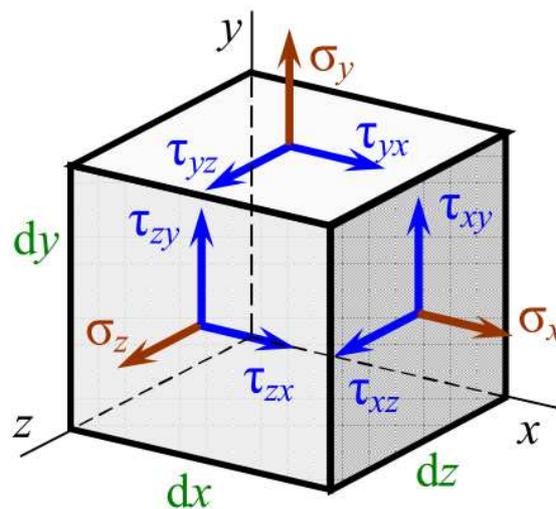


В. Н. Тышкевич, С. В. Орлов

Задания
и методические рекомендации
к выполнению контрольных работ
по механике сплошных сред



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. Н. Тышкевич, С. В. Орлов

**Задания
и методические рекомендации
к выполнению контрольных работ
по механике сплошных сред**

Электронное учебно-методическое пособие



Волжский

2022

УДК 532(075.5)
ББК 38.112
Т 938

Рецензенты:

профессор кафедры «Фундаментальные дисциплины» филиала ФГБОУ ВО
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»» в г. Волжском,
доктор физико-математических наук
Кульков В. Г.
директор ООО «КБ «Мин»», к.т.н., доцент
Моисеев Ю. И.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Тышкевич, В. Н.

Задания и методические рекомендации к выполнению контрольных работ по механике сплошных сред [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / В. Н. Тышкевич, С. В. Орлов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 361 КБ). – Волжский, 2022. – – Режим доступа: <http://lib.volpi.ru>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-9948-4328-4

Изложены основные разделы механики сплошных сред: теории напряжения и деформаций, теории упругости и пластичности применительно к процессам обработки металлов давлением. Теоретический материал иллюстрирован примерами решения соответствующих задач.

Приведены методические рекомендации к выполнению контрольных и расчётно-проектировочных работ по механике сплошных сред. Представлены варианты заданий, примеры расчётов, списки рекомендуемой учебной и специальной литературы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 22.03.02 «Металлургия». Может быть полезно аспирантам, научным и инженерно-технологическим работникам предприятий металлургической и машиностроительной промышленности.

Ил. 89, табл. 3, библиограф.: 10 назв.

ISBN 978-5-9948-4328-4

© Волгоградский государственный
технический университет, 2022
© Волжский политехнический
институт, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Общие методические указания к выполнению контрольных и расчетно-проектировочных работ.....	5
<i>Основные понятия и модели механики сплошных сред.....</i>	<i>6</i>
1. Теория напряжений.....	13
1.1. Внешние силы.	13
1.2. Внутренние силы. Напряжения.....	15
1.3. Тензор напряжений.....	17
1.4. Напряжения на наклонной площадке	20
1.5. Главные нормальные напряжения. Эллипсоид напряжений	2
1.6. Максимальные (главные) касательные напряжения.....	25
1.7. Понятие об октаэдрических напряжениях и интенсивности напряжений	27
1.8. Понятие о шаровом тензоре и тензоре – девиаторе.....	28
1.9. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)....	29
1.10. Диаграмма напряжений Мора.....	31
1.11. Примеры решения задач.....	34
1.12. Задание и варианты к расчётной работе «Исследование напряженного состояния в точке тела».....	43
2. Теория деформаций.....	45
2.1. Перемещения и деформации. Тензор деформации.....	45
2.2. Геометрические уравнения (уравнения Коши).....	48
2.3. Уравнения совместности деформаций (Сен-Венана).....	50
2.4. Главные деформации. Схемы главных деформаций.....	53
2.5. Разложение тензора деформаций... ..	55
2.6. Однородная, равномерная и монотонная деформации.....	57
2.7. Большие деформации.....	58
2.8. Объемная деформация	60
2.9. Скорость деформации.....	61
2.10. Примеры решения задач.....	63
2.11. Контрольные вопросы по теме «Теория деформаций».....	64
3. Теория упругости.....	66
3.1. Обобщенный закон Гука	66
3.2. Выражение напряжений через деформации (обратная форма закона Гука, форма Ламе).....	69
3.3. Закон Гука в тензорной форме.....	71
3.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения.....	72
3.5. Решение в перемещениях. Уравнения Ламе.....	74
3.6. Решение в напряжениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла.....	75
3.7. Типы граничных условий на поверхности тела. Методы решения задачи теории упругости.....	76

3.8. Плоская задача теории упругости. Плоская деформация. Плоское напряженное состояние	79
3.9. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений..	82
3.10. Решение плоской задачи в полярных координатах.....	86
3.11. Расчёт толстостенных труб.....	88
...3.12. Температурные напряжения в толстых трубах.....	94
3.13. Расчёт составных труб.....	97
3.14. Примеры решения задач.....	99
3.15. Задание и варианты к расчётной работе «Плоская задача. Функция напряжений».....	105
3.16. Контрольные вопросы по теме «Теория упругости».....	106
4. Теория пластичности.....	110
4.1. Условия перехода металла в пластическое состояние	110
4.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения.	111
4.3. Условие постоянства интенсивности напряжений.....	113
4.4. Условие упрочнения.....	117
4.5. Простое и сложное нагружение.....	120
4.6. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации.....	121
4.7. Постулат Друкера.....	123
4.8. Ассоциированный закон течения.....	124
4.9. Теория малых упругопластических деформаций.....	125
4.10. Теория пластического течения.....	128
4.11. Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса.....	130
4.12. Выводы.....	131
4.13. Примеры решения задач.....	133
4.14. Задание и варианты к расчётной работе «Расчет составной трубы».....	142
4.15. Контрольные вопросы по теме «Теория пластичности».....	143
Список рекомендуемой литературы.....	146

ВВЕДЕНИЕ

В металлургическом производстве широко применяются различные процессы, связанные с обработкой металлов давлением: прокатка, прессование, волочение, ковка, объемная и листовая штамповка.

Для качественного и количественного описания процессов деформации металла в таких процессах необходимо использовать теорию и методы механики сплошных сред. В связи с этим уже на этапе общеинженерной подготовки следует уделять должное внимание формированию у студентов металлургических специальностей навыков в осуществлении расчетов, связанных с деформациями и напряжениями элементов металлургических машин и оборудования.

В учебном пособии подробно рассмотрены теоретические и практические вопросы механики сплошных сред по следующим темам: теория напряжений, теория деформаций, теория упругости, теория пластичности.

Учебное пособие включает методические указания к выполнению контрольных и расчётно-проектировочных работ по механике сплошных сред. Рассмотрены подробные решения типовых задач, включаемых в расчётно-проектировочные работы для студентов очной, очно-заочной формы обучения и контрольные работы для студентов заочной формы обучения.

В пособии приведены варианты заданий для контрольных и расчётно-проектировочных работ и требования к оформлению заданий, даны справочные материалы, необходимые для решения задач.

Настоящее пособие предназначено для студентов всех форм обучения.

Общие методические указания к выполнению контрольных и расчётно-проектировочных работ

Перед выполнением работы следует подробно изучить теоретический материал, примеры расчётов, приведённые в рекомендуемой литературе [1 – 10], и примеры, представленные в данном пособии. Если вы хорошо владеете теоретическим материалом и легко справляетесь с решением задач, приступайте к выполнению контрольной или расчётно-проектировочной работы.

Расчётно-проектировочная работа выполняется на одной стороне листов белой бумаги формата А4 (210×297) по ГОСТ 2.301-68. Основная надпись на листах выполняется по форме 2а по ГОСТ 2.104-2006 (кроме титульного листа – форма 2). Для студентов заочной формы обучения допускается выполнение задач контрольных работ в тетрадях. Оформление может быть рукописным или с применением печатающих и графических устройств вывода ЭВМ.

Индивидуальный вариант задания расчётно-проектировочной работы выбирается по порядковому номеру студента в списке группы.

Выполненная контрольная или расчётная работа проверяется препода-

вателем, после чего проводится её защита. На защите студент должен показать знания теории, умение и практические навыки решения задач по рассматриваемой теме.

Основные понятия и модели механики сплошных сред

Механика сплошных сред является разделом механики. *Механика* – это наука, изучающая простейшую форму движения материи – *механическое движение*, т.е. изменение в пространстве с течением времени взаимного расположения тел или частей тела. В теоретической механике для описания этой формы движения используются абстрактные понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальной точкой называется тело конечной массы, но пренебрежительно малых размеров.

Абсолютно твердым телом называется тело, состоящее из совокупности материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга под действием приложенных внешних сил.

Если допустить изменение взаимного расположения материальных частиц, то приходим к понятию *сплошной среды*. К сплошным средам относятся газообразные, жидкие и твердые деформируемые тела, например воздух, смазка и металл соответственно.

Механика сплошных сред – это часть механики, посвящённая изучению движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

В области обработки металлов давлением наибольший интерес представляет изучение движения только твердых деформируемых тел.

Основными формами движения твердых деформируемых металлических тел являются упругость и пластичность (упругая и пластическая деформации).

Упругость – это способность металлических тел после снятия внешних сил полностью восстанавливать свою прежнюю форму, размеры и объем. Если на металлическое тело действуют внешние растягивающие силы, то расстояния между соседними атомами в кристаллической решетке увеличиваются в направлении действия этих сил. Если на тело действуют внешние сжимающие силы, расстояния между атомами уменьшаются. Если изменение расстояний между атомами много меньше периода кристаллической решетки, то после снятия внешних сил восстанавливаются прежние расстояния между атомами и в кристаллической решетке не остается никаких изменений. Такая деформация называется упругой. При упругой деформации кристаллическая решетка подобно пружине накапливает потенциальную энергию, которая называется энергией упругой деформации.

