r_{XY}=-1$ при $a<0$.
5. $D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{XY}$

Двумерные непрерывные распределения

Двумерное равномерное распределение в области D определяется плотностью вероятности $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & \text{при } (x,y)\in D,\\ 0, & \text{при } (x,y)\notin D,\end{cases}$

где S_D – площадь области D, то есть плотность совместного распределения вероятностей сохраняет постоянное значений в области D, которой принадлежат все возможные значения случайного вектора (X,Y).

Двумерное нормальное распределение определяется плотностью вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\,\sigma_Y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\cdot\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_X^2}-2r\cdot\frac{(x-a)\cdot(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\},$$

где a, b – математические ожидания компонент X, Y; σ_X, σ_Y – средние квадратические отклонения компонент X, Y; $r = r_{XY}$ – коэффициент корреляции между компонентами двумерной случайной величины (X, Y).

Компоненты X, Y распределены нормально соответственно по законам $N(a, \sigma_X)$, $N(b, \sigma_Y)$. Равенство $r_{XY} = 0$ является необходимым и достаточным условием независимости компонент X, Y. В этом случае плотность двумерного вектора (X, Y) можно рассматривать как произведение двух плотностей нормального распределения случайных величин X, Y:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma_X^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-b)^2}{2 \cdot \sigma_Y^2}\right\}.$$

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Комбинаторика событий

1. *В одной корзине* 10 *красных шаров и в другой –* 6 *чёрных. Сколькими способами можно выбрать два разноцветных шара?*

Необходим набор по одному элементу из различных групп. Используя формулу комбинаторики 1 ($N=n_1 n_2 \ldots n_k$), получим: $N=10 \cdot 6=60$.

2. *К кассе за получением денег подошли* 4 *человека. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь?*

В каждом способе составления очереди участвуют все элементы (люди) и учитывается порядок их расположения. Т. о. имеют место перестановки:

$N = P_n = n! = 4! = 24$.

3. *Определить сколько трёхзначных чисел можно составить из множества цифр* $\{1,2,3,4,5\}$ *без повторений.*

В каждом наборе трёхзначного числа участвуют не все элементы (цифры) и учитывается порядок их расположения. Т. о. имеют место размещения:

$$N = A_5^3 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

4. *Имеется* 7 *штаммов бактерий. Для определения скорости их роста необходимо выбрать* 3 *штамма. Сколькими способами это можно сделать?*

Способы отбора считаются различными, если каждая отобранная группа штаммов отличается хотя бы одним элементом. Т. о. имеют место сочетания:

$$N = C_7^3 = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35.$$

5. *Сколько «слов» можно составить из всех букв слова:*

– *«кот»*?

Необходим упорядоченный набор всех элементов из совокупности без возвращения. Таким образом, имеют место перестановки: $N = P_3 = 3! = 6$.

– *«кошка»?*

Необходим упорядоченный набор всех элементов из совокупности без возвращения, при этом исходная совокупность состоит из повторяющихся элементов (две буквы «*к*»). Используя формулу комбинаторики 4, получим:
$$N = A(2,1,1,1) = \frac{(2+1+1+1)!}{2!1!1!1!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

– *«котёнок»?*

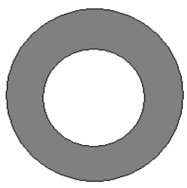
Используя формулу комбинаторики 4 (две буквы «*к*» и две буквы «*о*»), получим:
$$N = A(2,2,1,1,1) = \frac{(2+2+1+1+1)!}{2!2!1!1!1!} = \frac{7!}{2!2!} = 1260.$$

6. *В магазине имеется 3 сорта конфет: «ананасные», «курортные», «мишка на севере». Сколькими способами можно отобрать 5 конфет?*

Необходим произвольный набор элементов из различных совокупностей без возвращения. Используя формулу комбинаторики 7 ($N = \overline{C_n^k} = C_{n+m-1}^k$), получим:
$$N = \overline{C_3^5} = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{5!}{7!2!} = 21.$$

Вероятность события

1. *На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 см и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.*

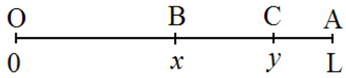


$n = S_{\text{бол. круга}} = \pi R^2 = 10^2\pi;$

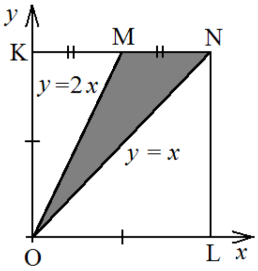
$m = S_{\text{кольца}} = \pi(R^2 - r^2) = (10^2 - 5^2)\pi.$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{(10^2 - 5^2)\pi}{10^2\pi} = 0{,}75.$$

2. *На отрезке ОА длины L поставлены две точки B (x) и C (y), причём y > x. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше длины отрезка OB.*



Координаты точек B и C удовлетворяют неравенствам: $\begin{cases} 0 \le x \le L, \\ 0 \le y \le L, \\ x \le y, \end{cases}$ которые определяют область G = ΔONK всевозможных значений *x*, *y*.



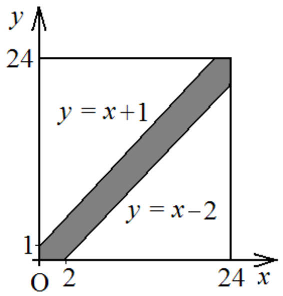
Длина BC должна быть меньше длины OB, т. е. имеет место неравенство: $y - x \le x \Rightarrow y \le 2x$, которое определяет область g = ΔOMN благоприятных значений *x*, *y* .

Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{\text{площадь(g)}}{\text{площадь(G)}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot \mathrm{h_{MN}}}{\frac{1}{2}\mathrm{OK}\cdot\mathrm{KN}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{L}}{2}\cdot\mathrm{L}}{\frac{1}{2}\mathrm{L}^2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.\cdot$$

3. *Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Определить вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно* 1 *часу, а второго –* 2 *часа.*

Обозначим через *x* и *y* – время прихода первого и второго пароходов соответственно. Множество исходов задачи представлено на рисунке.



Система $\begin{cases} 0 \le x \le 24, \\ 0 \le y \le 24, \end{cases}$ определяет область G – область всевозможных значений *x*, *y*.

Система $\begin{cases} y - x \le 1, \\ x - y \le 2, \end{cases}$ определяет область g – область благоприятных значений *x*, *y*.

Тогда искомая вероятность: $P = \dfrac{S(\mathrm{g})}{S(\mathrm{G})} = \dfrac{24\cdot 24 - \frac{1}{2}23\cdot 23 - \frac{1}{2}22\cdot 22}{24\cdot 24} \approx 0{,}121.$

4. *В урне имеется* 10 *одинаковых шаров, из которых* 4 *красных и* 6 *голубых. Извлекаются все шары. Какова вероятность событий:*

- *A – первый по счёту шар окажется голубым;*
- *B – последний по счёту шар окажется голубым;*
- *C – второй по счёту шар окажется голубым?*

Общее число равновозможных исходов $n = 10$ – “на месте данного порядкового номера может оказаться любой из 10 шаров”.

Событие	Число элементов, благоприятствующих событию	Искомая вероятность $P = \frac{m}{n}$
A	$m = 6$	6/10 = 0,6
B	$m = 6$	0,6
C	$m = 6$	0,6

5. *Брошена игральная кость. Найти вероятности событий:*

- *A – появится число очков, равное двум;*
- *B – появится число очков не меньше, чем* “2”;
- *C – появится чётное число очков;*
- *D – появится число очков больше, чем* “4”.

Общее число исходов $n = 6$ – “может выпасть любое из 6 очков”.

Событие	Число элементов, благоприятствующих событию	Искомая вероятность $P = \frac{m}{n}$
A (*x* = 2)	$m = 1$	1/6
B (*x* = 2, 3, 4, 5, 6)	$m = 5$	5/6
C (*x* = 2, 4, 6)	$m = 3$	3/6 = 1/2
D (*x* = 5, 6)	$m = 2$	2/6 = 1/3

6. *Брошена игральная кость. Известно, что выпало чётное число очков. Найти вероятности событий:*

- *A – появится число очков, равное* “2”;
- *B – появится число очков, не меньшее, чем* “2”.

Общее число исходов $n = 3$ – “может выпасть “2”, “4”, “6” очков”.

Событие	*Число элементов, благоприятствующих событию*	*Искомая вероятность* $P = \frac{m}{n}$
A (*x* = 2)	$m = 1$	1/3 = 0,6
B (*x* = 2, 4, 6)	$m = 3$	3/3 = 1

Теоремы вероятности

Замечание: решение задач приведено двумя способами – по формулам комбинаторики и по теоремам вероятности.

1. *Из разрезной азбуки составлено слово “книга”. Буквы перемешаны. Найти вероятность того, что годовалый ребёнок соберёт данное слово.*

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
Слово – это упорядоченный набор всех данных букв. Следовательно, по формуле перестановок число всевозможных исходов: $n = 5!$. Благоприятный исход только один: $m = 1$. Тогда $P = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.	$p = \frac{1}{5}$ – вероятность появления буквы “*к*” первой (одна возможность из имеющихся пяти букв); $p = \frac{1}{4}$– вероятность появления буквы “*н*” второй (одна возможность из оставшихся четырех букв); $p = \frac{1}{3}$ – вероятность появления буквы “*и*” третьей (одна возможность из оставшихся трех букв); $p = \frac{1}{2}$ – вероятность появления буквы “*г*” четвёртой (одна возможность из оставшихся двух букв); $p = \frac{1}{1}$ – вероятность появления буквы “*а*” последней (одна возможность из оставшейся буквы). Тогда по теореме умножения 1 (для зависимых событий) справедливо: $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$.

2. *Из разрезной азбуки составлено слово “ананас”. Буквы перемешаны. Найти вероятность того, что годовалый ребёнок соберёт данное слово.*

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
Число всевозможных исходов: $n = 6!$. Благоприятных исходов: $m = 3! \cdot 2!$ (так как три буквы “*а*” и две буквы “*н*” могут менять своё место расположения). Тогда $P = \frac{3! \cdot 2!}{6!} = \frac{1}{60}$.	$p = \frac{3}{6}$ – вероятность появления буквы “*а*” первой (в наличие три буквы “*а*” из имеющихся шести букв); $p = \frac{2}{5}$ – вероятность появления буквы “*н*” второй (две возможности из оставшихся пяти букв); $p = \frac{2}{4}$ – вероятность появления буквы “*а*” третьей (осталось две буквы “*а*” из оставшихся четырех букв); и т. д. В итоге: $P = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{60}$.

3. *Набирая номер телефона, абонент забыл три цифры. Найти вероятности событий.*

Событие A – номер набран правильно.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
Для каждой (из трёх) цифры номера есть 10 возможных исходов. Т. е. число всевозможных исходов: $n = 10^3$. Благоприятных исходов: $m = 1$. Тогда $P(A) = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$.	$\text{p} = \frac{1}{10}$ – вероятность набора правильной цифры из имеющихся 10. Тогда: $P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0{,}001$.

B – номер набран правильно, если абонент помнит, что цифры различны.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
Так как номер – это упорядоченный набор трёх различных (без возвращения) цифр из 10, то число всевозможных исходов: $n = \text{A}_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$. Благоприятных исходов: $m = 1$. Тогда $P(B) = \frac{1}{720}$.	$\text{p} = \frac{1}{10}$ – вероятность правильного набора первой цифры из имеющихся 10; $\text{p} = \frac{1}{9}$ – вероятность правильного набора второй цифры из оставшихся 9; $\text{p} = \frac{1}{8}$ – вероятность правильного набора третьей цифры из оставшихся 8. Тогда $P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$.

C – номер набран правильно, если известно, что цифры различны и чётны.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = \text{A}_4^3 = \frac{4!}{1!} = 24$, $m = 1 \Rightarrow \text{P(C)} = \frac{1}{24}$	$P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

4. *Брошены три игральные кости. Найти вероятности событий A, B, C, D, E, F.*

Событие A – на каждой грани появится по “5” *очков.*

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 1$, $\Rightarrow$ $\text{P}(A) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.	$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

B – на всех гранях появится одинаковое число очков.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 6$, $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.	На первой кости может выпасть любое количество очков из шести, а на каждой другой – только то, что зафиксировано первой костью. Тогда $P = \frac{6}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

C – на всех гранях появятся различные числа очков.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$, $\Rightarrow$ $\mathrm{P(C)} = \dfrac{120}{6^3} = \dfrac{5}{9}$.	$P = \dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{9}$.

D – на двух гранях появится по “1” очку, а на третьей – другое число очков.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 5\cdot C_3^1 = 5\cdot\dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = 5\cdot 3 = 15$ – – не “1” (пять других исходов) может выпасть на какой-то одной из трёх костей. Тогда $P(D) = \dfrac{15}{6^3} = \dfrac{5}{72}$.	На какой-то кости выпадает не “1” (пять возможных исходов), а на двух других – “1” (один благоприятный исход из возможных шести): $P = \left(C_3^1\cdot\dfrac{5}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{72}$.

E – на двух гранях появится по одинаковому числу очков, а на третьей – другое число очков.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 6\cdot 5\cdot C_3^2 = 30\cdot 3 = 90$ – – в наборе участвуют какие-то две (из шести) различные цифры. Причём они могут находиться на любых двух из трёх костей. Тогда $P(E) = \dfrac{90}{6^3} = \dfrac{5}{12}$.	На двух костях выпадает одинаковое число очко (на первой кости – любое из шести, а на второй – только это же самое), на третьей кости какое-то другое (пять возможных исходов), причём это число может стоять на любом месте: $P = \left(C_3^2\cdot\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{12}$.

F – на одной кости выпадет “6”, а на двух других гранях другие различные числа очков.