Пластичность (деформируемость) – это способность металлов под воздействием внешних сил изменять необратимо свою форму и размеры без разрушения. При увеличении внешних сил увеличивается энергия

упругой деформации. По достижении определенной ее величины начинается течение металла и в действие вступает новый механизм деформации – скольжение. При этом плоскости, в которых располагаются атомы, смещаются относительно друг друга под действием касательных напряжений на величину много большую, чем период кристаллической решетки. После снятия внешней нагрузки прежняя картина не восстанавливается, как это было при упругой деформации. Такая деформация тела называется пластической.

Состояние, при котором металлы приобретают эту способность (свойство), называется упругим или пластическим. Пластическому состоянию всегда предшествует упругое состояние. Для металлических тел упругие деформации в процессах обработки металлов давлением обычно малы.

Пластичность как ценное свойство металлов широко используется в процессах обработки металлов давлением (горячая и холодная штамповка, прокатка, прессование, волочение) для придания детали нужной формы.

Изучением действия внешних сил на упругие тела занимается *теория упругости*. Изучением действия внешних сил на пластические тела занимается *теория пластичности*. Теории упругости и пластичности – основные разделы механики сплошных сред. В них рассматривается равновесие и движение деформируемых твердых тел с учетом изменения расстояния между материальными частицами при наложении внешнего воздействия, а также методы расчета напряженно-деформированного состояния металла.

Основные задачи дисциплины «Механика сплошных сред»: определение полей напряжений и деформаций в обрабатываемом металле и инструменте, что имеет не только чисто теоретический, но и практический интерес; установление условий перехода металла из упругого состояния в пластическое; выяснение наиболее благоприятных режимов пластического деформирования; изучение связи между пластическими деформациями и изменением физических и механических свойств металла.

При решении поставленных задач обычно выбирается модель твердого деформируемого тела, построенная на гипотезах о сплошности строения, однородности материала, шаровой изотропии и естественном ненапряженном состоянии.

Гипотеза о сплошности строения тела. По этой гипотезе тело до деформации, в процессе деформации и после остается сплошным (без пустот, разрывов, трещин).

В любом существенном для нас объеме очень много атомов, а расстояния между ними малы. Например, 1 см^3 железа плотностью $7,87 \text{ г/см}^3$ содержит при температуре 20°C $8,46 \cdot 10^{22}$ атомов, а расстояние между соседними атомами равно $2,86 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Поэтому твердое деформируемое металлическое тело можно моделировать сплошной средой, занимающей часть реального пространства. Расстояние между ближайшими точками сплошной среды как угодно мало. Эта гипотеза является основой для математического описания движения твердых деформируемых тел, позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчис-

ления.

Допущение об однородности материала. Сплошная среда называется однородной, если свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы; например, среда имеет одинаковую плотность во всех точках.

В реальных деформируемых телах однородности не существует, хотя бы из-за отсутствия однородности материала. Неоднородными телами являются плакированный лист из дюралюмина, неравномерно нагретое по объему тело. Существенно неоднородны композитные материалы, содержащие волокна из углерода или бора.

Гипотеза об изотропности среды. Сплошная среда считается изотропной по отношению к какому-либо свойству металла, если это свойство в любой точке будет одинаковым по всем направлениям. Если же свойства зависят от направления в точке, то среда является *анизотропной* по отношению к этим свойствам.

Отдельно взятый кристалл металла анизотропен, поскольку атомы в кристаллической решетке располагаются совершенно определенным образом. Но если в объеме содержится большое количество хаотично расположенных кристаллов, то материал в целом можно рассматривать как изотропный. С другой стороны, в прокатанном металле зерна деформируются в направлении прокатки, образуется так называемая текстура. Поэтому свойства в направлении прокатки и в поперечном направлении будут разными. Такая же анизотропия возникает при всех видах обработки металлов давлением.

Особенно резко выражена анизотропия в полуфабрикатах, изготовленных из сплавов авиационного назначения (титановых, бериллиевых, магниевых, алюминиевых), специальных сталей. Одними из самых перспективных материалов являются композиты. Они по своему строению (конструкции) вообще не могут быть изотропными.

Гипотеза о естественном напряженном состоянии тела. Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок напряжения в материале принимаются равными нулю. Эта гипотеза также не отвечает реальности, т.к. невозможно получить полуфабрикаты без остаточных напряжений.

Всё перечисленное представляет собой основные допущения механики сплошной среды, точнее, механики деформируемого твердого тела. Причем, если гипотезы о сплошности строения тела и его естественном ненапряженном состоянии остаются как бы неизменными, то применение остальных не всегда является обязательным. Из приведенного выше ясно, что принятые гипотезы не отвечают действительности, но они помогают строить физическую модель деформируемой среды.

Принятых допущений недостаточно для построения моделей теорий упругости и пластичности. Здесь приходится проводить дальнейшую идеализацию.

Математически модель материала можно представить функцией:

$$f(\sigma, \varepsilon, t, T^0, \dot{\varepsilon}) = 0,$$

где основные факторы: σ – напряжение, ε – относительная деформация,

t – время, T^0 – температура, $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ – скорость деформации.

Модель 1. Упругое тело

$$\sigma = f(\varepsilon), \quad \varepsilon = \varphi(\sigma)$$

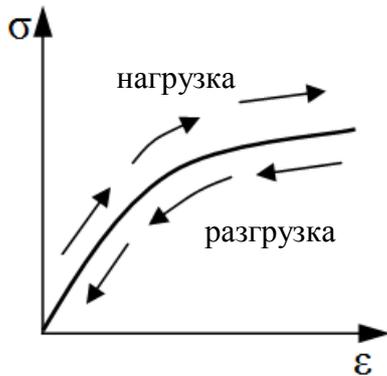


Рис. 1.1. Нелинейно упругое тело

Идеальной упругостью называется однозначная зависимость между силами и вызванными этими силами перемещениями. Если прикладывать к упругому телу нагрузку в различной последовательности, то конечное состояние не будет зависеть от порядка их приложения, оно определяется только начальными значениями нагрузок. Из данного определения следует, в частности, что после снятия нагрузки идеально упругое тело всегда возвращается в исходное состояние.

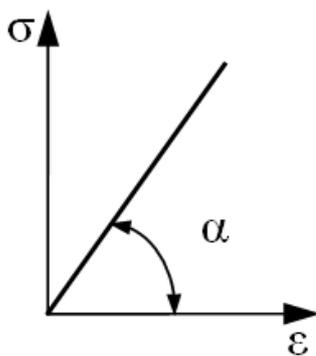


Рис. 1.2. Линейно упругое тело

ние.

Свойства упругого тела:

- диаграмма не зависит от времени;
- нагрузка и разгрузка идет по одной линии (нет остаточных деформаций).

Существуют такие материалы, например резина, для которых в определённых границах деформирования имеет место взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформациями, поскольку диаграммы нагружения и разгрузки совпадают (рис. 1.1), в то время как зависимость напряжений от деформаций является нелинейной. Такие материалы называются нелинейно упругими.

Для линейно упругих тел (рис. 1.2) справедлив закон Гука: $\sigma = E\varepsilon$.

$E = \text{tg}\alpha$ – модуль продольной упругости.

Модель 2. Упруго-пластическое тело

Свойства тела (рис. 1.3):

- диаграмма не зависит от времени;
- линии нагрузки и разгрузки не совпадают.

Зависимость между нагрузками и перемещениями не однозначна.

Перемещения зависят от порядка приложения сил. Вообще перемещения будут зависеть и от скорости нагружения, времени пребывания под нагрузкой, однако при построении модели эти эффекты разделяют.

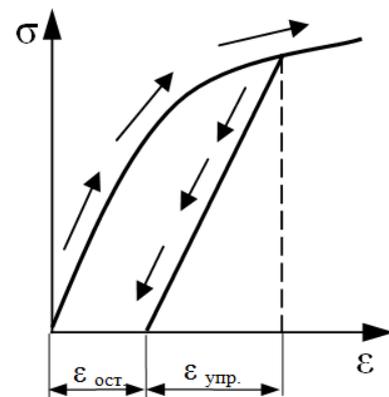


Рис. 1.3. Упруго-пластическое тело

Идеально упругопластическое тело или идеально пластическое тело (рис. 1.4, а). При напряжении меньше предела упругости (текучести) тело ведет себя как тело Гука. При достижении предела текучести начинается пластическое течение и деформация здесь является неопределенной. Разгрузка протекает упруго с тем же модулем, что и при нагружении, сжатие подчиняется тем же законам, что и растяжение, т.е. пределы текучести на растяжение σ_T^p и сжатие $\sigma_T^{сж}$ равны по абсолютной величине. Такие тела называют телами Прандтля.

Идеально жесткопластическое тело (рис. 1.4, б). Если пластическая деформация является развитой, то упругой составляющей можно пренебречь и считать, что материал до предела текучести ведет себя как абсолютно твердое тело. И здесь пластическая деформация является неопределенной и может неограниченно возрастать. Такие тела называют телами Сен-Венана. Определенный тип моделей может учитывать упрочнение, т.е. наблюдается повышение предела текучести с ростом деформации.

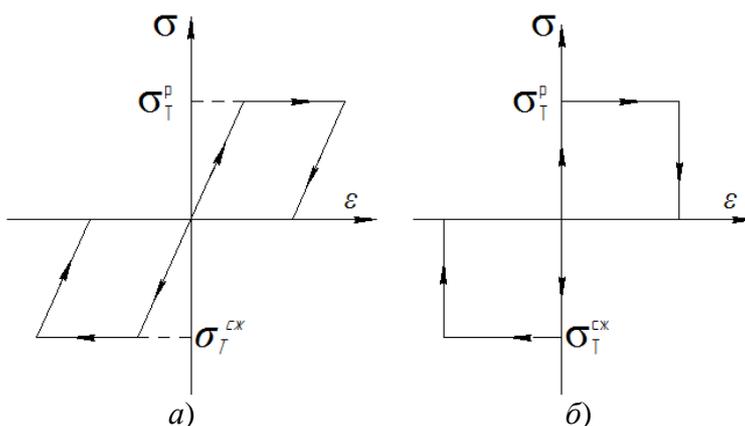


Рис. 1.4. Идеально пластическое (а) и жёсткопластическое (б) тело

Модель 3. Тело, склонное к ползучести

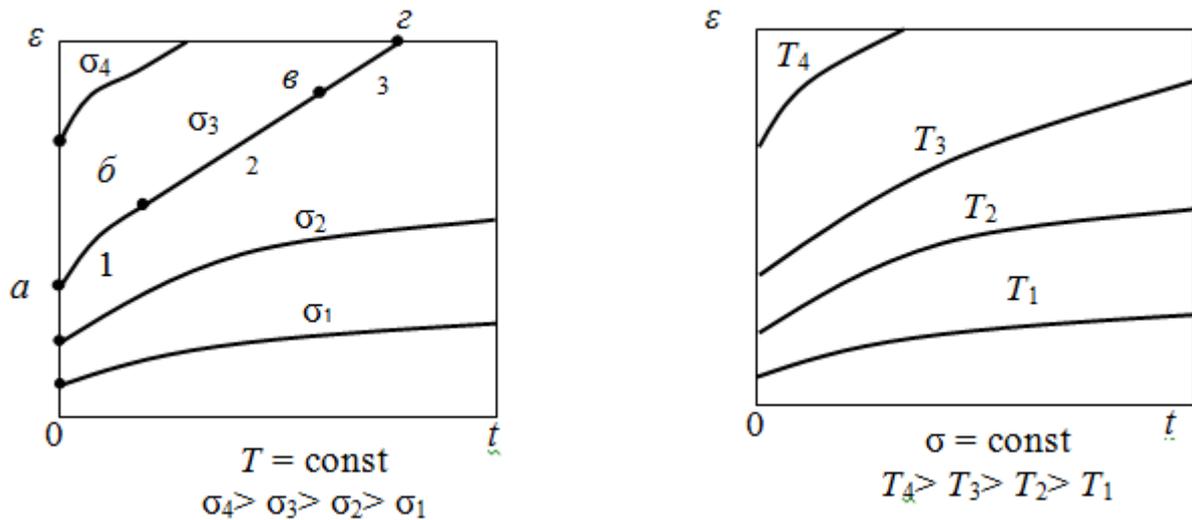
У многих материалов (полимеры, бетон, металлы при повышенной температуре) замечены связи $\epsilon = f(\sigma, t)$ – существенно зависит от времени.

Ползучесть – изменения напряжений и деформаций во времени при постоянных внешних нагрузках (из-за вязкости) (рис. 1.5, а). Свойство **вязкости** проявляется в том, что после нагружения тела напряжения и деформации в нём изменяются с течением времени.

Частичные проявления ползучести – **последствия и релаксация**.

Последствия – рост деформаций при постоянном напряжении (рис. 1.5, б).

Пример: увеличение размеров диска и лопаток газовой турбины, находящейся под воздействием больших центробежных сил и высоких температур. Это увеличение необратимо и проявляется особенно после многих часов работы.



аб – неустановившаяся ползучесть; *бв* – установившаяся ползучесть;
вз – окончательная ползучесть (до разрушения)

a) b) Рис. 1.5. Тело, склонное к ползучести

Релаксация – самопроизвольное изменение во времени напряжений при неизменной деформации (рис. 1.6).

Пример: ослабление затяжки болтовых соединений, работающих в условиях высоких температур.

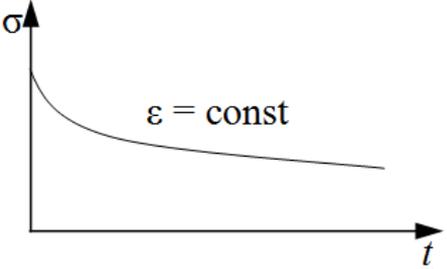


Рис. 1.6. Релаксация

Предел ползучести – напряжение, при котором пластическая деформация за заданный промежуток времени достигает заданной величины.

Предел длительной прочности – напряжение, вызывающие разрыв образца после заданного срока непрерывного действия этого напряжения при определённой температуре ($\sigma_{10^3}^{700}$).

Деформация в произвольный момент времени в условиях ползучести:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p + \epsilon_c$$

- ϵ_e – упругая деформация *e* – elastic
- ϵ_p – пластическая деформация *p* – plastic
- ϵ_c – деформация ползучести *c* – creep

На рисунке 1.6 проиллюстрирован процесс обратного последействия или обратной ползучести для вязко-упругого материала. Нагрузим образец

за короткое время до напряжения σ и деформации $\varepsilon_e + \varepsilon_p$; оставим на время t^* образец под напряжением $\sigma = const$, он увеличит деформацию на ε_c ; снимем нагрузку, деформация уменьшится мгновенно на значение ε_e ; затем начнётся самопроизвольный процесс уменьшения деформации – это *обратное последствие* или *обратная ползучесть*.

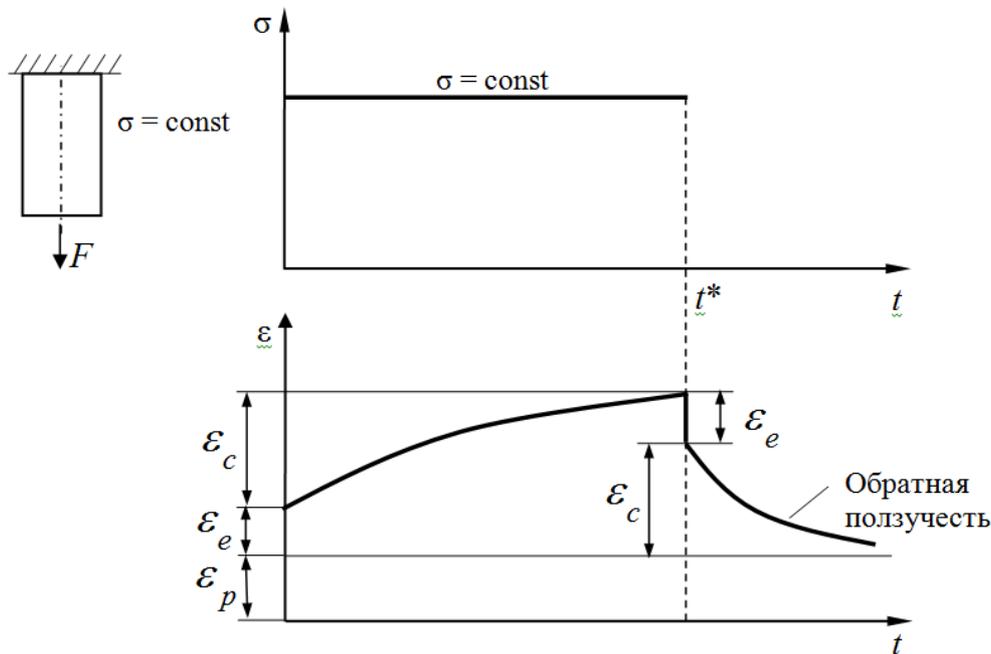


Рис. 1.6. Обратная ползучесть для вязко-упругих материалов

Материалы, обладающие свойством последствия называют *наследственно-упругими* или *вязко-упругими*.

В зависимости от соотношения величин составляющих общей деформации реального объекта для него выбирается модель материала и раздел МДТТ:

1. Если $\varepsilon_e \gg \varepsilon_p + \varepsilon_c$ ($\varepsilon \approx \varepsilon_e$), то за телом сохраняется только свойство упругости (модель 1), рассматривается методами *Теории упругости*, в ней различают 2 раздела: линейная и нелинейная ГУ.

2. Если $\varepsilon \approx \varepsilon_p + \varepsilon_c$, за телом сохраняются и упругие и пластические свойства (обычно $\varepsilon_p \gg \varepsilon_e$ и оставляют только пластические). Задача решается методами *Теории пластичности*.

3. Если за телом сохраняются только упругие и вязкие свойства, то раздел МДТТ называется *Теорией вязко-упругости*.

4. Если – свойства упругости, пластичности и вязкости – *Теорией ползучести*.

1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Теория напряжений ставит задачу изучения внутренних сил в твердых телах. Эти силы выражают взаимодействие между собой микрочастиц тела. Мету внутренних сил называют *напряжением*. При действии внешних сил тело деформируется и изменяется взаимное расстояние между его точками; вследствие этого возникают дополнительные внутренние силы. Для их обнаружения используются метод сечений и *аксиома связей* (из курса теоретической механики).

Напряжения меняются при переходе от одной частицы к другой, и напряженное состояние тела в общем случае является *неоднородным*, образуя *поле напряжений*. Уравнения равновесия для произвольной бесконечно малой частицы тела составляются в дифференциальной форме.

Связь внутренних напряжений с внешними силами осуществляется с помощью *граничных условий*, получаемых из уравнений равновесия бесконечно малых частиц, мысленно выделяемых на поверхности тела.

1.1. Внешние силы

В процессе обработки металлов давлением участвуют деформируемый металл и инструмент. Задача – определить их взаимодействие. Взаимодействие обрабатываемого тела и инструмента можно рассматривать с точки зрения его величины, направления, продолжительности. С точки зрения величины и направления взаимодействие удобно выражать силой – векторной величиной.

В механике твердого деформируемого тела под внешней силой понимают воздействие окружающей среды на тело, стремящееся изменить состояние его покоя или движения. Здесь под окружающей средой подразумевают другие тела и поля, например, поле тяготения земли, магнитное поле и т.д.

Внешние силы классифицируются по нескольким признакам. Так, в зависимости от места расположения точек приложения силы делятся на поверхностные и объемные (массовые). По продолжительности действия внешние силы подразделяются на постоянные и временные. Например, вес моста – сила постоянная, поезд, движущийся по нему, – сила временная.