Формулы комбинаторики	Теоремы вероятности
$n = 6^3$, $m = 5\cdot 4\cdot C_3^2 = 60$ – – в наборе участвуют, кроме “6”, какие-то две (из оставшихся пяти) различные цифры. Причём они могут находиться на любых двух из трёх костей. Тогда $P(F) = \dfrac{60}{6^3} = \dfrac{5}{18}$.	На какой-то одной из трёх костей выпадает “6” очков, на второй – другое число (из оставшихся пяти), на третьей – другое (из оставшихся четырех): $P = \left(C_3^1\cdot\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{18}$.

5. *В цехе работают* 6 *мужчин и* 4 *женщины. Отбирается делегация из* 7 *человек. Найти вероятность того, что в ней окажутся* 3 *женщины.*

Для данного события порядок выбора не важен, важен только состав делегации. Поэтому $P=\frac{m}{n}=\frac{C_4^3\cdot C_6^4}{C_{10}^7}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$ (решаем, используя формулы комбинаторики).

6. *В урне 5 пронумерованных шаров. Извлекают 3 шара (без возвращения). Найти вероятность того, что последовательно появятся шары с номерами "1", "4", "5".*

$P=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}$ (решаем с использованием теорем вероятности).

7. *В урне 5 пронумерованных шаров. Извлекают 3 шара (без возвращения). Найти вероятность того, что будут выбраны шары с номерами 1, 4, 5 .*

$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{C_5^3}=0{,}1$ (решаем, используя формулы комбинаторики).

8. *В водоеме обитают три вида хищных рыб: судаки, щуки и окуни в соотношении* 1:2:4. *Для поимки хищной рыбы на некоторое время выставляется живцовая снасть. Оказавшийся в поле зрения хищника живец бывает им схвачен с вероятностью* 0,4 – *для судака;* 0,3 – *для щуки;* 0,2 – *для окуня.*
Найти: 1) *какова вероятность захвата живца хищником, если вероятность обнаружения живца судаком, щукой или окунем пропорциональна их численности;* 2) *к какому виду вероятнее всего принадлежит рыба, схватившая живца.*

Гипотеза H_i	Вероятность гипотезы $P(H_i)$	Вероятность события "захват живца хищником" при данной гипотезе $P(A/H_i)$
Судак обнаружил живца	1/7	0,4
Щука обнаружила живца	2/7	0,3
Окунь обнаружил живца	4/7	0,2

1) Вычислим по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{7}\cdot 0{,}4+\frac{2}{7}\cdot 0{,}3+\frac{4}{7}\cdot 0{,}2=\frac{9}{35};$$

2) Вычислим по формуле Байеса: $P(H_1/A)=\dfrac{\frac{1}{7}\cdot 0{,}4}{\frac{1}{7}\cdot 0{,}4+\frac{2}{7}\cdot 0{,}3+\frac{4}{7}\cdot 0{,}2}=\frac{2}{9};$

$$P(H_2/A)=\frac{\frac{2}{7}\cdot 0{,}3}{\frac{1}{7}\cdot 0{,}4+\frac{2}{7}\cdot 0{,}3+\frac{4}{7}\cdot 0{,}2}=\frac{3}{9};\quad P(H_3/A)=\frac{\frac{4}{7}\cdot 0{,}2}{\frac{1}{7}\cdot 0{,}4+\frac{2}{7}\cdot 0{,}3+\frac{4}{7}\cdot 0{,}2}=\frac{4}{9}.$$

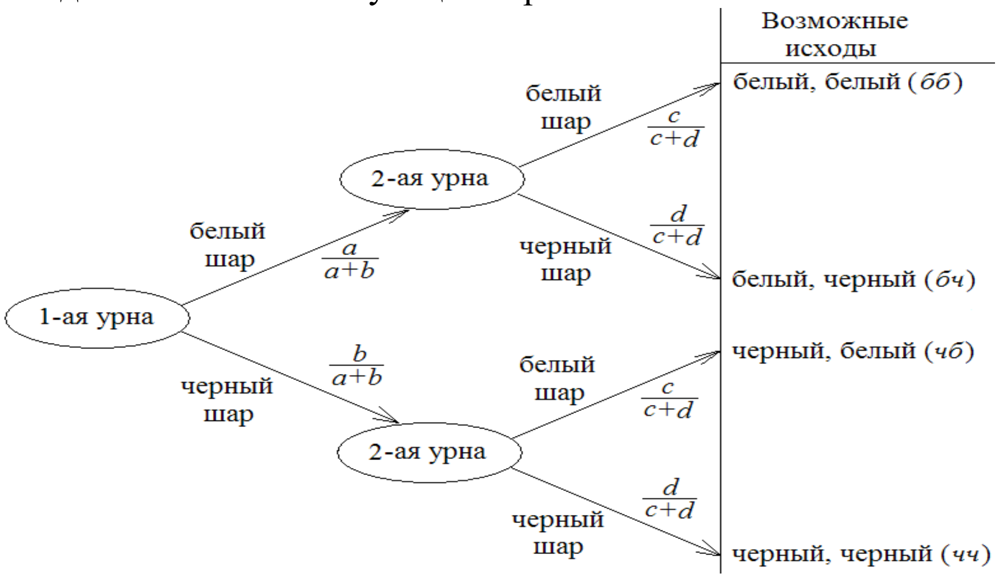
Сравнивая вероятности, делаем вывод, что вероятнее всего окунь схватит живца.

Вероятность сложных событий

1. *В одной урне a белых и b чёрных шаров, в другой – c белых и d чёрных шаров. Из каждой урны вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что:*

- *A – вынутые шары – белые;*
- *B – среди вынутых шаров имеется хотя бы один чёрный.*

Рассмотрим задачу в целом. Для этого построим граф всевозможных исходов и подпишем соответствующие вероятности:

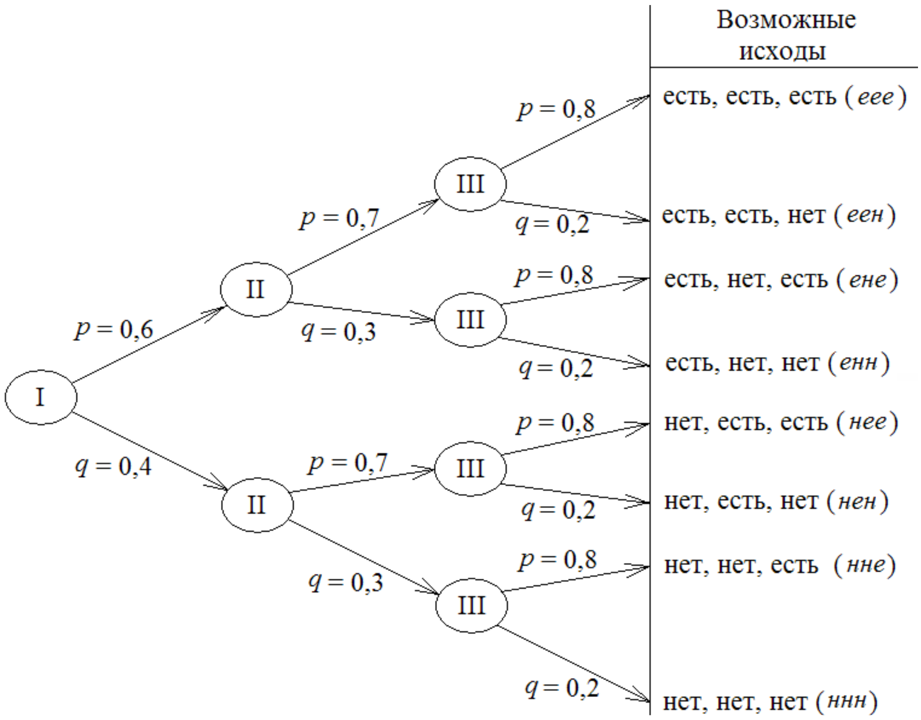


Событие A. Находим нужный исход (*бб*) и прослеживаем “дорогу” в начало. Вероятности, находящиеся на выбранном “пути”, перемножаем: $P(бб)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}$.

Событие B: $\mathrm{P}(бч, чб, чч)=1-\mathrm{P}(бб)=1-\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}$.

2. *Необходимая формула может содержаться в трёх различных справочниках с вероятностями* $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}7$, $p_3=0{,}8$ *соответственно. Найти вероятности событий A, B, C, D.*

Представим граф решения задачи



Событие A – формула содержится только в одном справочнике:

$$P(енн, нен, нне) = p_1\, q_2\, q_3 + q_1\, p_2\, q_3 + q_1\, q_2\, p_3 =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188.$$

Событие B – формула содержится только в первом справочнике:

$$P(енн) = p_1\, q_2\, q_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}036.$$

Событие C – формула содержится во всех справочниках:

$$P(еее) = p_1\, p_2\, p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336.$$

Событие D – формула содержится не более, чем в двух справочниках:

$$P(ннн, енн, нен, нне, еен, ене, нее) = 1 - \mathrm{P}(еее) = 1 - p_1\, p_2\, p_3 = 1 - 0{,}336 = 0{,}664.$$

3. *В одной урне 5 белых и 5 чёрных шаров, в другой – 3 белых и 12 чёрных шаров. Найти вероятности событий A, B, C, D.*

Событие A – некто подходит к урне и наудачу вынимает белый шар.

Гипотеза	Вероятность гипотезы	Вероятность события при данной гипотезе
Выбрана I урна	1/2	5/10
Выбрана II урна	1/2	3/15

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{15} = \frac{7}{20}$ – формула полной вероятности.

Событие B – из первой урны во вторую перекладывается шар. Некто подходит ко второй урне и наудачу вынимает белый шар.

Гипотеза	Вероятность гипотезы	Вероятность события при данной гипотезе

Переложили белый шар	5/10	4/16
Переложили черный шар	5/10	3/16

$P(B)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{16}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{16}=\frac{7}{32}$ – формула полной вероятности.

Событие C – из каждой урны вынимают по одному шару. Из взятых шаров наудачу выбирается белый шар.

Гипотеза	Вероятность гипотезы	Вероятность события при данной гипотезе
Из I урны вынули белый шар, из II урны белый шар	$\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$	$\frac{2}{2}=1$
Из I урны вынули белый шар, из II урны черный шар	$\frac{5}{10}\cdot\frac{12}{15}=\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$
Из I урны вынули черный шар, из II урны белый шар	$\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$
Из I урны вынули черный шар, из II урны черный шар	$\frac{5}{10}\cdot\frac{12}{15}=\frac{2}{5}$	$\frac{0}{2}=0$

$$P(C)=\frac{1}{10}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot 0=\frac{7}{20}=0{,}35$$ – формула полной вероятности.

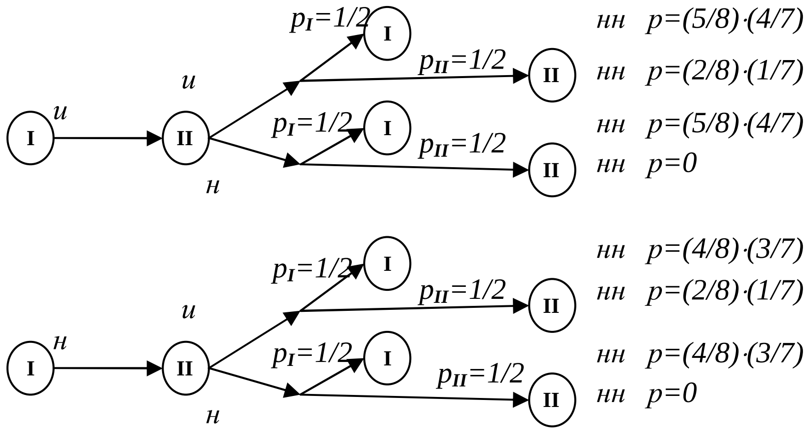
Событие D – из второй урны вынимают два шара. Из взятых шаров наудачу выбирается белый шар.

Гипотеза	Вероятность гипотезы	Вероятность события при данной гипотезе
Вынули два белых шара	$\frac{C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}=\frac{1}{35}$	$\frac{2}{2}=1$
Вынули белый и черный шары	$\frac{C_3^1\cdot C_{12}^1}{C_{15}^2}=2\cdot\frac{3}{15}\cdot\frac{12}{14}=\frac{12}{35}$	$\frac{1}{2}$
Вынули два черных шара	$\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}=\frac{12}{15}\cdot\frac{11}{14}=\frac{22}{35}$	$\frac{0}{2}=0$

$$P(D)=\frac{1}{35}\cdot 1+\frac{12}{35}\cdot\frac{1}{2}+\frac{22}{35}\cdot 0=\frac{14}{70}=\frac{1}{5}$$ – формула полной вероятности.

4. *Имеется две коробки с теннисными мячами. В одной коробке –* 3 *игранных мяча и* 5 *неигранных; в другой –* 6 *игранных и* 2 *неигранных мяча. Для игры первый раз по* 1 *мячу берут из разных коробок. После игры их по одному кладут обратно. Во второй раз* 2 *мяча берут из одной, случайно выбранной, коробки. Какова вероятность того, что они будут неигранными.*

Рассмотрим схему решения задачи, в которой отразим только благоприятствующий исход – во второй раз оба мяча неигранные (событие *A*).



1-ый подход	2-подход	Вероятность благоприятного исхода
Из I-ой урны взяли игранный шар, из II-ой урны взяли игранный шар. $p=\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}$	Подошли к I-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$
	Подошли к II-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}$
I-я урна – игранный шар, II-я урна – неигранный шар. $p=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}$	Подошли к I-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}$
	Подошли к II-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{1}{8}\cdot\frac{0}{7}=0$
I-я урна – неигранный шар, II-я урна – игранный шар. $p=\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{8}$	Подошли к I-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}$
	Подошли к II-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}$
I-я урна – неигранный шар, II-я урна – неигранный шар. $p=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{8}$	Подошли к I-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}$
	Подошли к II-ой урне. $p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{1}{8}\cdot\frac{0}{7}=0$

Обозначения: I, II – коробки, *и* – взяли игранный шар, *н* – неигранный шар, *нн* – оба шара неигранные.

$$P(\mathrm{A})=\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\right)+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+0\right)+\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\right)+$$

$$+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}+0\right)=\frac{264}{1792}.$$

Последовательность независимых однородных испытаний

1. *Стрельба по мишени с вероятностью попадания* $p=0{,}6$. *Найти:*
a) вероятность двух попаданий при пяти выстрелах;

b) вероятность не более трёх попаданий.