По характеру изменения величины внешние силы делятся на статические и динамические. *Статическими* будут такие силы, когда изменение их величины настолько мало, что ускорением точек тела и их инерцией можно пренебречь. Если ускорение велико и им нельзя пренебречь, силы – *динамические*. Динамические силы могут измениться большое число раз, их называют *циклическими, повторно-переменными, вибрационными*.

Если же они прикладываются на очень короткий промежуток времени, то силы будут *ударными*. По способу воздействия силы бывают активными и реактивными. *Активные* силы возникают от действия машин (прокатных станов, гидравлических прессов, молотов) и передаются обрабатываемому

металлу при помощи инструмента. В процессе деформирования на металл действуют не только активные силы, но и сопротивление неподвижных частей инструмента, которые являются связями, ограничивающими движение деформируемого тела. Воздействие связей на твердое деформируемое тело можно представить как воздействие некоторых сил, которые называют реакциями связей (*реактивными силами*).

Если деформируемое тело соприкасается с поверхностью инструмента, ограничивающей перемещение точек тела, то реакции связей при отсутствии трения будут направлены по нормали к поверхности в сторону тела. На рисунке 1.7 показана схема волочения проволоки, где сила N представляет воздействие стенок инструмента на деформируемый металл и является реактивной силой, а сила волочения $P_{\text{вол}}$ – активной силой.

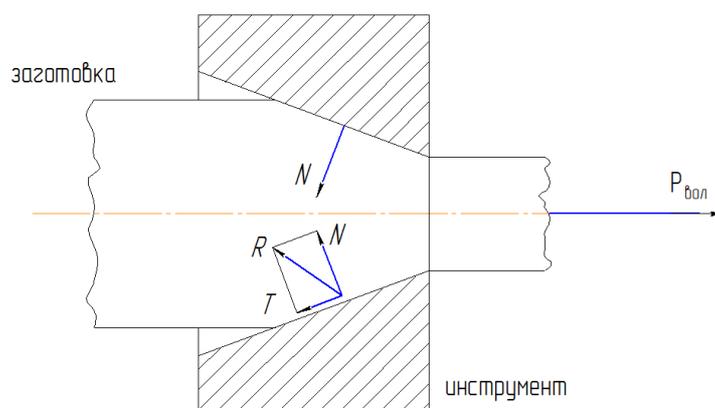


Рис. 1.7. Схема волочения проволоки

К реакциям связей относятся также силы трения, возникающие в местах соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента. Сила трения T располагается в плоскости, касательной к точкам соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента, и направлена в сторону, противоположную движению (см. рис. 1.7). В результате сложения с силами трения реакции связей R отклоняются от направления нормали к поверхности инструмента в сторону, противоположную движению металла.

Силы, распределенные по всему объему твердого деформируемого тела V , называются массовыми (объемными) силами. Если F – главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm , то плотность массовой силы в данной точке:

$$\bar{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{d\bar{F}}{\Delta m} = \frac{d\bar{F}}{dm}.$$

На малую частицу объемом dV с массой ρdV действует массовая сила $dF = \rho f dV$, а для всего объема V главный вектор массовых сил равен:

$$F = \iiint \rho \vec{f} dV,$$

где ρ – плотность сплошной среды. Примерами массовых сил являются силы тяжести и инерционные силы, силы магнитного притяжения.

В процессах обработки металлов давлением основную роль играют поверхностные силы. Если ΔP_n – усилие, приходящееся на элементарную площадку ΔS с вектором внешней нормали n к поверхности тела, то плотность поверхностных сил (давление) равна:

$$\sigma_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S} = \frac{dP_n}{dS}.$$

Главный вектор поверхностных сил, действующих на конечный объем V сплошной среды, который ограничен поверхностью S , равен:

$$\vec{P}_n = \iint \sigma_n ds.$$

1.2. Внутренние силы. Напряжения

Под действием внешних сил в твердом деформируемом теле возникают внутренние силы, которые связаны с тем, что реальное тело сопротивляется изменению расстояния между частицами. Оценить в расчетах, как изменяются связи в металле под действием внешних сил, практически не удастся. Исключительная сложность явлений вынуждает идти на идеализацию общей схемы процесса. Одной из таких идеализаций является понятие о напряжениях, которые статически отражают внутренние связи между частицами металла. Как известно, напряжение представляет собой плотность внутренних сил или интенсивность внутренних сил, действующих между частицами сплошного тела по воображаемым плоскостям.

Напряжение – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий, то есть внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в окрестности рассматриваемой точки.

Напряжения, возникающие в деформируемом теле под действием внешних сил, определяются с помощью метода сечений. Положим, что в твердом теле, находящемся в равновесии под действием внешних сил, требуется определить напряжение в некоторой произвольной точке A (рис. 1.8). Для этого мысленно сечем тело плоскостью через точку A и делим его на части I и II . Отбросив часть II , заменим ее действие на часть I внутренними силами. Положим, что равнодействующая сил, действующая на элементарную площадку ΔA , выделенную в окрестности точки A , равна ΔR . Тогда полное напряжение в точке A будет равно:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}.$$

Напряжение полное p – уравнивающее внешнюю нагрузку.

Напряжение p – величина векторная, раскладывается на составляющие: по нормали к сечению σ и в плоскости сечения τ , причем $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$.

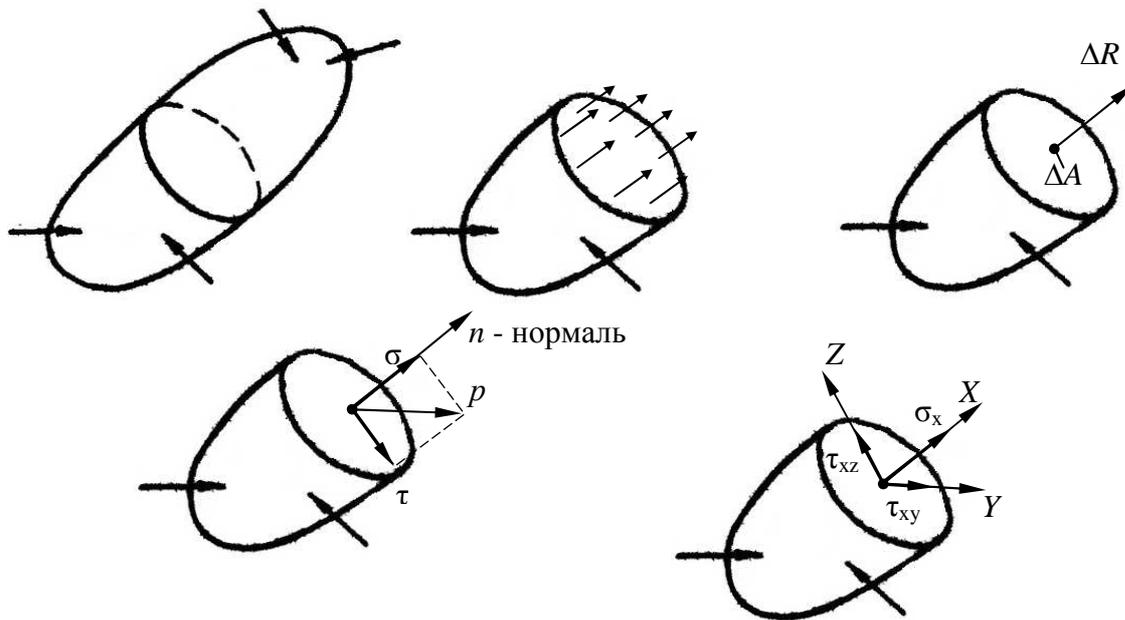


Рис. 1.8. Определение напряжений методом сечений

Напряжение нормальное σ – перпендикулярное к сечению. Напряжение касательное τ – действующее в плоскости к сечению. Спроецировав напряжение на три оси, получим: σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} .

Обозначение индексов при напряжениях: первый соответствует площадке, нормаль к которой совпадает с направлением оси (адрес площадки); второй указывает направление напряжений. Нормальные напряжения имеют только первый индекс.

Очевидно, что напряжение p зависит от направления сечения, проведенного через точку A . Через точку A можно провести множество сечений, а поэтому и векторов напряжения p в точке будет бесчисленное множество. Причем каждое из них будет соответствовать определенному сечению, направление которого принято задавать направлением внешней нормали n (см. рис. 1.8). Это бесчисленное множество векторов p и будет характеризовать напряжение состояния точки тела. В такой постановке вектор p оказывается непригодным для описания напряженного состояния сплошной среды в точке. К счастью, для того чтобы полностью описать напряженное состояние в точке тела, нет необходимости рассматривать все векторы. Это можно сделать, задавая векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках около точки, параллельных координатным плоскостям (рис. 1.9).

Таким образом, напряженное состояние в точке A может быть определено тремя векторами напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярных координатным осям. Каждый

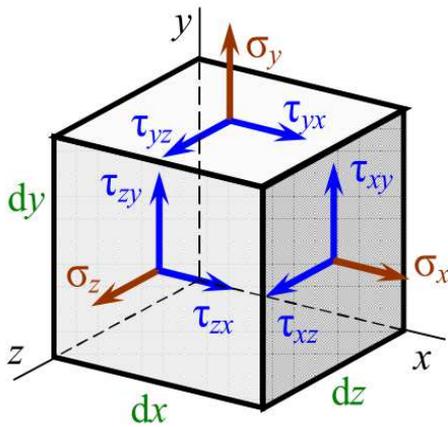


Рис. 1.9

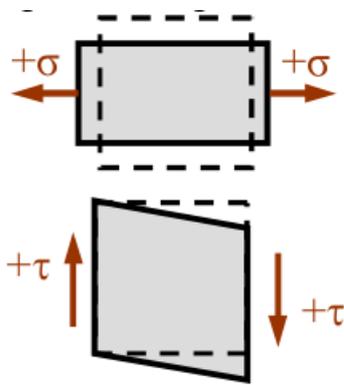


Рис. 1.10

из этих векторов можно разложить на нормальное и два касательных напряжения (см. рис. 1.9).