Воспользуемся формулой Бернулли:

a) $n=5,\ m=2 \quad\Rightarrow\quad P_5(2)=\mathrm{C}_5^2\cdot p^2\cdot q^{5-2}=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^3=0{,}2304$.

b) $n=5,\ m\le 3 \quad\Rightarrow\quad P_5(m\le 3)=1-\mathrm{P}_5(m>3)=1-\left[\mathrm{P}_5(4)+\mathrm{P}_5(5)\right]=$

$$=1-\mathrm{C}_5^4\cdot p^4\cdot q-p^5=1-\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4-0{,}6^5=0{,}66304.$$

2. *Стрельба по мишени с вероятностью попадания* $p=0{,}5$. *Найти:*
a) вероятность 40 *попаданий при* 100 *выстрелах;*
b) вероятность того, что будет хотя бы 70 *попаданий.*

a) Воспользуемся локальной формулой Лапласа:

$np=100\cdot 0{,}5=50,\qquad npq=100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=25,$

$t=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{40-50}{\sqrt{25}}=-\dfrac{10}{5}=-2,\quad\Rightarrow$ по таблице $\varphi(-2)\approx 0{,}054$.

Тогда $P_{100}(m=40)=\dfrac{\varphi(-2)}{\sqrt{25}}\approx\dfrac{0{,}054}{5}\approx 0{,}011.$

b) Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$t_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{70-50}{\sqrt{25}}=\dfrac{20}{5}=4 \;\Rightarrow$ по таблице $\Phi(t_1)=\Phi(4)=0{,}4616$;

$t_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{100-50}{\sqrt{25}}=\dfrac{50}{5}=10 \;\Rightarrow$ по таблице $\Phi(t_2)=\Phi(10)=0{,}5$.

$$\Rightarrow\ P_{100}(m\ge 70)=\mathrm{P}_{100}(70\le m\le 100)=\Phi(t_2)-\Phi(t_1)=0{,}5-0{,}4616=0{,}0384.$$

3. *Производится стрельба по мишени, вероятность попадания* $p=0{,}06$. *Найти:*
a) вероятность четырёх попаданий при 100 *выстрелах;*
b) вероятность того, что число попаданий будет не более двух;
c) вероятность того, что число попаданий будет находиться в интервале от 5 *до* 30.

a) Воспользуемся формулой Пуассона:

$$\lambda = np = 100 \cdot 0{,}06 = 6 < 10 \;\Rightarrow\; \mathrm{P}_{100}(m=4) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} \approx 0{,}134\,.$$

b) $P_{100}(m \le 2) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) = e^{-6} \cdot \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} \right) \approx 0{,}062\,.$

c) Воспользуемся интегральной формулой Лапласа

$$t_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5-6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94}} \approx -0{,}421 \;\Rightarrow\; \text{по таблице } \Phi(t_1) = -0{,}1631\,;$$

$$t_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30-6}{\sqrt{100 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94}} \approx 10{,}106 \;\Rightarrow\; \text{по таблице } \Phi(t_2) = 0{,}5\,.$$

$$\Rightarrow\; P_{100}(5 \le m \le 30) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 0{,}5 + 0{,}1631 = 0{,}6631\,.$$

Простейший поток событий (Пуассоновский)

1. *Среднее число заказов такси за минуту равно* 3.
Найти вероятность того, что за 2 *минуты поступит:*
a) 2 *вызова; b) не менее трёх вызовов.*

a) $\mu = 3$, $\mathrm{L} = 2$, $\lambda = \mu\mathrm{L} = 6$. Тогда $\mathrm{P}(2) = \frac{6^2}{2!} e^{-6} = 0{,}045\,.$

b) $\mathrm{P(m \ge 3)} = 1 - \mathrm{P(m < 3)} = 1 - e^{-6} \cdot \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} \right) = 0{,}938\,.$

Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

1. *Товаровед осматривает* 32 *изделия. Вероятность того, что изделие будет принято равна* 0,8. *Найти наивероятнейшее число принятых изделий.*

$np = 32 \cdot 0{,}8 = 25{,}6$ – не целое,

$$\left.\begin{aligned} np - q &= 25{,}6 - 0{,}2 = 25{,}4, \\ np + p &= 25{,}6 + 0{,}8 = 26{,}4, \end{aligned}\right\} \Rightarrow 25{,}4 \le m_0 \le 26{,}4\,.$$

Т. к. m_0 должно быть целым числом, то m_0 = 26.

2. *Два стрелка стреляют залпами по мишени. Вероятность промаха для 1-ого стрелка равна* 0,2, *а для 2-ого –* 0,4.

Найти наивероятнейшее число залпов, при которых не будет ни одного попадания, если всего было 25 *залпов.*

Событие “не будет ни одного попадания в мишень” можно рассматривать как “будет общий промах”. Вероятность этого события:

$\mathrm{P} = p_1 \cdot p_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$. Тогда $np = 25 \cdot 0{,}08 = 2 \;\Rightarrow\; m_0$ = 26.

Дискретная случайная величина

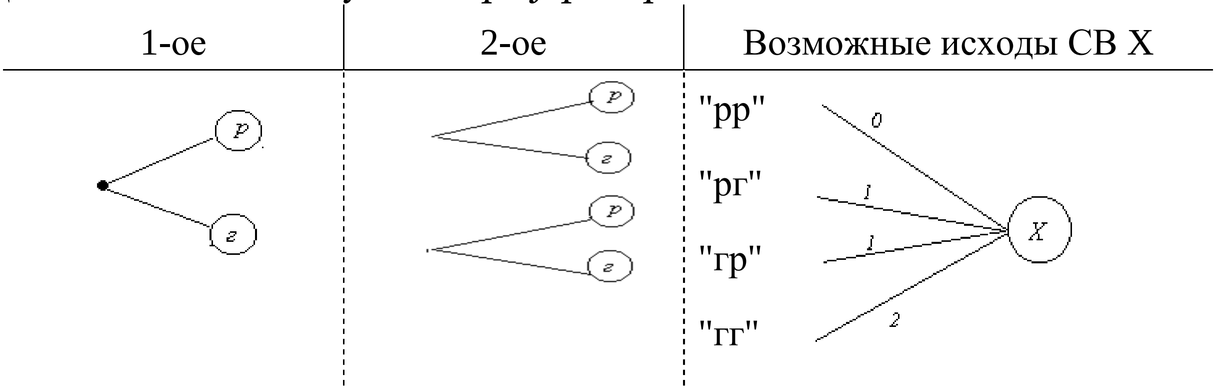
Простейшим примером ДСВ является индикатор события А:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A - \text{произошло}, \\ 0, & \text{если } A - \text{не произошло}. \end{cases}$$

x_i	0	1
p_i	q	p

1. *СВ Х – «число выпадения "герба" при двух подбрасываниях монеты».*

a) Данная СВ имеет следующий *граф распределения:*



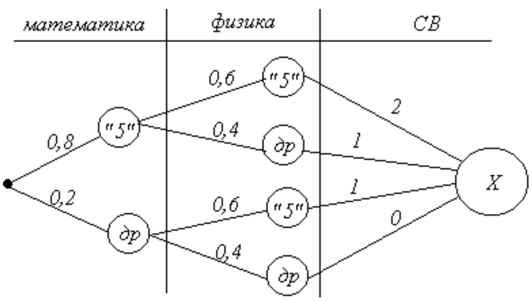
b) *Ряд распределения* СВ X : $(\sum_i p_i = 1)$

Ω	"рр"	"рг, гр"	"гг"
x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

c) *Интегральная функция распределения:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}, & 1 < x \le 2, \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1, & 2 < x. \end{cases}$$

2. *Абитуриент сдаёт два экзамена: по математике и физике. Вероятность получения по математике оценки* "5" *равна* 0,8, *а по физике* – 0,6.
СВ Х – «число полученных пятёрок».

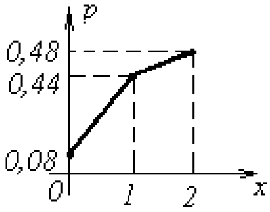


a) Составим *граф*:

b) Получим *ряд распределения:*

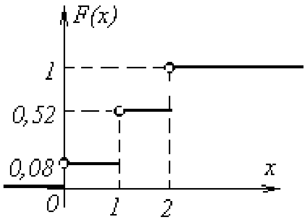
x_i	0	1	2	$\sum_i p_i$
p_i	$0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$	$0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}44$	$0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$	1

c) *Многоугольник распределения СВ* X *:*



Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}08, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}52, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



d) Используя ряд распределения, найдём *числовые характеристики СВ:*

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$	x_i^3	$x_i^3 \cdot p_i$	x_i^4	$x_i^4 \cdot p_i$
0	0,08	0	0	0	0	0	0	0
1	0,44	0,44	1	0,44	1	0,44	1	0,44
2	0,48	0,96	4	1,92	8	3,84	16	7,68
$\sum$	1	1,4		2,36		4,28		8,12

1) $\nu_1 = M[X] = 1{,}4 \Rightarrow$

в среднем абитуриент получит 1,4 штуки оценок "5".

2) *Мода* $M_0 = x = 2$ – вероятнее всего абитуриент получит две оценки "5", так как $P(2) = 0{,}48$ – наибольшее значение вероятности.

3) $\begin{cases} P(0) + P(1) = 0{,}52 \ge 0{,}5; \\ P(1) + P(2) = 0{,}98 \ge 0{,}5. \end{cases}$

Следовательно, *медиана* $M_e = x = 1$.

4) $\nu_2 = M[X^2] = 2{,}36$; $\nu_3 = M[X^3] = 4{,}28$; $\nu_4 = M[X^4] = 8{,}12$;

Дисперсия: $\mu_2 = D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 2{,}36 - 1{,}4^2 = 0{,}4$;

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma[X] = \sqrt{0{,}4} \approx 0{,}63$;

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 4{,}28 - 3 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}36 + 2 \cdot 1{,}4^3 = -0{,}144$;

$\mu_4 = \nu_4 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 - 4\nu_3\nu_1 = 8{,}12 + 6 \cdot 1{,}4^2 \cdot 2{,}36 - 3 \cdot 1{,}4^4 - 4 \cdot 4{,}28 \cdot 1{,}4 = 0{,}3808$;

$$a_s = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} \approx \frac{-0{,}144}{0{,}63^3} \approx -0{,}576 < 0 \Rightarrow$$

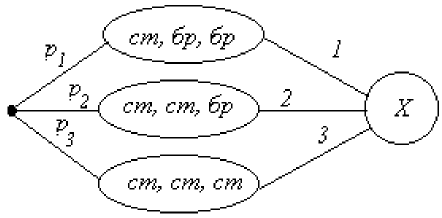
график распределения скошен правее нормального;

$$\varepsilon_k = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 \approx \frac{0{,}3808}{0{,}63^4} - 3 \approx -0{,}5827 < 0 \Rightarrow$$

график расположен ниже нормального.

3. *В ящике* 10 *деталей, из них* 8 *стандартных. Отобраны* 3 *детали. СВ X – «число стандартных деталей среди отобранных».*

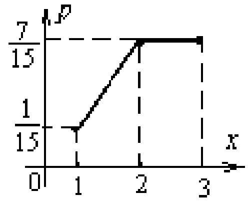
a) Составим *граф:*



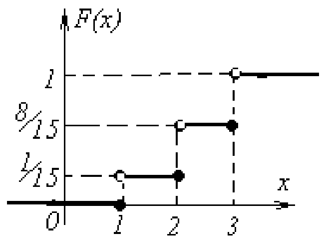
b) Получим *ряд распределения*:

x_i	1	2	3	$\sum_i p_i$
p_i	$\frac{C_8^1 \cdot C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$	$\frac{C_8^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$	$\frac{C_8^3 \cdot C_2^0}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$	1

c) *Многоугольник распределения:*



Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1/15, & 1 < x \le 2, \\ 8/15, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$



d) Используя ряд распределения, найдём *числовые характеристики* СВ:

x_i	p_i	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$	x_i^3	$x_i^3 \cdot p_i$	x_i^4	$x_i^4 \cdot p_i$
1	1/15	1/15	1	1/15	1	1/15	1	1/15
2	7/15	14/15	4	28/15	8	56/15	16	112/15
3	7/15	21/15	9	63/15	27	189/15	81	567/15
$\sum$	1	36/15		92/15		246/15		680/15

1) $\nu_1 = M[X] = \frac{36}{15} = 2{,}4 \Rightarrow$

в среднем среди отобранных – 2,4 стандартных детали;

2) *Мода* $M_0 = x = 2;\ 3-$ вероятнее всего будет 2 или 3 стандартных деталей среди отобранных, так как $P(2) = P(3) = \dfrac{7}{15} -$ наибольшее значение вероятности;

3) *Медиана* $M_e = x = 2$, так как $\begin{cases} P(1) + P(2) = \dfrac{8}{15} \geq 0{,}5; \\ P(2) + P(3) = \dfrac{14}{15} \geq 0{,}5. \end{cases}$

4) *Дисперсия* $\mu_2 = D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \dfrac{92}{15} - \left(\dfrac{36}{15}\right)^2 = \dfrac{84}{225} = \dfrac{28}{75}$;

Среденее квадратическое отклонение: $\sigma[X] = \sqrt{\dfrac{28}{75}} \approx 0{,}6$;

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{246}{15} - 3 \cdot \frac{36}{15} \cdot \frac{92}{15} + 2 \cdot \left(\frac{36}{15}\right)^3 = -0{,}112;$$

$$\mu_4 = \nu_4 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 - 4\nu_3\nu_1 = 0{,}3285;$$

$$a_s = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} \approx \frac{-0{,}112}{0{,}6^3} < 0 \Rightarrow$$

график распределения скошен правее нормального;

$$\varepsilon_k = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 \approx \frac{0{,}3285}{0{,}6^4} - 3 \approx -0{,}461 < 0 \Rightarrow$$

график расположен ниже нормального.