Для площадок по направлениям, параллельным координатным осям, имеем 9 скалярных величин компонент напряжения: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} , характеризующих напряженное состояние в точке. Нормальные напряжения принято считать положительными, если они растягивающие, и отрицательными, если они сжимающие (рис. 1.10). Касательные напряжения положительны, если они дают положительную проекцию на соответствующую координатную ось. Касательные напряжения вызывают смещение граней, их сдвиг, изменение углов прямых на тупые и острые. Касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремится вращать грань по ходу часовой стрелки (см. рис. 1.10).

В системе СИ напряжения выражаются в мегапаскалях (МПа) или Н/мм² (1МПа = 1 Н/мм²). Наряду с ними по-прежнему широко используются размерность напряжений в металлических телах кгс/мм² (1кгс/мм² = 9,8МПа ≈ 10 МПа ≈ 10 Н/мм²).

В системе СИ напряжения выражаются в мегапаскалях (МПа) или Н/мм² (1МПа = 1 Н/мм²). Наряду с ними по-прежнему широко используются размерность напряжений в металлических телах кгс/мм² (1кгс/мм² = 9,8МПа ≈ 10 МПа ≈ 10 Н/мм²).

1.4. Тензор напряжений

Тензор (от лат. *Tensus* – напряженный, натянутый) – это математическое представление физических величин, которые не зависят от выбора системы координат. В каждой системе координат тензор задается совокупностью чисел, которые при переходе к другой системе координат изменяются по определенному закону и обладают некоторым количеством *инвариантов*, которые при переходе (повороте осей) не изменяются.

Все скалярные и векторные величины можно рассматривать как тензоры. В трехмерном пространстве число компонент тензора:

$$n = 3^N,$$

где N – ранг или порядок тензора.

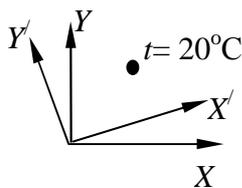


Рис. 1.11

Тензор нулевого ранга ($N = 0$) в любой системе координат задается одной компонентой $n = 3^0 = 1$. Такие тензоры называют *скалярами* и выражают физические величины, характеризующиеся только числовым значением, и эта единственная компонента не меняет своего значения при преобразовании координатной системы (рис. 1.11). Эту компоненту называют *инвариантом*. Примерами

скаляров могут служить такие величины, как время, температура, энергия, расстояние между двумя точками в пространстве и др.

Тензоры первого ранга ($N = 1$) имеют в трехмерном пространстве компоненты $n = 3^1 = 3$, они называются *векторами* и представляют величины, которые характеризуются как *числовым значением*, так и *направлением*.

Примерами векторов могут служить сила, скорость, ускорение и т.д. Графически вектор изображается направленным прямолинейным отрезком, длина которого в масштабе соответствует значению вектора или его модулю. Вектор имеет *один инвариант* – длину, который одинаков в любой системе. Введем обозначение косинусов углов между осями координат:

$$l_1 = \cos(x, x_1); \quad m_1 = \cos(x_1, y); \quad n_1 = \cos(x_1, z)$$

и т.д. (рис. 1.12).

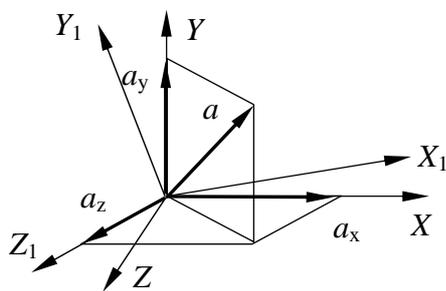


Рис. 1.12

	x	y	z
x_1	l_1	m_1	n_1
y_1	l_2	m_2	n_2
z_1	l_3	m_3	n_3

В старой системе координат вектор a имеет компоненты a_x, a_y, a_z , в новой – a_{x1}, a_{y1}, a_{z1} (см. рис. 1.12). Компоненты (проекции) вектора связаны через направляющие косинусы следующими соотношениями:

$$a_{x1} = a_x l_1 + a_y m_1 + a_z n_1;$$

$$a_{y1} = a_x l_2 + a_y m_2 + a_z n_2;$$

$$a_{z1} = a_x l_3 + a_y m_3 + a_z n_3.$$

Величина, характеризующаяся тремя компонентами (числами), линейно преобразующимися по таким формулам, и есть тензор первого ранга.

Тензоры второго ранга ($N = 2$) имеют в трехмерном пространстве девять координатных компонент $n = 3^2 = 9$. Тензор второго ранга называют также *диадисом*.

К более компактной записи векторов и тензоров ведет иной способ обозначения осей, если вместо x, y, z обозначить 1, 2, 3. Компоненты напряженного состояния обозначаются: σ_i, τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = (\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

При повороте осей координат компоненты тензора напряжений будут пересчитываться по формулам тензорных преобразований:

$$\begin{aligned}\sigma_{x1} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{xz} l_1 n_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1; \\ \sigma_{y1} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{xz} l_2 n_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2; \\ \sigma_{z1} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{xz} l_3 n_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3; \\ \tau_{x1y1} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \tau_{xz} (l_1 n_2 + l_2 n_1) + \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1); \\ \tau_{x1z1} &= \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xz} (l_1 n_3 + l_3 n_1) + \tau_{xy} (l_1 m_3 + l_3 m_1) + \tau_{yz} (m_1 n_3 + m_3 n_1); \\ \tau_{y1z1} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xz} (l_2 n_3 + l_3 n_2) + \tau_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2)\end{aligned}$$

В символьном (тензорном) обозначении все 6 уравнений запишутся коротко:

$$\sigma_{i1j1} = \sigma_{ij} l_i l_j.$$

Как показано выше, напряженное состояние в точке деформируемого твердого тела характеризуется девятью числами и поэтому может быть описано тензором второго ранга – тензором напряжений.

В столбцах тензора напряжений содержатся напряжения, направление которых параллельно соответственно координатным осям x , y и z , а в строках – компоненты напряжения, действующие на площадках, нормаль которых параллельна осям x , y и z соответственно.

Параллелепипед, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, должен находиться в равновесии при действии сил, приложенных к его граням. Нормальные силы, приложенные к граням параллелепипеда, взаимно уравновешены и, следовательно, три уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Составив уравнения суммы моментов всех сил относительно координатных осей x , y , z , можно получить следующие три равенства: $\tau_{zx} = \tau_{xz}$; $\tau_{zy} = \tau_{yz}$; $\tau_{yx} = \tau_{xy}$.

Эти равенства называют законом парности касательных напряжений: если по какой-либо площадке действует некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку (рис. 1.13).

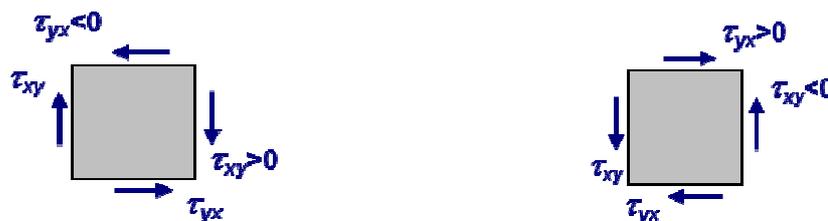


Рис. 1.13. Закон парности касательных напряжений

Вследствие закона парности касательных напряжений тензор становится симметричным относительно главной диагонали. Вместо девяти компонентов независимыми оказываются только шесть.

Если компоненты тензора описывают свойства деформируемых материалов, то такие тензоры называют *материальными*. Например, с помощью тензоров второго ранга описывают свойства электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости.

Если компоненты тензора не отражают свойства материалов, а зависят только от внешних сил и положения площадки в пространстве, то такие тензоры называют *полевыми*. Тензор напряжений – это *полевой тензор*, описывающий напряженное состояние в точке деформируемого тела как в упругом, так и в пластическом состоянии.

1.4. Напряжения на наклонной площадке

Если в исследуемой точке нам известны шесть компонент тензора напряжений (напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках, которые называют исходными), то напряженное состояние в этой точке считается полностью известным (определённым). Это означает, что можно определить напряжения на любой площадке, проходящей через данную точку. Докажем это, получив формулы для напряжений на произвольной наклонной площадке, проходящей через данную точку. Нормаль этой площадки задаётся направляющими косинусами l, m, n (рис. 1.14, а).

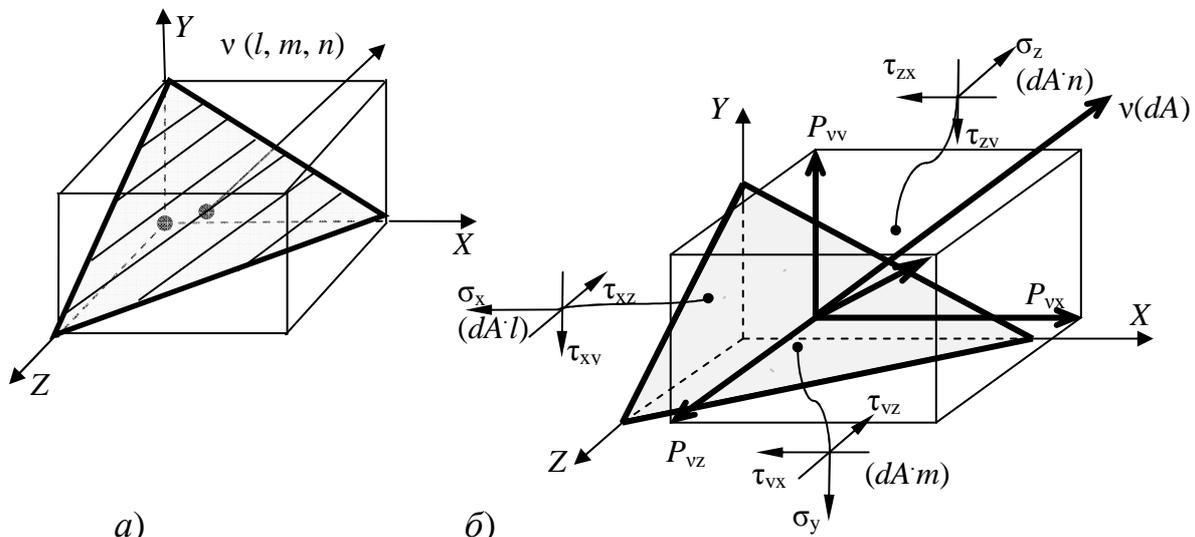


Рис. 1.14. Наклонная площадка (а) и напряжения на наклонной площадке (б)

Обозначив площадь наклонной площадки dA , площадь остальных граней, лежащих в координатных плоскостях, получим равными: $dA \cdot l, dA \cdot m, dA \cdot n$ (рис. 1.14, б).