4. *В партии 10% стандартных деталей. Случайным образом взяли 3 детали. СВ X – "число стандартных деталей среди отобранных".*

Так как p=0,1 – *const*, найдём соответствующие вероятности по формуле Бернулли ($p \in [0{,}1; 0{,}9]$, $n = 3 << +\infty$):

$P_3(0) = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729$;

$P_3(1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$;

$P_3(2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$;

$P_3(3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = 0{,}1^3 = 0{,}001$.

Получим *ряд распределения:*

x_i	0	1	2	3	$\sum p_i$
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001	1

Математическое ожидание: $M[X] = n\,p = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$;

Дисперсия $D[X] = n\,p\,q = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

5. *Устройство состоит из* 1000 *элементов. Вероятность отказа 1-го элемента равна* 0,002. *Найти:*
a) вероятность отказа 3–х элементов;
b) вероятность отказа не менее 4–х элементов;
c) основные числовые характеристики СВ X – "числа отказавших элементов".

Так как $n = 1000$ – велико, а $p = 0{,}002$ – мало, то СВ *X* имеет распределение Пуассона.

а) $\lambda = n\,p = 2, \qquad P_{1000}(3) = \dfrac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}18$;

б) $P_{1000}(X \geq 4) = 1 - P_{1000}(X < 4) =$

$$= 1 - \left(P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) + P_{1000}(3) \right) =$$

$$= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right) = 1 - \frac{19}{3} e^{-2} \approx 0{,}14;$$

c) $M[X] = D[X] = \lambda = 2$.

6. *Составить ряд распределения для СВ* $Z = X^2 - 1$, *если закон распределения СВ X задан таблицей*:

x_i	–1	0	1	3	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

x_i	–1	0	1	3	5
$z_i = x_i^2 - 1$	0	–1	0	8	24
p_i	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

z_i	–1	0	8	24	$\sum p_i$
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3	1

7. *Составить ряд распределения для СВ* $Z = 2X + Y$, *если заданы ряды распределения СВ X и Y:*

x_i	–1	0	1	3
p	0,4	0,2	0,3	0,1

y_i	1	2	3
p_y	0,3	0,5	0,2

Найти математическое ожидание и дисперсию СВ Z дважды (по определению и с помощью СВ X и Y).

x_i	y_i	$z_i = 2x_i + y_i$	$p_z = p_x \cdot p_y$
–1	1	–1	$0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$
–1	2	0	$0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$
–1	3	1	$0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$
0	1	1	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$
0	2	2	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$
0	3	3	$0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$
1	1	3	$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$
1	2	4	$0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15$
1	3	5	$0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$
3	1	7	$0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$
3	2	8	$0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}05$
3	3	9	$0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

Сгруппировав одинаковые значения новой СВ Z, суммируя при этом соответствующие вероятности, окончательно имеем:

z_i	–1	0	1	2	3	4	5	7	8	9	$\sum p_i$
p_i	0,12	0,2	0,14	0,1	0,13	0,15	0,06	0,03	0,05	0,02	1

Найдём математическое ожидание и дисперсию СВ *Z*, используя составленный ряд распределения (по определению).

z_i	–1	0	1	2	3	4	5	7	8	9	$\sum_i$
p_i	0,12	0,2	0,14	0,1	0,13	0,15	0,06	0,03	0,05	0,02	1

$z_i\,p_i$	–0,12	0	0,14	0,2	0,39	0,6	0,3	0,21	0,4	0,18	2,3
$z_i^2\,p_i$	0,12	0	0,14	0,4	1,17	2,4	1,5	1,47	3,2	1,62	12,02

$M[Z] = 2{,}3;\quad D[Z] = 12{,}02 - 2{,}3^2 = 6{,}73.$

Найдём математическое ожидание и дисперсию СВ Z, используя исходные ряды распределения СВ X и Y.

x_i	–1	0	1	3	$\sum$
p_x	0,4	0,2	0,3	0,1	
$x_i\,p_i$	–0,4	0	0,3	0,3	0,2
$x_i^2\,p_i$	0,4	0	0,3	0,9	1,6

y_i	1	2	3	$\sum$
p_y	0,3	0,5	0,2	
$y_i\,p_i$	0,3	1	0,6	1,9
$y_i^2\,p_i$	0,3	2	1,8	4,1

$M[X] = 0{,}2;\quad D[X] = 1{,}6 - 0{,}2^2 = 1{,}56.\qquad M[Y] = 1{,}9;\quad D[Y] = 4{,}1 - 1{,}9^2 = 0{,}49.$

Тогда $M[Z] = M[2X + Y] = 2M[X] + M[Y] = 2 \cdot 0{,}2 + 1{,}9 = 2{,}3;$

$D[Z] = D[2X + Y] = 2^2 \cdot D[X] + D[Y] = 4 \cdot 1{,}56 + 0{,}49 = 6{,}73.$

Как мы видим, результаты вычислений совпадают с полученными ранее.

Непрерывная случайная величина

1. *Может ли функция* $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$, $x \in (-3;3)$, *являться дифференциальной функцией распределения непрерывной СВ?*

Проверим основные свойства 1–2:

1) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-3} f(x)\,dx + \int\limits_{-3}^{3} f(x)\,dx + \int\limits_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-3} 0\,dx + \int\limits_{-3}^{3} \frac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}\,dx + \int\limits_{3}^{\infty} 0\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} = \frac{1}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{3}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{-3}{3}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2) При этом $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}} > 0$, если $x \in (-3;3)$.

Свойства выполнены. Следовательно, данная функция является дифференциальной функцией распределения некоторой непрерывной СВ.

2. *Дифференциальная функция распределения непрерывной СВ:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;1), \\ C \cdot (x^2 + 2x), & x \in [0;1]. \end{cases}$$

Найти:

1) *параметр С;*
2) *интегральную функцию* $F(x)$*;*
3) *числовые характеристики;*
4) *вероятность* $P(0{,}5 < X < 2)$.

1) Используем 1-ое свойство дифференциальной функции: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} C\cdot\left(x^2+2x\right)dx + \int\limits_{1}^{\infty} 0\cdot dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 + C\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C\cdot\left(\frac{1^3}{3}+1^2\right) - C\cdot\left(\frac{0^3}{3}+0^2\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, *дифференциальная функция* имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;1), \\ 0{,}75\cdot\left(x^2+2x\right), & x \in [0;1]. \end{cases}$$

2) Найдём интегральную функцию:

$x \in (-\infty; 0]$, $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$;

$x \in (0;1]$,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{x} 0{,}75\cdot\left(x^2+2x\right)dx = 0 + 0{,}75\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^x = 0{,}75\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)$$

$x \in (1;+\infty)$,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{1} 0{,}75\cdot\left(x^2+2x\right)dx + \int\limits_{1}^{x} 0\cdot dx = 0 + 0{,}75\cdot\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^1 + 0 =$$

$$= 0{,}75\cdot\left(\frac{1^3}{3}+1^2\right) - 0{,}75\cdot\left(\frac{0^3}{3}+0^2\right) = 1.$$

Следовательно, *интегральная функция* имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}75\cdot\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2\right), & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3) Найдём *числовые характеристики.*

$$\nu_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx = 0{,}75\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{11}{16} \approx 0{,}69;$$

$$\nu_2 = M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx = 0{,}75\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^4}{4}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{21}{40};$$

$$\nu_3 = M[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 \cdot 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx = 0{,}75\left[\frac{x^6}{6}+\frac{2x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{17}{40};$$

$$\nu_4 = M[X^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^4 \cdot 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx = 0{,}75\left[\frac{x^7}{7}+\frac{2x^6}{6}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{5}{14};$$

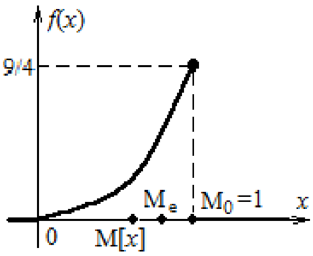
$$\mu_2 = D[X] = M[X^2] - m_X^2 = \frac{21}{40} - \left(\frac{11}{16}\right)^2 = \frac{67}{1280} \approx 0{,}05; \quad \sigma[X] = \sqrt{0{,}05} \approx 0{,}23;$$

$\mu_3 = -0{,}0081 \Rightarrow a_s < 0 \quad \Rightarrow$ график распределения скошен правее нормального;

$\mu_4 = 0{,}007 \Rightarrow \varepsilon_k < 0 \quad \Rightarrow$ график распределения расположен ниже нормального.

Найдём *моду*: $M_0 = 1$, так как $f(1)$ – наибольшее значение;

Найдём *медиану*:



По определению $\int_0^x f(x)\,dx = \int_x^1 f(x)\,dx$.

Т. е. $\int_0^x 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx = \int_x^1 0{,}75\left(x^2+2x\right)dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_0^x = \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_x^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x^3}{3}+2x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x \approx 0{,}73 = M_e.$$

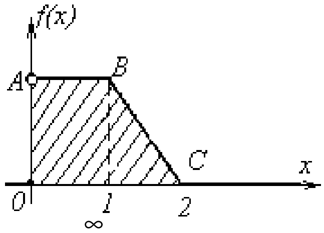
4) Найдём *вероятность* $P(0{,}5 < X < 2)$.

$$P(0{,}5 < X < 2) = \int_{0{,}5}^{2} f(x)\,dx = \int_{0{,}5}^{1} 0{,}75 \cdot \left(x^2+2x\right)dx + \int_1^2 0 \cdot dx = 0{,}75 \cdot \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{0{,}5}^{1} + 0 =$$

$$= 0{,}75 \cdot \left(\frac{1^3}{3}+1^2\right) - 0{,}75 \cdot \left(\frac{0{,}5^3}{3}+0{,}5^2\right) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

3. *Задан график плотности распределения непрерывной СВ.*

1) Найдём *дифференциальную функцию.*



$OABC$ – трапеция $\Rightarrow$

$$S=\frac{AB+OC}{2}\cdot OA=\frac{1+2}{2}\cdot OA=\frac{3}{2}\cdot OA.$$

По свойству дифференциальной функции: $S_{кр.трап.}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$.

Следовательно: $\frac{3}{2}\cdot OA=1\Rightarrow OA=\frac{2}{3}$. Таким образом: $A\left(0;\frac{2}{3}\right)$, $B\left(1;\frac{2}{3}\right)$, $C(2;0)$.

По точкам найдём уравнения прямых: (AB): $y=2/3$; (BC): $y=\frac{-2x+4}{3}$.

Получаем: $$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ (AB), & 0<x\le 1,\\ (BC), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{2}{3}, & 0<x\le 1,\\ \frac{-2x+4}{3}, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

2) Найдём *интегральную функцию*, учитывая свойства:

– если $x\le 0$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dx=0$;

– если $0<x\le 1$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}x\Big|_{0}^{x}=\frac{2}{3}x;$$

– если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx+\int\limits_{1}^{x} f(x)\,dx=$$

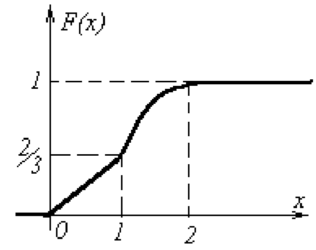
$$=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{2}{3}dx+\int\limits_{1}^{x}\frac{-2x+4}{3}dx=\frac{2}{3}x\Big|_{0}^{1}+\frac{-x^2+4x}{3}\Big|_{1}^{x}=\frac{-x^2+4x-1}{3};$$

– если $x>2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx+\int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx+\int\limits_{2}^{x} f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}0\,dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{2}{3}dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{-2x+4}{3}dx+\int\limits_{2}^{x}0\,dx=\frac{2}{3}x\Big|_{0}^{1}+\frac{-x^2+4x}{3}\Big|_{1}^{2}=1.$$

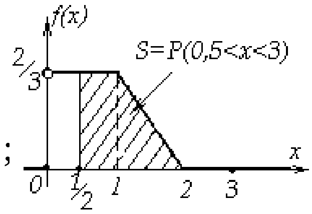
$$\text{В итоге } F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{2}{3}x, & 0<x\le 2,\\ \dfrac{-x^2+4x-1}{3}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

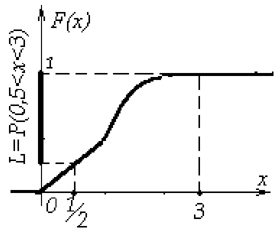


з) Найдём *вероятность*, что СВ X примет значения $x\in[0{,}5;\ 3]$ двумя способами:

- $P(0{,}5<X<3)=\int\limits_{0{,}5}^{3}f(x)\,dx=\int\limits_{0{,}5}^{1}f(x)\,dx+\int\limits_{1}^{2}f(x)\,dx+\int\limits_{2}^{3}f(x)\,dx=$

$$=\int\limits_{0{,}5}^{1}\frac{2}{3}dx+\int\limits_{1}^{2}\frac{-2x+4}{3}dx+\int\limits_{2}^{3}0\,dx=\frac{2}{3};$$





- $P(0{,}5<X<3)=F(3)-F(0{,}5)=1-\left(\dfrac{2}{3}\cdot 0{,}5\right)=\dfrac{2}{3}.$

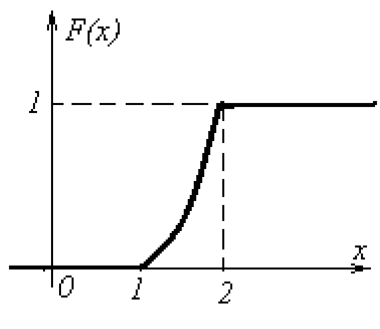
4. *Дифференциальная функция распределения НСВ:* $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\cdot\cos^2 x,\ \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].$

Найти вероятность, что СВ X примет значения из интервала $\left[0;\dfrac{3\pi}{4}\right].$

$$P\left(0\le X\le\frac{3\pi}{4}\right)=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cdot\cos^2 x\ dx+\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/4}0\ dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\cdot\cos^2 x\ dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}(1+\cos x)dx=\frac{1}{\pi}(x+\sin x)\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\frac{\pi+2}{2\pi}$$

5. *Может ли функция* $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}5\left(x^2-x\right), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ *являться интегральной функцией распределения непрерывной СВ?*



По виду графика функции $F(x)$ имеем:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$;

3) $F(x)$ – непрерывная функция;

4) $F(x)$ – неубывающая функция.