При уменьшении размеров полученный элементарный четырёхгранник стягивается в точку (начало координат). Поэтому напряжения на гранях элемента рассматривают как напряжения в исследуемой точке на соответ-

ствующим образом ориентированных площадках. Между направляющими косинусами есть зависимость, которая наглядно иллюстрируется рисунком 1.15.

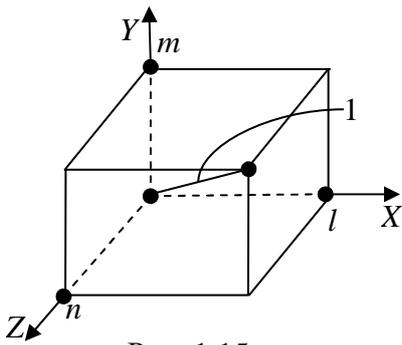


Рис. 1.15

Если диагональ параллелепипеда будет равна 1, то очевидно: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Косинус всегда лежит в пределах от -1 до +1.

Уравнение равновесия тетраэдра при проецировании тетраэдра на ось X (объемные силы не учитываются):

$$-\sigma_x \cdot dA \cdot l - \tau_{yx} \cdot dA \cdot m - \tau_{zx} \cdot dA \cdot n + P_{vx} \cdot dA = 0$$

Или, делая очевидные упрощения и дописывая по аналогии два других уравнения, получим:

$$\begin{cases} P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ P_{vz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (1.1)$$

$$P_v = \sqrt{P_{vx}^2 + P_{vy}^2 + P_{vz}^2}.$$

Эти уравнения называют:

- напряжения на произвольной площадке;
- условия на поверхности или статические граничные условия, если элемент выделен на поверхности тела и P_{vx}, P_{vy}, P_{vz} – интенсивность внешней нагрузки.

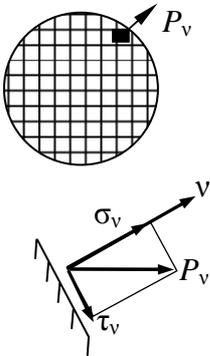


Рис. 1.16

При решении задач обработки металлов давлением часто требуется знать связь между внешними силами на поверхности твердого деформируемого тела и напряжениями, действующими внутри, а также между напряжениями на плоской площадке внутри тела и напряжениями на трех взаимно перпендикулярных площадках.

Найденные нормальные и касательные напряжения на этой наклонной площадке (рис. 1.16):

$$\begin{aligned} \sigma_v &= P_{vx} l + P_{vy} m + P_{vz} n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2 \tau_{xy} l m + 2 \\ &\quad \tau_{yz} m n + 2 \tau_{xz} n l; \\ \tau_v &= \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2}. \end{aligned}$$

1.5. Главные нормальные напряжения. Эллипсоид напряжений

Из всего множества площадок, проходящих через точку тела, всегда можно выделить такие три взаимно перпендикулярные, на которых касательные напряжения равны нулю.

Эти площадки называют *главными*, а нормальные напряжения, дей-

ствующие на них, – *главными напряжениями*. Их обозначают: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Их называют главными, потому что экстремальны по величине в рассматриваемой точке тела (рис. 1.17). Главные напряжения удобны в расчётах хотя бы потому, что их 3, а не 9 компонент тензора. Тензор напряжений в главных осях имеет вид:

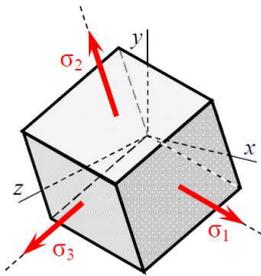


Рис. 1.17

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Пусть наклонная площадка является главной, тогда полное напряжение P_v будет направлено вдоль нормали и будет главным на этой площадке (рис. 1.18).

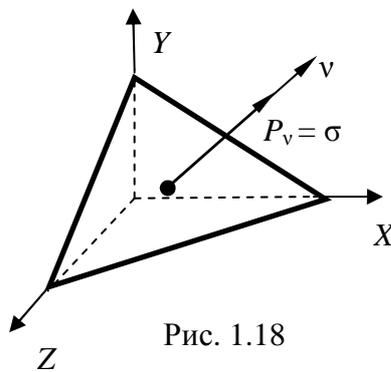


Рис. 1.18

Тогда $P_{vx} = \sigma l$; $P_{vy} = \sigma m$; $P_{vz} = \sigma n$. А уравнения (1.1) примут вид:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0; \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0; \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Присоединив сюда уравнение:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.3)$$

получим 4 уравнения для определения 4-х неизвестных: σ, l, m, n .

Так как l, m, n не могут быть одновременно равны нулю ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), то решение отличное от нулевого возможно только при равенстве нулю его детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим кубическое уравнение для определения главных напряжений:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0,$$

где I_1, I_2, I_3 – инварианты: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$;

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

Решение кубического уравнения даёт три действительных корня:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Направление главных площадок определяется из системы трёх уравнений (1.2), (1.3) (в системе (1.2) берётся два любых уравнения с подстановкой соответствующего главного напряжения σ_i).

Подставляя в (1.2) σ_1 , находим l_1, m_1, n_1 ; аналогично для других площадок определяется $l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$.

Для контроля правильность вычислений необходимо проверить:

- перпендикулярность главных площадок по условиям ортогональности:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0.$$

- инварианты: $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$; $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$.

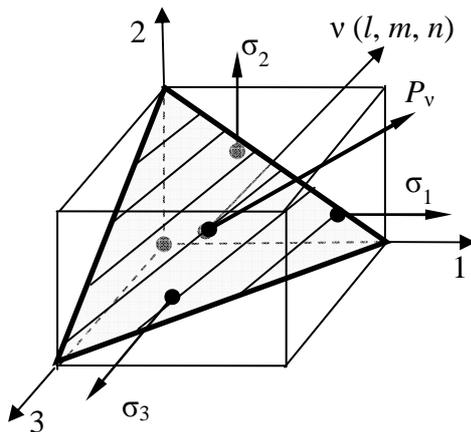


Рис. 1.19

Если в окрестности исследуемой точки элементарный объём выделен главными площадками (рис. 1.19), то уравнения (1.1) существенно упрощаются:

$$\begin{cases} P_{vx} = \sigma_1 \cdot l; \\ P_{vy} = \sigma_2 \cdot m; \\ P_{vz} = \sigma_3 \cdot n. \end{cases} \quad \begin{cases} l = \frac{P_{vx}}{\sigma_1}; \\ m = \frac{P_{vy}}{\sigma_2}; \\ n = \frac{P_{vz}}{\sigma_3}. \end{cases}$$

Так как $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, то получим:

$$\left(\frac{P_{vx}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{P_{vy}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{P_{vz}}{\sigma_3}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипсоида напряжений – это геометрическое место концов вектора полного напряжения P_v на всём бесконечном множестве площадок, проходящих через исследуемую точку. Полуосями эллипсоида являются главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 1.20, а).

Следствия из этого геометрического образа:

1. Наибольшее из главных напряжений является одновременно

наибольшим из всех возможных значений напряжений полного напряжения на множестве площадок, проходящих через исследуемую точку.

2. Наименьшее из главных напряжений будет наименьшим среди множества значений полных напряжений.

3. При равенстве двух главных напряжений эллипсоид превращается в тело вращения, тогда каждая плоскость, проходящая через ось вращения, становится главной.

4. При равенстве трёх главных напряжений эллипсоид принимает форму сферы (рис. 1.20, б), и в исследуемой точке все плоскости являются главными.

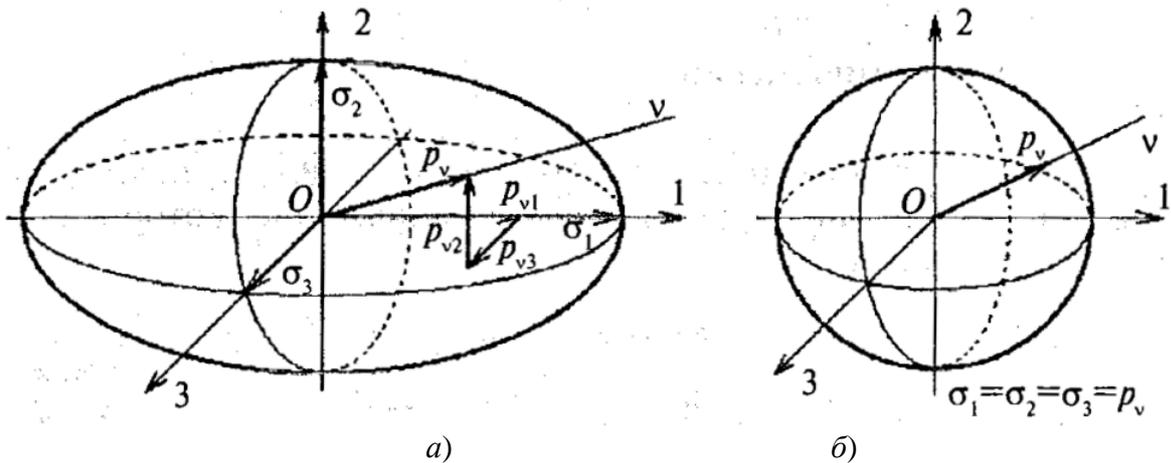


Рис. 1.20. Эллипсоид напряжений (а) и сферическое напряжённое состояние (б)

Исходя из количества действующих напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, возможны девять схем главных нормальных напряжений: линейные, плоские и объёмные (рис. 1.21).