Свойства интегральной функции распределения выполняются. Следовательно, данная функция является интегральной функцией распределения некоторой непрерывной СВ.

6. *Интегральная функция распределения непрерывной СВ:*

$$F(x) = \begin{cases} A, & x \le 0, \\ B + C \cdot \cos 3x, & 0 < x \le \pi/3, \\ D, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти:
1) *неизвестные параметры;*
2) *дифференциальную функцию* $f(x)$;
3) *математическое ожидание и дисперсию;*
4) *вероятность* $P\left(-0{,}5 < X < \pi/6\right)$.

1) Так как $F(-\infty) = 0$, то $0 = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} A = A \Rightarrow A = 0$;

так как $F(+\infty) = 1$, то $1 = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} D = D \Rightarrow D = 1$;

Функция непрерывна, следовательно, односторонние пределы в граничных точках равны между собой:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} A = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(B + C \cdot \cos 3x\right), \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} \left(B + C \cdot \cos 3x\right) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^+} D. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C \cdot \cos(0) = 0, \\ B + C \cdot \cos(\pi) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = 0, \\ B - C = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0{,}5, \\ C = -0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, *интегральная функция:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \cos(3x), & 0 < x \le \pi/3, \\ 1, & x > \pi/3. \end{cases}$$

2) *Дифференциальная функция:*

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (0)', & x \le 0, \\ \left(0{,}5 - 0{,}5 \cdot \cos 3x\right)', & 0 < x \le \pi/3, \\ (1)', & x > \pi/3. \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1{,}5 \cdot \sin 3x, & 0 < x \le \pi/3, \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

3) Найдём *математическое ожидание:*

$$\nu_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = 1{,}5\cdot\int_0^{\pi/3} x\cdot\sin 3x\cdot dx = \left| \begin{matrix} u=x, \quad du=dx \\ v=\int\sin 3x\cdot dx = -\frac{1}{3}\cdot\cos 3x\end{matrix}\right| =$$

$$=1{,}5\cdot\left(-\frac13 x\cdot\cos3x+\frac13\cdot\int\cos3x\,dx\right)=1{,}5\cdot\left(-\frac13 x\cdot\cos3x+\frac13\cdot\frac13\cdot\sin3x\right)\Big|_0^{\pi/3}=$$

$$=1{,}5\cdot\left(-\frac13\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1}+\frac19\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0}\right)-1{,}5\cdot\left(-\frac13\cdot\underbrace{0\cdot\cos0}_{0}+\frac19\cdot\underbrace{\sin0}_{0}\right)=\frac{\pi}{6};$$

Найдём *дисперсию:*

$$\nu_2 = M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\,dx = 1{,}5\int_0^{\pi/3}x^2\cdot\sin3x\cdot dx = \left|\begin{matrix}u=x^2, \quad du=2x\,dx\\ v=\int\sin3x\cdot dx=-\frac13\cdot\cos3x\end{matrix}\right|=$$

$$=1{,}5\cdot\left(-\frac13x^2\cdot\cos3x+\frac23\int x\cdot\cos3x\,dx\right)=\left|\begin{matrix}u=x, \quad du=dx\\ v=\int\cos3x\cdot dx=\frac13\cdot\sin3x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac12x^2\cdot\cos3x+1\cdot\left(\frac13x\cdot\sin3x-\frac13\cdot\int\sin3x\,dx\right)=$$

$$=\left(-\frac12x^2\cdot\cos3x+\frac13x\cdot\sin3x+\frac19\cdot\cos3x\right)\Big|_0^{\pi/3}=$$

$$=\left(-\frac12\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1}+\frac13\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0}+\frac19\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1}\right)-\left(-\frac12\cdot\underbrace{0^2\cdot\cos0}_{0}+\frac13\cdot\underbrace{0\cdot\sin0}_{0}+\frac19\cdot\underbrace{\cos0}_{1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{18}-\frac19\right)-\left(\frac19\right)=\frac{\pi^2}{18}-\frac29.$$

$$\mu_2=D[X]=M[X^2]-m_X^2=\frac{\pi^2}{18}-\frac29-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{\pi^2-8}{36}.$$

4) Найдём *вероятность* $P\left(-0{,}5<X<\pi/6\right)$.

$$P(-0{,}5<X<\pi/6)=F(x)\Big|_{-0,5}^{\pi/6}=F(\pi/6)-F(-0{,}5)=(0{,}5-0{,}5\cdot\cos3x)\Big|_{x=\pi/6}-(0)\Big|_{x=-0,5}=$$

$$=\left(0{,}5-0{,}5\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\right)-0=0{,}5.$$

7. *Интегральная функция распределения НСВ:*

$$F(x)=\frac12+\frac1\pi\cdot\operatorname{arctg}x,\ \forall x\in R.$$

1) Найдём *вероятность,* что СВ X примет значения из интервала $[0;\sqrt3]$.

$$P(0\le X\le\sqrt3)=F(x)\Big|_0^{\sqrt3}=\left(\frac12+\frac1\pi\cdot\operatorname{arctg}\sqrt3\right)-\left(\frac12+\frac1\pi\cdot\operatorname{arctg}0\right)=\frac13\approx0{,}3;$$

2) Найдём *значение СВ* $x=\alpha$*,* при котором вероятность $P(X>\alpha)=0{,}25$.

$$P(X>\alpha)=0{,}25 \Leftrightarrow P(\alpha<X<+\infty)=0{,}25 \Leftrightarrow F(+\infty)-F(\alpha)=0{,}25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-F(\alpha)=0{,}25 \quad \Rightarrow F(\alpha)=0{,}75 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot \operatorname{arctg}\alpha=0{,}75 \quad \Rightarrow \alpha=1.$$

3) Найдём *дифференциальную функцию:* $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, $\forall x\in R.$

4) Найдём *математическое ожидание:*

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot ln\left(1+x^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0;$$

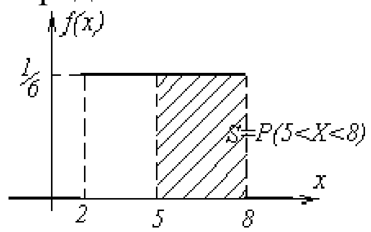
Найдём *дисперсию:*

$$D[X]=M[(X-m_X)^2]=M[(X-0)^2]=M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1-1}{\left(1+x^2\right)}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\right)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty.$$

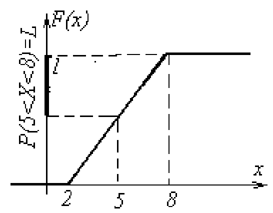
8. *СВ X равномерно распределена на интервале* $[2;8]$.
Найти: a) дифференциальную и интегральную функции распределения;
b) основные числовые характеристики;
c) вероятность попадания СВ X на интервал $[5;10]$.

Воспользуемся формулами равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}=\begin{cases}0, & x\notin(2;8),\\ \dfrac{1}{6}, & x\in[2;8].\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{x-2}{6}, & 2\le x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$



$$M[X]=\frac{a+b}{2}=\frac{10}{2}=5, \qquad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{36}{12}=3.$$

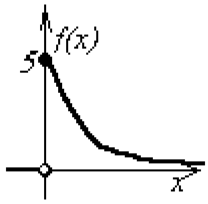
По формуле $P(\alpha\le X\le\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, *где* $(\alpha;\beta)\subset(a;b)$, найдём

$$P(5\le X\le 10)=P(5\le X\le 8)=\frac{8-5}{8-2}=\frac{3}{6}=0{,}5, \text{ где } (5;8)\subset(2;8).$$

9. *СВ X имеет показательный закон распределения, заданный интегральной функцией* $F(x)=1-e^{-5x}, x\ge 0$.
Найти: a) дифференциальную функцию распределения;
b) основные числовые характеристики;

c) вероятность попадания СВ X на интервал $[5;+\infty)$.

Воспользуемся формулами показательного распределения:



$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0\le x\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ 5e^{-5x}, & 0\le x\end{cases}$$

$M[X]=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{5}$, $\quad D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{25}$.

Так как $P(\alpha<X<\beta)=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}$, то:

$$P(X>2)=P(2<X<+\infty)=e^{-2\cdot 5}-e^{-\infty}=e^{-10}-0=e^{-10}\approx 0{,}45\cdot 10^{-4}.$$

10. *Заданы математическое ожидание* $a=10$ *и среднее квадратичное отклонение* $\sigma=5$ *нормально распределенной непрерывной СВ. Известны:* $\alpha=4, \beta=10, \delta=1, \gamma=0{,}9426$. *Найти:*

1) *дифференциальную и интегральную функции;*
2) *вероятность* $P(\alpha<x<\beta)$*;*
3) *вероятность* $P(|x-a|<\delta)$*;*
4) *симметричный, относительно* a, *интервал, в который попадает величина* X *с вероятностью* γ*;*
5) *интервал, в котором окажутся практически все значения величины* X.

Воспользуемся формулами нормального распределения и таблицами в приложениях:

1) дифференциальная функция $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{2\cdot 5^2}}=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$.

интегральная функция $F(x)=0{,}5+\Phi(t)$, *где* $t=\dfrac{x-10}{5}$.

2) $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{10-10}{5}\right)-\Phi\left(\dfrac{4-10}{5}\right)=$

$=\Phi(0)+\Phi(1{,}2)=0+0{,}3849=0{,}3849$

3) $P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right) \quad\Rightarrow\quad P(|x-10|<1)=2\cdot\Phi\left(\dfrac{1}{5}\right)=2\cdot 0{,}0793=0{,}1586$;

4) $P(|x-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right) \quad\Rightarrow\quad P(|x-10|<\varepsilon)=2\cdot\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{5}\right)=0{,}9426 \quad\Rightarrow\quad \Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{5}\right)=0{,}4713 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\varepsilon}{5}=1{,}9 \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=9{,}5 \quad\Rightarrow |x-10|<9{,}5 \quad\Rightarrow\quad 10-9{,}5<x<10+9{,}5 \quad\Rightarrow\quad 0{,}5<x<19{,}5$;

5) *применим правило 3-х сигм:*

$$|x-a|<3\sigma \quad\Rightarrow\quad a-3\sigma<x<a+3\sigma \quad\Rightarrow\quad 10-3\cdot 5<x<10+3\cdot 5 \quad\Rightarrow\quad .$$

Практически все значения СВ находятся в интервале: $-5<x<25$.

Дискретная двумерная случайная величина

1. *Из урны, содержащей 6 белых, 4 черных шаров, наудачу извлекают 2 шара без возвращения. Случайные величины* X *– число белых шаров,* Y *– число черных шаров в выборке.*
Описать закон распределения случайного вектора (X,Y). *Определить*

а) безусловные законы распределения компонент системы СВ (X,Y)*;*

б) зависимость или независимость СВ X *,* Y*;*

в) центр рассеивания: точку $M(m_X, m_Y)$*;*

г) коэффициент корреляции r_{XY}*;*

д) $P\{X \ge Y\}$.

Составим закон распределения дискретного случайного вектора (X,Y), для этого вычислим вероятности $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$.

СВ X, Y могут принимать два значения: 0, 1 или 2. Заметим, что значения $x_i + y_j = 2$, поэтому события $(X=0,Y=0)$, $(X=0,Y=1)$, $(X=1,Y=0)$, $(X=2,Y=1)$, $(X=1,Y=2)$, $(X=2,Y=2)$ являются невозможными, то есть их вероятность равна нулю.

$$P\{X=0,Y=2\} = P\{(ч,ч)\} = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15};$$

$$P\{X=2,Y=0\} = P\{(б,б)\} = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3};$$

$$P\{X=1,Y=1\} = P\{(б,ч) \text{ или } (ч,б)\} = C_2^1\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{15}.$$

X / Y	0	1	2	$P\{X = x_i\} = p_i$
0	0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	0	$\frac{8}{15}$	0	$\frac{8}{15}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$P\{Y = y_j\} = q_j$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

а) СВ X принимает значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, вероятности которых находим суммированием вероятностей соответственно в первой, второй и третьей строках таблицы: $p_1 = 0 + 0 + \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$, $p_2 = \frac{8}{15}$, $p_3 = \frac{1}{3}$. Суммируя вероятности в первом, втором и третьем столбцах таблицы, находим вероятности соответствующих значений СВ Y. Таким образом, безусловные законы распределения компонент случайного вектора X, Y имеют вид

x_i	0	1	2	$\sum$
p_i	2/15	8/15	1/3	1

y_j	0	1	2	$\sum$
q_j	1/3	8/15	2/15	1

б) Если дискретные СВ независимы, то $\forall(i,j)$ выполняется равенство $p_{ij} = p_i \cdot q_j$. В нашем случае СВ X, Y зависимы, так как, например, $p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = 0 \neq \frac{2}{15} \cdot \frac{8}{15} = P\{X = 0\} \cdot P\{Y = 1\} = p_1 \cdot q_2$.

в) По одномерным законам распределения СВ X, Y вычисляем их математические ожидания

$$m_X = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{5}; \quad m_Y = \sum_j y_j q_j = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{5}.$$

Таким образом, центром рассеивания является точка $M(6/5;\ 4/5)$.

г) По безусловным законам распределения СВ X, Y вычисляем их дисперсии

$$D_X = M\left[X^2\right] - (m_X)^2 = 0 \cdot \frac{2}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{28}{15} - \frac{36}{25} = \frac{32}{75};$$

$$D_Y = M\left[Y^2\right] - (m_Y)^2 = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2^2 \cdot \frac{2}{15} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{15} - \frac{16}{25} = \frac{32}{75}$$

и соответственно находим средние квадратические отклонения

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}, \qquad \sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}.$$

Для вычисления корреляционного момента $K_{XY} = M[XY] - m_X \cdot m_Y$, найдем $M[XY]$.

Одним из способов нахождения $M[XY]$ является непосредственное составление закона распределения СВ (XY). Возможные значения этой случайной величины: 0, 1, 2 и 4. Найдем соответствующие вероятности

$P\{XY = 0\} = P\{(0,1);(1,0);(0,2),(2,0)\} = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$; $P\{XY = 1\} = P\{(1,1)\} = \frac{8}{15}$;

$P\{XY = 2\} = P\{(2,1);(1,2)\} = 0$; $P\{XY = 4\} = P\{(2,2)\} = 0$.

$(xy)_k$	0	1	2	4	$\sum$
p_k	7/15	8/15	0	0	1

По таблице находим $M[XY] = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = \frac{8}{15}$.

Другой способ вычисления $M[XY]$ по определению

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i\,y_j\cdot p_{ij}=0\cdot0\cdot0+0\cdot1\cdot0+0\cdot2\cdot\frac{2}{15}+1\cdot0\cdot0+$$

$$+1\cdot1\cdot\frac{8}{15}+1\cdot2\cdot0+2\cdot0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot1\cdot0+2\cdot2\cdot0=\frac{8}{15}$$

Следовательно, $K_{XY}=\frac{8}{15}-\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{32}{75}$.

Коэффициент корреляции вычисляем по формуле

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{-32/75}{\left(4\sqrt{2}/5\sqrt{3}\right)\cdot\left(4\sqrt{2}/5\sqrt{3}\right)}=-1.$$

д) $P\{X\geq Y\}=P\{(0,0);\,(1,0);\,(2,0);\,(1,1);\,(2,1);\,(2,2)\}=0+0+\frac{1}{3}+\frac{8}{15}+0+0=\frac{13}{15}$

или $P\{X\geq Y\}=1-P\{X<Y\}=P\{(0,1);\,(0,2);\,(1,2)\}=1-\left(0+\frac{2}{15}+0\right)=\frac{13}{15}$.

2. *Задана таблица распределения дискретной двумерной случайной величины* (X,Y)

$X\ /Y$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Определить

а) законы распределения случайных величин X, Y*;*

б) функцию распределения $F(x,y)$ *системы СВ* (X,Y)*;*

в) $P\{X=2,Y\geq0\}$, $P\{X\geq Y+1\}$*;*

г) условный закон распределения СВ Y *при* $X=1$ *и* $M[Y/X=1]$*;*

д) зависимость или независимость СВ X *и* Y*;*

е) центр рассеивания: точку $M(m_X,m_Y)$*;*

ж) коэффициент корреляции r_{XY}.

а) Суммируя вероятности в первой, второй строке, находим вероятности соответствующих значений СВ X: $x_1=1,\ x_2=2$. Суммируя вероятности в первом, втором, третьем столбцах, находим вероятности соответствующих значений СВ Y: $y_1=-1,\ y_2=0,\ y_3=1$. Безусловные законы СВ X, Y имеют вид

x_i	1	2	$\sum$
p_i	0,8	0,2	1

y_j	-1	0	1	$\sum$
q_j	0,2	0,35	0,45	1

б) В соответствии с формулой $F(x,y)=\sum\limits_{x_i<x}\sum\limits_{y_j<y}p_{ij}$ получаем:

если $x \le 1$ или $y \le -1$, то $F(x,y)=0$, так как в этом случае хотя бы одно из событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ является невозможным;
если $1 < x \le 2$ и $-1 < y \le 0$, то $F(x,y) = P\{(1,-1)\} = 0{,}15$;
если $1 < x \le 2$ и $0 < y \le 1$, то $F(x,y) = P\{(1,-1);(1,0)\} = 0{,}15 + 0{,}3 = 0{,}45$;
если $1 < x \le 2$ и $y > 1$, то $F(x,y) = P\{(1,-1);(1,0);(1,1)\} = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}35 = 0{,}8$;
если $x > 2$ и $-1 < y \le 0$, то $F(x,y) = P\{(1,-1);(2,-1)\} = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$;

если $x > 2$ и $0 < y \le 1$, то $F(x,y) = P\{(1,-1);(1,0);(2,-1);(2,0)\} =$
$= 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}55$;

если $x > 2$ и $y > 1$, то $F(x,y) = P\{(1,-1);(1,0);(1,1);(2,-1);(2,0);(2,1)\} =$
$= 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}35 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1 = 1$.

Таким образом, функция распределения $F(x,y)$ данной системы дискретных случайных величин имеет вид

$X\ /Y$	$y \le -1$	$-1 < y \le 0$	$0 < y \le 1$	$y > 1$
$x \le 1$	0	0	0	0
$1 < x \le 2$	0	0,15	0,45	0,8
$x > 2$	0	0,2	0,55	1

в) $P\{X = 2, Y \ge 0\} = P\{(2,0)\} + P\{(2,1)\} = 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}15$,
$P\{X \ge Y + 1\} = 1 - P\{X < Y + 1\} = 1 - P\{(1,1)\} = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$.

г) Условные вероятности значений СВ Y при $X = 1$ найдем с помощью формулы $P\{Y = y_j / X = x_i\} = \dfrac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}$.

Так как $P\{X = 1\} = 0{,}15 + 0{,}3 + 0{,}35 = 0{,}8$, то $P\{Y = -1 / X = 1\} = \dfrac{0{,}15}{0{,}8} = \dfrac{3}{16}$;

$P\{Y = 0 / X = 1\} = \dfrac{0{,}3}{0{,}8} = \dfrac{3}{8}$; $P\{Y = 1 / X = 1\} = \dfrac{0{,}35}{0{,}8} = \dfrac{7}{16}$.

Таким образом, условный закон распределения СВ Y при $X = 1$ имеет вид

y_j	-1	0	1	$\sum$
$P\{Y = y_j / X = 1\}$	3/16	3/8	7/16	1

Используя составленный условный закон, найдем

$$M[Y / X = 1] = -1 \cdot \frac{3}{16} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{7}{16} = \frac{1}{4}.$$

д) Так как безусловный и условный законы распределения СВ Y не совпадают, то СВ X и Y зависимы. В этом можно было бы убедиться и другим способом: $P\{X = 2, Y = 0\} = 0{,}05 \ne 0{,}2 \cdot 0{,}35 = P\{X = 2\} \cdot P\{Y = 0\}$.

е) По одномерным законам распределения СВ X, Y вычисляем их математические ожидания

$$m_X = \sum_i x_i p_i = 1\cdot 0{,}8 + 2\cdot 0{,}2 = 1{,}2; \quad m_Y = \sum_j y_j q_j = -1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}35 + 1\cdot 0{,}45 = 0{,}25.$$

Таким образом, центром рассеивания является точка $M(1{,}2;\ 0{,}25)$.

Теперь вычисляем их дисперсии

$$D_X = M\left[X^2\right] - (m_X)^2 = 1^2\cdot 0{,}8 + 2^2\cdot 0{,}2 - (1{,}2)^2 = 1{,}6 - 1{,}44 = 0{,}16;$$

$$D_Y = (-1)^2\cdot 0{,}2 + 0^2\cdot 0{,}35 + 1^2\cdot 0{,}45 - (0{,}25)^2 = 0{,}65 - 0{,}0625 = 0{,}5875$$

и соответственно находим средние квадратические отклонения

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4, \qquad \sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0{,}5875} \approx 0{,}7665.$$

Для вычисления корреляционного момента $K_{XY} = M[XY] - m_X\cdot m_Y$, найдем

$$M[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p_{ij} = 1\cdot(-1)\cdot 0{,}15 + 1\cdot 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 1\cdot 0{,}35 + 2\cdot(-1)\cdot 0{,}05 +$$
$$+ 2\cdot 0\cdot 0{,}05 + 2\cdot 1\cdot 0{,}1 = -0{,}15 + 0{,}35 - 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

Следовательно, $K_{XY} = 0{,}3 - 1{,}2\cdot 0{,}25 = 0$.

Коэффициент корреляции вычисляем по формуле

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y} = \frac{0}{0{,}4\cdot 0{,}5875} = 0.$$

Т.к. $K_{XY} = r_{XY} = 0$, то случайные величины X и Y – некоррелированы, но СВ X и Y зависимы.

Непрерывная двумерная случайная величина

1. *Случайный вектор (X,Y) равномерно распределен в прямоугольнике $D = \{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$. Определить*

а) плотность распределения системы СВ (X,Y);

б) плотности распределения отдельных компонент X, Y;

в) зависимость или независимость случайных величин X, Y;

г) центр рассеивания, коэффициент корреляции r_{XY}.

а) Так как двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в области D, то плотность распределения имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

В нашем случае $S_D = a\cdot b$ – площадь прямоугольника D, следовательно,

плотность распределения системы имеет вид $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{ab}, & (x,y)\in D, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$

б) Найдем одномерную плотность распределения СВ X:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_{-\infty}^{0}0dy+\int\limits_{0}^{b}\frac{1}{ab}dy+\int\limits_{b}^{+\infty}0\,dy=\frac{1}{ab}\cdot\left(y\big|_0^b\right)=\frac{1}{a},\ x\in[0,a]$$

и $f_1(x)=0$, при $x\notin[0,a]$.

Одномерная плотность распределения СВ Y вычисляется по формуле

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{a}\frac{1}{ab}dx+\int\limits_{a}^{+\infty}0\,dx=\frac{1}{ab}\cdot\left(x\big|_0^a\right)=\frac{1}{b},\ y\in[0,b]$$

и $f_2(y)=0$, при $y\notin[0,b]$.

Таким образом, плотности компонент случайного вектора (X,Y) имеют вид

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & x\in[0,a],\\ 0, & x\notin[0,a];\end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{b}, & x\in[0,b],\\ 0, & x\notin[0,b],\end{cases}$$

то есть СВ X, Y распределены равномерно на $[0,a]$и $[0,b]$ соответственно.

в) Так как $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\ \forall(x,y)$, то СВ X, Y независимы.

г) Так как СВ X, Y имеют равномерное распределение, то для вычисления их характеристик воспользуемся формулами: если Z распределена равномерно на $[a,b]$, то $m_Z=\dfrac{a+b}{2}$, $\quad D_Z=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Следовательно, $m_X=\dfrac{a}{2}$, $D_X=\dfrac{a^2}{12}$ и $m_Y=\dfrac{b}{2}$, $D_Y=\dfrac{b^2}{12}$. Таким образом, центром рассевания случайного вектора является точка $M(a/2;\,b/2)$.

Так как СВ X, Y независимы, то эти величины некоррелированы, то есть $K_{XY}=0$ и $r_{XY}=0$.

2. *Плотность распределения вероятностей случайного вектора* (X,Y) *имеет следующий вид* $f(x,y)=\begin{cases}C\cdot(x+y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$

где область $D=\{(x,y): 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$. *Определить*

а) коэффициент C*;*
б) плотности распределения отдельных компонент X, Y*;*
в) зависимость или независимость случайных величин X, Y*;*
г) вероятность попадания случайной точки (X,Y) *в области* $D_1=\{(x,y): 0.3\le x\le 2;\ 0\le y\le 0.5\}$ *и* $D_2=\{(x,y):\ x+y<1\}$*;*
д) двумерную функцию распределения $F(x,y)$*;*
е) центр рассеивания, корреляционный момент.

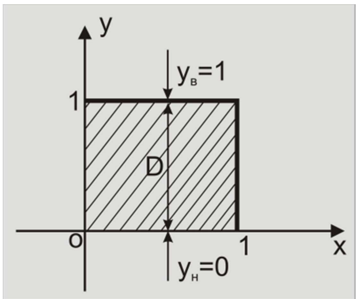
а) Коэффициент C найдем из основного свойства двумерной плотности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$$

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D} f(x,y)dx\;dy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1}C\cdot(x+y)dy=C\int\limits_{0}^{1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=C\int\limits_{0}^{1}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=C\cdot\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\cdot x\right)\Bigg|_0^1=C\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=C$$

$\Rightarrow\; C=1.$



б) Найдем плотность распределения СВ X:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_{0}^{1}(x+y)dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=x+\frac{1}{2},$$

если $x\in[0,1]$, $f_1(x)=0$, если $x\notin[0,1]$, то есть

$$f_1(x)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Из симметрии области D и плотности $f(x,y)$ относительно переменных x,y следует, что $f_2(y)=\begin{cases}y+\dfrac{1}{2}, & y\in[0,1],\\ 0, & y\notin[0,1].\end{cases}$

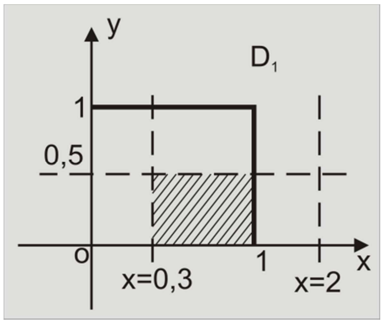
в) Если непрерывные случайные величины независимы, то выполняется равенство $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)\;\forall(x,y)$. Как видим, в нашем случае $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)\;(x,y)\in D$. Следовательно, СВ X, Y зависимы.