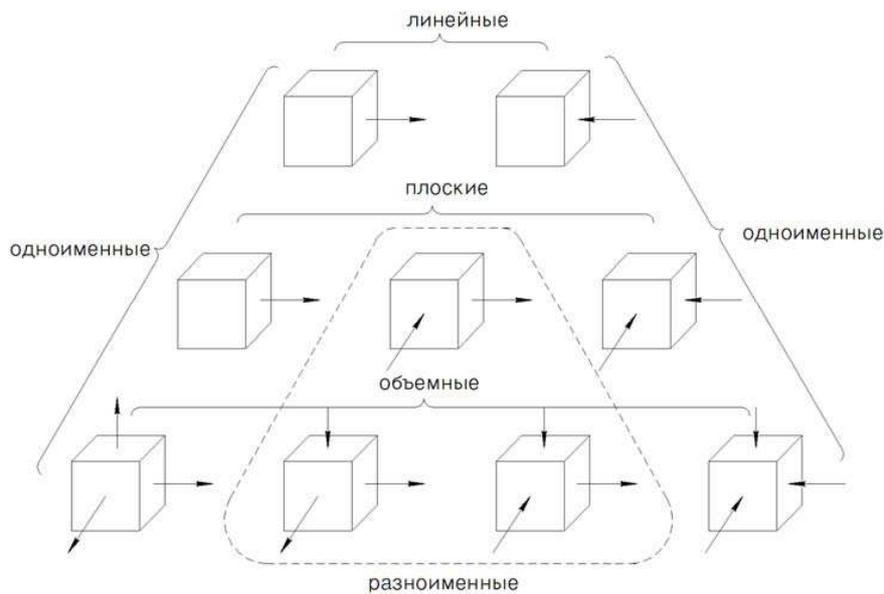


Рис. 1.21. Виды напряжённых состояний

Схемы представлены графически в виде кубиков, грани которых ориентированы в направлении действия главных напряжений. Наличие напряжения и его направление обозначаются стрелкой.

Если одно из главных нормальных напряжений равно нулю, то эллипсоид превращается в эллипс и объемное напряженное состояние преобразуется в плоское. Если два главных нормальных напряжения равны нулю, то эллипсоид превращается в отрезок прямой линии, что соответствует линейному напряженному состоянию. Схемы, имеющие напряжения одного знака, называют *одноименными*, а разных знаков – *разноименными*. Схемы дают графическое представление о наличии и знаке главных нормальных напряжений. Они являются по предложению С.И. Губкина классификатором всех видов напряженного состояния деформируемого тела.

От схем главных нормальных напряжений зависят пластичность деформируемого тела и его сопротивление деформированию (усилие деформирования). Пластичность металла всегда больше в схемах со сжимающими напряжениями, чем в схемах с растягивающими напряжениями. Наибольшим сопротивлением деформированию отличаются металлы в условиях деформирования при одноименных схемах. В условиях разноименных схем, а также линейной, сопротивление деформации снижается.

Схемы линейного напряженного состояния встречаются на практике редко. Схема линейного растяжения реализуется, например, при растяжении тела, длина которого значительно больше размеров в остальных двух измерениях (растяжение струны, канатов и т.п.). Плоская схема напряженного состояния с известным приближением может быть создана при растяжении тонкой пластины по контуру. Объемное напряженное состояние возникает почти при всех процессах обработки металлов давлением (прокатка, прессование, горячая штамповка, волочение).

1.6. Максимальные (главные) касательные напряжения

Максимальные (главные) касательные напряжения имеют большое значение в теории обработки металлов давлением. Ранее мы определили ориентацию главных площадок и главных нормальных, действующих на этих площадках. Касательные напряжения на них равны нулю. Во всех других направлениях касательные напряжения существуют и в зависимости от положения площадки будут различными по величине. Аналогично, из условия экстремума величины касательных напряжений, можно определить ориентацию площадок, на которых будут действовать максимальные касательные напряжения.

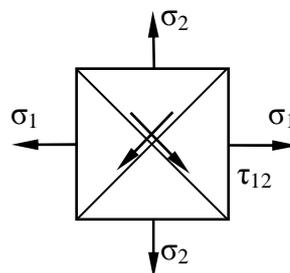
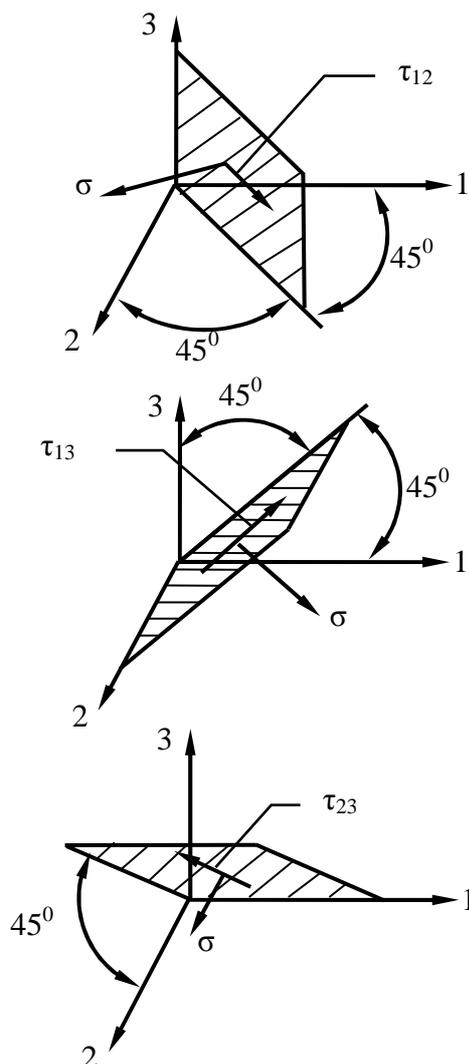
В каждой точке тела можно выделить такие три взаимноперпендикулярные площадки, которые являются биссектральными к главным координатным плоскостям, и на них будут действовать экстремальные по величине касательные напряжения, равные полуразностям главных нормальных напряжений (рис. 1.22).

Нормальные напряжения, действующие на площадках главных касательных, равны полусуммам главных нормальных напряжений.

Так как принято, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение τ_{13} равно алгебраической полуразности максимального и минимального главных нормальных напряжений:

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$



$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2};$$

$$\sigma = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

Рис. 1.22. Определение максимальных (главных) касательных напряжений

На этих площадках имеют место экстремальные деформации сдвига:

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

1.7. Понятие об октаэдрических напряжениях и интенсивности напряжений

Площадки, равнонаклонённые к главным осям (1, 2, 3), называют октаэдрическими, потому что они параллельны граням октаэдра (рис. 1.23).

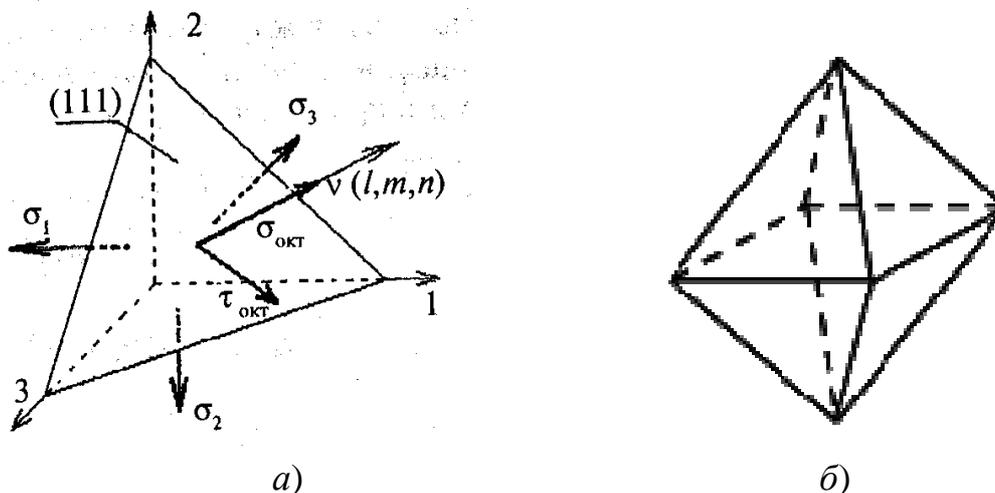


Рис. 1.23. Октаэдрическая площадка (а) октаэдр (б)

Для этих площадок направляющие косинусы равны:

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Действующие на октаэдрических площадках напряжения называют *октаэдрическими* и определяют по формулам:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{\text{ср}};$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned}$$

В теории пластичности оказалось удобным пользоваться величиной пропорциональной $\tau_{\text{окт}}$, которая называется *интенсивностью напряжений*:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \end{aligned}$$

σ_i характеризует степень развития напряжений в материале.

При простом растяжении ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$): $\sigma_i = \sigma_1 \cdot \tau_{\text{окт}}$ всегда меньше τ_{max} . Как показывают исследования: $\frac{\tau_{\text{окт}}}{\tau_{\text{max}}} = 0,816 \div 0,914$.

1.8. Понятие о шаровом тензоре и тензоре – девиаторе

Экспериментально установлено, что большинство твердых тел (даже так называемые хрупкие тела) противостоят без разрушения действию все-стороннего сжатия, т.е. напряженного состояния, вызывающего главным образом изменение объема тела. И наоборот, те же тела быстро разрушаются при сравнительно невысоких напряжениях, если схема напряженного состояния такова, что вызывает в основном изменение формы тела, а не его объема. Поэтому для анализа напряженного состояния разделяют тензор напряжений на две составляющих, на два слагаемых тензора, один из которых вызывает изменение объема, а другой – ту долю, которая вызывает изменение формы тела.

Напряженное состояние в любой точке деформированного тела можно представить в виде суммы двух напряженных состояний: равномерного всестороннего растяжения (сжатия) и второго напряженного состояния, равного разности между полным и приведенным выше (рис. 1.24).