г) Для нахождения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в область D_1 воспользуемся формулой $P\{(X,Y)\in D_1\}=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy$.

$$P\{(X,Y)\in D_1\}=\int\limits_{0.3}^{1}dx\int\limits_{0}^{0.5}(x+y)dy=$$

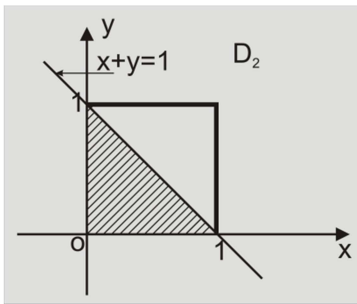
$$=\int\limits_{0.3}^{1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.5}=\int\limits_{0.3}^{1}\left(0{,}5\cdot x+\frac{0{,}25}{2}\right)dx=$$

$$=\left(0{,}5\cdot\frac{x^2}{2}+0{,}125\cdot x\right)\Bigg|_{0.3}^{1}=0{,}20125.$$



Аналогично, $P\{(X,Y)\in D_2\}=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x}(x+y)dy=$

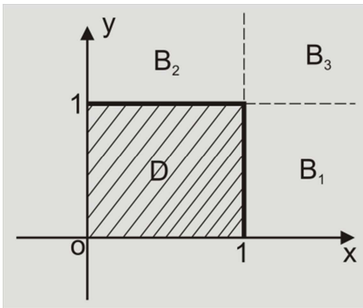
$$=\int\limits_{0}^{1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=\int\limits_{0}^{1}\left(x\cdot(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=$$



$$=\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

д) Для нахождения двумерной функции распределения воспользуемся формулой $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$, где x, y – любые вещественные числа.

Рассмотрим возможные положения значения точки (x,y) на плоскости:



1) если точка (x,y) расположена во II, III или в IV четвертях ($x\le 0$ или $y\le 0$), то $F(x,y)=0$, так как там всюду $f(x,y)=0$;
2) если точка (x,y) расположена в I четверти, то она находится либо: а) внутри области D; б) в области $B_1=\{(x,y):\ x>1, 0\le y\le 1\}$; в) в области $B_2=\{(x,y):\ 0\le x\le 1, y>1\}$; г) в $B_3=\{(x,y):\ x>1, y>1\}$.

В случае а) имеем

$$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^y (x+y)dy=\int_0^x dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^y=\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=\frac{xy(x+y)}{2}.$$

В случае б) получаем

$$F(x,y)=\int_0^1 dx\int_0^y (x+y)dy=\int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^y=\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{y(1+y)}{2}.$$

В случае в) имеем

$$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^1 (x+y)dy=\int_0^x dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^x=\frac{x(x+1)}{2}$$

и в случае г) имеем $F(x,y)=P\{X<1, Y<1\}=P\{\Omega\}=1$.

Таким образом, функция распределения $F(x,y)$ имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \text{ или } y\le 0,\\ xy(x+y)/2, & (x,y)\in D,\\ \left(y^2+y\right)/2, & x>1;\ 0\le y\le 1,\\ \left(x^2+x\right)/2, & 0\le x\le 1;\ y>1,\\ 1, & x>1;\ y>1. \end{cases}$$

е) Найдем математическое ожидание СВ X:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_1(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

Из условия равноправности вхождения переменных x, y в выражение плотности распределения $f(x, y)$ и области D получаем $M[Y]=\frac{7}{12}$.

Таким образом, центром рассеивания является точка $M\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f(x, y)\,dx\,dy=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y\cdot(x+y)dy=\int_0^1 x\,dx\left(\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

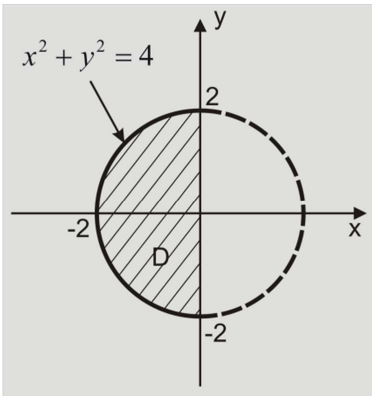
$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Корреляционный момент $K_{XY}=M[XY]-m_x\cdot m_Y=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$.

3. *Двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в области D, где $D-$ половина круга $x^2+y^2\le 4,\ x\le 0$. Определить*

а) двумерную плотность вероятности $f(x, y)$;

б) одномерные плотности вероятностей СВ X, Y: $f_1(x),\ f_2(y)$;



в) зависимость или независимость случайных величин X, Y;

г) центр рассеивания; средние квадратические отклонения σ_X, σ_Y;

д) коэффициент корреляции r_{XY};

е) корреляционную матрицу.

а) Так как двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в области D, то плотность распределения имеет вид

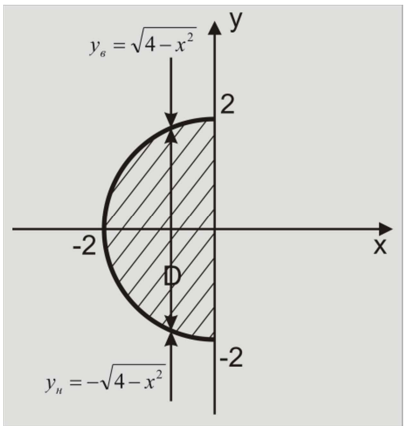
$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D},\ (x, y)\in D,\\ 0,\ (x, y)\notin D.\end{cases}$$

В нашем случае $S_D=\pi R^2/2=2\pi$ – площадь области D, следовательно,

плотность $$f(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi},\ (x, y)\in D,\\ 0,\ (x, y)\notin D.\end{cases}$$

б) Найдем одномерную плотность распределения СВ X:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy=$$



$$= \int_{-\infty}^{-\sqrt{4-x^2}} 0\,dy + \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\pi} dy + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{+\infty} 0\,dy = \frac{1}{\pi}\sqrt{4-x^2}\,,$$

при $x \in [-2{,}0]$

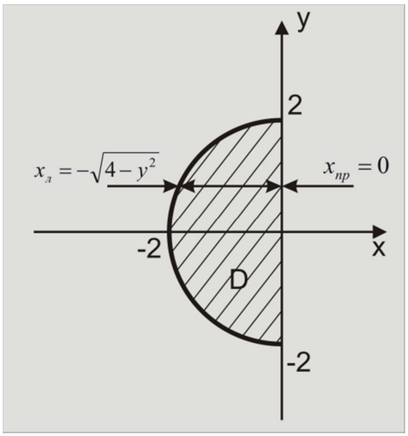
и $f_1(x) = 0$, при $x \notin [-2{,}0]$.

Одномерная плотность распределения СВ Y вычисляется по формуле

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-\sqrt{4-y^2}} 0\,dx + \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} \frac{1}{2\pi} dx + \int_{0}^{+\infty} 0\,dx = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}\,,$$

$y \in [-2{,}2]$ и $f_2(y) = 0$, при $y \notin [-2{,}2]$.



Таким образом, плотности компонент случайного вектора (X, Y) имеют вид

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{4-x^2}\,, & x \in [-2{,}0], \\ 0, & x \notin [-2{,}0] \end{cases}$$ и

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}\,, & y \in [-2{,}2], \\ 0, & y \notin [-2{,}2]. \end{cases}$$

в) Так как $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$, $(x,y) \in D$, то СВ X, Y зависимы.

г) Найдем математические ожидания СВ X, Y:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{0} x \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} t = 4 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4} \sqrt{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^4 = -\frac{8}{3\pi}\,;$$

$$M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_2(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} y \cdot \sqrt{4-y^2}\,dy = \left| \begin{matrix} t = 4 - y^2 \\ dt = -2y\,dy \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{0} \sqrt{t}\,dt = 0\,.$$

Заметим, что $M[Y] = 0$ можно было установить из геометрических соображений: так как область D и плотность $f(x,y)$ симметрично относительно $Y = 0$. Таким образом, точка $M\left(-\frac{8}{3\pi}, 0\right)$ – центр рассеивания.

Для нахождения средних квадратических отклонений предварительно вычислим соответствующие дисперсии:

$$D_X = M\left[X^2\right] - (m_X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x)\,dx - (m_X)^2 =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{0}x^2\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx-\left(-\frac{8}{3\pi}\right)^2=\begin{vmatrix} x=2\sin t\\ dx=2\cos t\ dt\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}(2\sin t)^2\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt-\frac{64}{9\pi^2}=\frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\sin^2(2t)dt-\frac{64}{9\pi^2}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt-\frac{64}{9\pi^2}=\frac{2}{\pi}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{0}-\frac{64}{9\pi^2}=1-\frac{64}{9\pi^2};$$

$$D_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f_2(y)\,dy-(m_Y)^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}y^2\cdot\sqrt{4-y^2}\,dy-0^2=$$

$$=\begin{vmatrix} y=2\sin t\\ dy=2\cos t\ dt\end{vmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\sin t)^2\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2(2t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=\frac{1}{\pi}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=1.$$

Следовательно, средние квадратические отклонения равны

$$\sigma_X=\sqrt{D_X}=\sqrt{1-\frac{64}{9\pi^2}}=\frac{\sqrt{9\pi^2-64}}{3\pi}\quad \text{и}\quad \sigma_Y=\sqrt{D_Y}=1.$$

д) Коэффициент корреляции вычисляем по формуле $r_{XY}=\dfrac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$.

Предварительно найдем $M[XY]$ и $K_{XY}=M[XY]-m_x\cdot m_Y$.

$$M[XY]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D xy\cdot\frac{1}{2\pi}\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}x\,dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}y\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}x\,dx\ \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}x\cdot 0\,dx=0.$$

Получаем корреляционный момент $K_{XY}=M[XY]-m_x\cdot m_Y=0-\dfrac{8}{3\pi}\cdot 0=0$, то есть СВ X, Y являются некоррелированными.

Установить, что $K_{XY}=0$ можно было и из геометрических соображений: так как по определению $K_{XY}=M[(X-m_X)\cdot(Y-m_Y)]$, и поэтому, если область D и плотность $f(x,y)$ симметрично хотя бы относительно одной из прямых $x=m_x$, $y=m_Y$, то $K_{XY}=0$.

В данном случае область D и плотность $f(x,y)$ симметрично относительно $y=0$ и $M[Y]=0$.

Таким образом, коэффициент корреляции равен

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{0}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=0.$$

е) Корреляционная матрица имеет вид

$$K=\begin{pmatrix} D[X] & K_{XY} \\ K_{XY} & D[Y] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{64}{9\pi^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Непрерывная СВ X распределена равномерно на $[-2,4]$, а непрерывная СВ Y нормально с параметрами $N(-1,\ 2)$. Известно, что коэффициент корреляции $r_{XY}=0{,}5$. Найти $M[XY]$.*

Так как непрерывная СВ X распределена равномерно на $[a,b]$, то

$$M[X]=\frac{a+b}{2}=\frac{-2+4}{2}=1,\ D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(4+2)^2}{12}=3\ \Rightarrow \sigma_X=\sqrt{D[X]}=\sqrt{3}.$$

По условию СВ Y распределена нормально с параметрами $a_Y=-1,\ \sigma_Y=2$, то есть $M[Y]=a_Y=-1,\quad \sigma_Y=2$.

Из формулы коэффициента корреляции r_{XY} выразим $M[XY]$:

$$r_{XY}=\frac{K_{XY}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{M[XY]-M[X]\cdot M[Y]}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}\quad\Rightarrow\quad M[XY]=r_{XY}\cdot\sigma_X\cdot\sigma_Y+m_X m_Y.$$

Подставляя полученные данные, находим, что

$$M[XY]=0{,}5\cdot\sqrt{3}\cdot 2+1\cdot(-1)=\sqrt{3}-1.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	
1	Н.Ш. Кремер «Теория вероятностей и математическая статистика». Кремер Н.Ш. Издательство: Юнити-Дана, 2010. - 573с.
2	Е.С.Вентцель «Теория вероятностей и ее инженерные приложения», Вентцель Е.С., Овчаров Л.А., Кнорус, 2018. - 480с.
3	Д.Т. Письменный «Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам» Письменный Д.Т - Москва: Айрис-пресс, 2008. - 288 с.
4	А.А. Трухан «Теория вероятностей в инженерных приложениях. Учебное пособие» Трухан А. А., Кудряшев Г.С.: -Лань, 2015.- 368с.
5	И.А. Палий «Теория вероятностей и математическая статистика» Палий И.А. Издательство: ИНФРА-М, 2021. – 334с.
6	Д.К. Агишева «Теория вероятностей случайных событий»: Агишева Д.К., Зотова С.А., Светличная В.Б. Учебное пособие/ ВолгГТУ. – Волгоград, 2004. – 61с.
7	С.А. Зотова «Теория вероятностей случайных величин»: Зотова С.А., Матвеева Т.А., Светличная В.Б. Учебное пособие/ ВолгГТУ. – Волгоград, 2005. – 61с.
8	Т.А. Матвеева «Теория вероятностей: системы случайных величин и функции случайных величин»: Матвеева Т.А., Светличная В.Б., Зотова С.А.Учебное пособие/ ВолгГТУ. – Волгоград, 2006. – 65с.

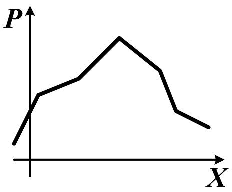
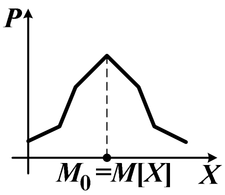
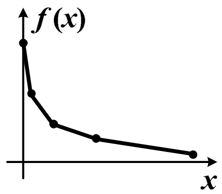
Приложение 1. Числовые характеристики СВ

Математическим ожиданием *СВ называется ориентировочное (среднее) число, около которого группируются все возможные значения СВ.* Обозначение: $M[X]$, m_X		
	в случае дискретной СВ	в случае непрерывной СВ СВ
Формула для вычисления	$M[X]=\sum_i x_i\ p_i$	$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,dx$
Свойства	1. $M[C]=C$, *где* $C=const$ 2. $M[C\cdot X]=C\cdot M[X]$ 3. $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$ 4. $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$, где $X,Y-$ *независимые СВ*	

Дисперсией СВ X (обозначение: $D[X]$), *называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания* $$D[X]=M[(X-m_X)^2]$$		
	в случае дискретной СВ	в случае непрерывной СВ
Формула для вычисления	$D[X]=\sum_i (x_i-m_X)^2\ p_i$	$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_X)^2\ f(x)\,dx$
Формула для вычисления $D[X]=M[X^2]-m_X^2$.		
Свойства	1. $D[C]=0$, *где* $C=const$ 2. $D[C\cdot X]=C^2\cdot D_X$ 3. $D[X\pm Y]=D_X+D_Y$, *где* $x,y-$ *независимые СВ* 4. $D[X\cdot Y]=D_X\cdot D_Y+m_Y^2\cdot D_X+m_X^2\cdot D_Y$, *где* $X,Y-$ *независимые СВ*	

Средним квадратическим отклонением *СВ X называется квадратный корень из дисперсии:* $\sigma[X]=\sqrt{D_X}$.

Приложение 2. Дискретные распределения СВ

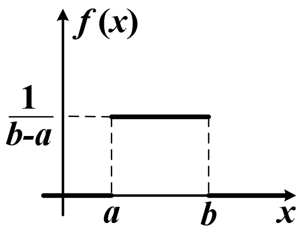
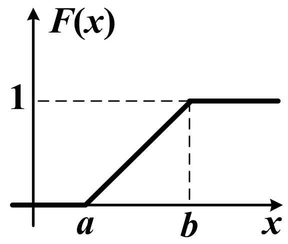
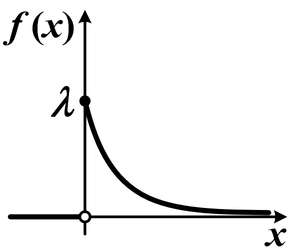
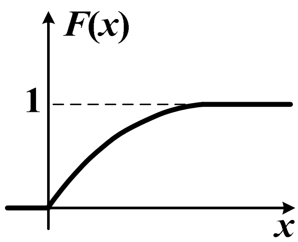
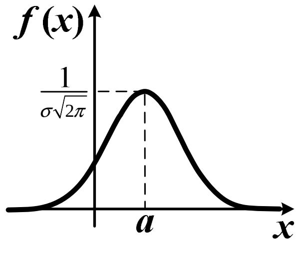
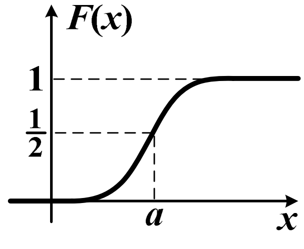
	Вероятность точечного значения СВ: $P_n(X = x_i) = P_i$	*Многоугольник распределения*	*Основные числовые характеристики*	*Вероятность попадания значения СВ в интервал:* $P(x_k \le x < x_m)$
Биномиальное распределение	$p_A = const = p$ $q_A = 1 - p_A$ $p \in (0{,}1; 0{,}9)$ $n << +\infty$ $P_i = C_n^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n - x_i}$		$M[X] = n\,p$ $D[X] = n\,p\,q$	$\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{i=k}^{m-1} p_i \\ F(x_m) - F(x_k) \end{array}\right.$
	$p_A = const = p$ $p \in (0{,}1; 0{,}9)$ $n \to +\infty$ $P_i = \frac{1}{\sqrt{n\,pq}} \cdot \varphi(t_i),$ *где* $t_i = \frac{x_i - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$		$M[X] = n\,p$ $D[X] = n\,p\,q$	$\Phi\left(\frac{x_m - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_k - np}{\sqrt{npq}}\right)$ *замечание:* из-за больших значений n – интервал $(x_m; x_k)$ может быть и закрытым, и открытым.
Распределение Пуассона	$p_A = const \in (0;\, 0{,}1)$ $\underbrace{n \to +\infty}_{n \cdot p_A < 10}$ $P_i \approx \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda},$ *где* $\lambda = n \cdot p_A$		$M[X] = n\,p$ $D[X] = n\,p$	$\sum\limits_{i=k}^{m-1} p_i$ *замечание:* из-за больших значений n – ряд распределения и интегральную функцию не составляют.

Замечание: $\varphi(t)$ – функция Гаусса (табулирована);

$\Phi(t)$ – функция Лапласа (табулирована);

$F(t)$ – интегральная функция.

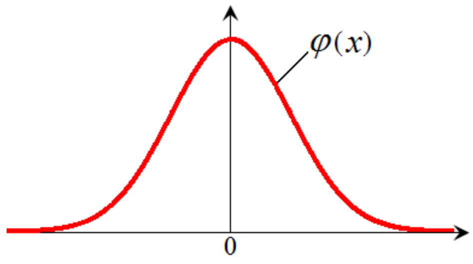
Приложение 3. Непрерывные распределения СВ

	Дифференциальная функция распределения	*Интегральная функция распределения*	*Основные числовые характеристики*	*Вероятность* $P(\alpha < x < \beta)$
Равномерное распределение	$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$ 	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$ 	$M[X]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$P=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, *где* $(\alpha;\beta)\subset(a;b)$
Показательное распределение	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0\le x\end{cases}$ 	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0\le x\end{cases}$ 	$M[X]=\dfrac{1}{\lambda}$, $D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$	$P=e^{-\alpha\lambda}-e^{-\beta\lambda}$ $(\alpha;\beta)\subset(0;+\infty)$
Нормальное распределение	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=$ $=\dfrac{1}{\sigma}\cdot\varphi(t)$, *где* $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$ $\varphi(t)$ – *функция Гаусса* 	$F(x)=0{,}5+\Phi(t)$, *где* $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$ $\Phi(t)$ – *функция Лапласа* 	$M[X]=a$, $D[X]=\sigma^2$	$P=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$ $P(\lvert x-a\rvert<\varepsilon)=2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{\sigma}\right)$ *Правило 3-х* σ: $P(\lvert x-a\rvert<3\sigma)=0{,}9973$ $P(x<a-k\sigma)=$ $=P(x>a+k\sigma)=$ $=0{,}5-\Phi(k)$

Приложение 4. Таблица 1

Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



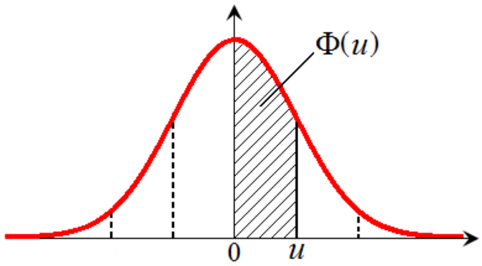
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Приложение 5. Таблица 2

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,26**	0,1026	**0,52**	0,1985	**0,78**	0,2823
0,01	0,0040	**0,27**	0,1064	**0,53**	0,2019	**0,79**	0,2852
0,02	0,0080	**0,28**	0,1103	**0,54**	0,2054	**0,80**	0,2881
0,03	0,0120	**0,29**	0,1141	**0,55**	0,2088	**0,81**	0,2910
0,04	0,0160	**0,30**	0,1179	**0,56**	0,2123	**0,82**	0,2939
0,05	0,0199	**0,31**	0,1217	**0,57**	0,2157	**0,83**	0,2967
0,06	0,0239	**0,32**	0,1255	**0,58**	0,2190	**0,84**	0,2995
0,07	0,0279	**0,33**	0,1293	**0,59**	0,2224	**0,85**	0,3023
0,08	0,0319	**0,34**	0,1331	**0,60**	0,2257	**0,86**	0,3051
0,09	0,0359	**0,35**	0,1368	**0,61**	0,2291	**0,87**	0,3078
0,10	0,0398	**0,36**	0,1406	**0,62**	0,2324	**0,88**	0,3106
0,11	0,0438	**0,37**	0,1443	**0,63**	0,2357	**0,89**	0,3133
0,12	0,0478	**0,38**	0,1480	**0,64**	0,2389	**0,90**	0,3159
0,13	0,0517	**0,39**	0,1517	**0,65**	0,2422	**0,91**	0,3186
0,14	0,0557	**0,40**	0,1554	**0,66**	0,2454	**0,92**	0,3212
0,15	0,0596	**0,41**	0,1591	**0,67**	0,2486	**0,93**	0,3238
0,16	0,0636	**0,42**	0,1628	**0,68**	0,2517	**0,94**	0,3264
0,17	0,0675	**0,43**	0 1664	**0,69**	0,2549	**0,95**	0,3289
0,18	0,0714	**0,44**	0,1700	**0,70**	0,2580	**0,96**	0,3315
0,19	0,0753	**0,45**	0,1736	**0,71**	0,2611	**0,97**	0,3340
0,20	0,0793	**0,46**	0,1772	**0,72**	0,2642	**0,98**	0,3365
0,21	0,0832	**0,47**	0,1808	**0,73**	0,2673	**0,99**	0,3389
0,22	0,0871	**0,48**	0,1844	**0,74**	0,2703	**1,00**	0,3413
0,23	0,0910	**0,49**	0,1879	**0,75**	0,2734	**1,01**	0,3438
0,24	0,0948	**0,50**	0,1915	**0,76**	0,2764	**1,02**	0,3461
0,25	0,0987	**0,51**	0,1950	**0,77**	0,2794	**1,03**	0,3485

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,04	0,3508	**1,43**	0,4236	**1,82**	0,4656	**2,42**	0,4922
1,05	0,3531	**1,44**	0,4251	**1,83**	0,4664	**2,44**	0,4927
1,06	0,3554	**1,45**	0,4265	**1,84**	0,4671	**2,46**	0,4931
1,07	0,3577	**1,46**	0,4279	**1,85**	0,4678	**2,48**	0,4934
1,08	0,3599	**1,47**	0,4292	**1,86**	0,4686	**2,50**	0,4938
1,09	0,3621	**1,48**	0,4306	**1,87**	0,4693	**2,52**	0,4941
1,10	0,3643	**1,49**	0,4319	**1,88**	0,4699	**2,54**	0,4945
1,11	0,3665	**1,50**	0,4332	**1,89**	0,4706	**2,56**	0,4948
1,12	0,3686	**1,51**	0,4345	**1,90**	0,4713	**2,58**	0,4951
1,13	0,3708	**1,52**	0,4357	**1,91**	0,4719	**2,60**	0,4953
1,14	0,3729	**1,53**	0,4370	**1,92**	0,4726	**2,62**	0,4956
1,15	0,3749	**1,54**	0,4382	**1,93**	0,4732	**2,64**	0,4959
1,16	0,3770	**1,55**	0,4394	**1,94**	0,4738	**2,66**	0,4961
1,17	0,3790	**1,56**	0,4406	**1,95**	0,4744	**2,68**	0,4963
1,18	0,3810	**1,57**	0,4418	**1,96**	0,4750	**2,70**	0,4965
1,19	0,3830	**1,58**	0,4429	**1,97**	0,4756	**2,72**	0,4967
1,20	0,3849	**1,59**	0,4441	**1,98**	0,4761	**2,74**	0,4969
1,21	0,3869	**1,60**	0,4452	**1,99**	0,4767	**2,76**	0,4971
1,22	0,3883	**1,61**	0,4463	**2,00**	0,4772	**2,78**	0,4973
1,23	0,3907	**1,62**	0,4474	**2,02**	0,4783	**2,80**	0,4974
1,24	0,3925	**1,63**	0,4484	**2,04**	0,4793	**2,82**	0,4976
1,25	0,3944	**1,64**	0,4495	**2,06**	0,4803	**2,84**	0,4977
1,26	0,3962	**1,65**	0,4505	**2,08**	0,4812	**2,86**	0,4979
1,27	0,3980	**1,66**	0,4515	**2,10**	0,4821	**2,88**	0,4980
1,28	0,3997	**1,67**	0,4525	**2,12**	0,4830	**2,90**	0,4981
1,29	0,4015	**1,68**	0,4535	**2,14**	0,4838	**2,92**	0,4982
1,30	0,4032	**1,69**	0,4545	**2,16**	0,4846	**2,94**	6,4984
1,31	0,4049	**1,70**	0,4554	**2,18**	0,4854	**2,96**	0,4985
1,32	0,4066	**1,71**	0,4564	**2,20**	0,4861	**2,98**	0,4986
1,33	0,4082	**1,72**	0,4573	**2,22**	0,4868	**3,00**	0,49865
1,34	0,4099	**1,73**	0,4582	**2,24**	0,4875	**3,20**	0,49931
1,35	0,4115	**1,74**	0,4591	**2,26**	0,4881	**3,40**	0,49966
1,36	0,4131	**1,75**	0,4599	**2,28**	0,4887	**3,60**	0,499841
1,37	0,4147	**1,76**	0,4608	**2,30**	0,4893	**3,80**	0,499928
1,38	0,4162	**1,77**	0,4616	**2,32**	0,4898	**4,00**	0,499968
1,39	0,4177	**1,78**	0,4625	**2,34**	0,4904	**4,50**	0,499997
1,40	0,4192	**1,79**	0,4633	**2,36**	0,4909	**5,00**	0,5
1,41	0,4207	**1,80**	0,4641	**2,38**	0,4913	**> 5**	0,5
1,42	0,4222	**1,81**	0,4649	**2,40**	0,4918	**∞**	0,5

Электронное учебное издание

Татьяна Александровна **Матвеева**
Виктория Борисовна **Светличная**
Джамиля Алиевна **Мустафина**

«Математика. Часть V»

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2022 г. Поз. № 30.
Подписано к использованию 11.05.2022. Формат 60х84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 4,8.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.