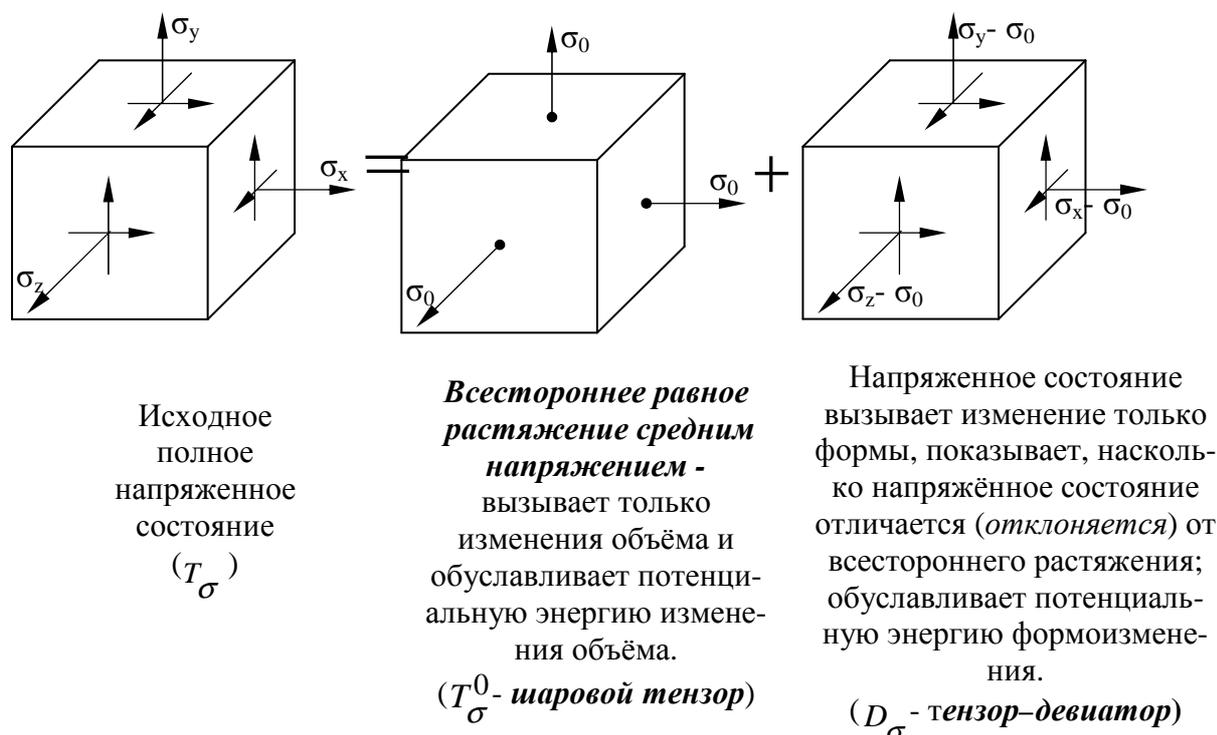


Рис. 1.24. Физический смысл шарового тензора и тензора-девиатора

Тензор напряжений раскладывается на два: шаровой тензор и тензор–девиатор:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma} .$$

$$T_{\sigma}^0 = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix};$$

$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}I_1$ – среднее напряжение, это также инварианта.

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} \text{ – тензор-девиатор.}$$

Deviator в переводе означает *отклонитель*, показывает, насколько напряжённое состояние отличается (*отклоняется*) от всестороннего растяжения.

Тензор-девиатор имеет также три инварианты. В них вместо $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, подставляются $\sigma_x - \sigma_0, \sigma_y - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0$.

1.9. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

При исследовании напряжённого состояния в точке мы пренебрегаем весьма малыми различиями напряжений на бесконечно близко расположенных параллельных площадках, а также объёмными силами, как малыми высшего порядка. Рассматривая равновесия элемента, эти малые усилия нужно учитывать.

Рассматриваем тело, находящееся в равновесии с внешними объёмными и поверхностными силами. Выделим в окрестности точки бесконечно малый параллелепипед с длинами ребер dx, dy, dz , параллельными осям координат (рис. 1.25, а) с гранями параллельными координатным осям.

Напряжения – функции координат, поэтому они получают приращение при переходе от грани к грани. На гранях показаны только те напряжения, которые параллельны оси X (рис. 1.25, б). Находим сумму проекций всех сил на ось X , учитывая объёмные силы (инерционные, гравитационные): $X(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z)$.

$$X dx dy dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dy dz - \tau_{zx} dy dz = 0$$

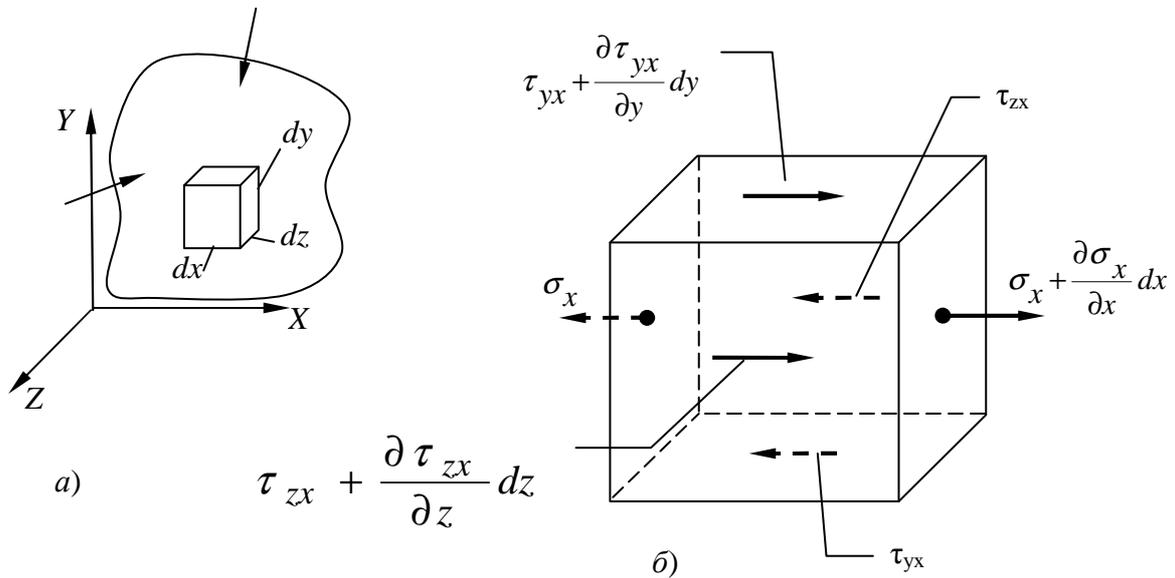


Рис. 1.25. Выделение элементарного параллелепипеда (а) и его уравнивание (б)

Упрощая это уравнения, а остальные, для осей Y, Z , записывая по аналогии, получим уравнения равновесия Навье:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases}$$

Закон парности касательных напряжений получим также из уравнений, рассматривая для удобства проекции элементарного параллелепипеда на координатные плоскости (рис. 1.26).

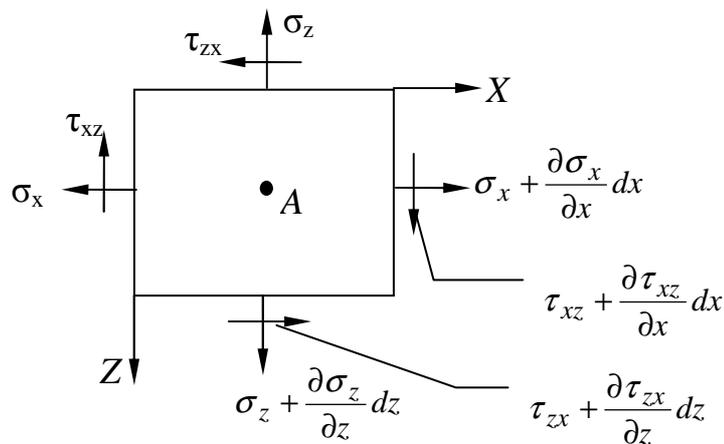


Рис. 1.26

$$\Sigma M_A = 0: \quad \tau_{zx} = \tau_{xz};$$

Аналогично получим: $\tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$

1.10. Диаграмма напряжений Мора

Диаграмма напряжений Мора дает наглядное графическое представление о совокупности векторов нормальных и касательных напряжений на наклонных площадках, построенных в системе главных осей. При построении диаграммы нормальные напряжения будем откладывать на ось абсцисс, а касательные по оси ординат. Нормальные напряжения в главных осях:

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.4)$$

$$\text{Полное напряжение: } P_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2. \quad (1.5)$$

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (1.6)$$

Получаем линейную относительно l^2 систему всех уравнений (1.4)-(1.6). Умножим обе части уравнения (1.4) на $\sigma_2 + \sigma_3$:

$$(\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_v = (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) (\sigma_2 + \sigma_3), \quad (1.7)$$

а уравнение (1.6) умножим на $\sigma_2 \sigma_3$:

$$\sigma_2 \sigma_3 (l^2 + m^2 + n^2) = \sigma_2 \sigma_3. \quad (1.8)$$

Из уравнения (1.4) почленно вычтем уравнение (1.7) и, прибавив почленно уравнение (1.8), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 + \tau_v^2 - (\sigma_2 + \sigma_3) \sigma_v + \sigma_2 \sigma_3 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \\ - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) (\sigma_2 + \sigma_3) &+ \sigma_2 \sigma_3 (l^2 + m^2 + n^2). \end{aligned}$$

Прибавляя к обеим частям полученного уравнения $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2$ после преобразования получим:

$$\left. \begin{aligned} \left[\sigma_v - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau_v^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + l^2 (\sigma_1 - \sigma_3) (\sigma_1 - \sigma_2), \\ \left[\sigma_v - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right]^2 + \tau_v^2 &= \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 + m^2 (\sigma_2 - \sigma_1) (\sigma_2 - \sigma_3), \\ \left[\sigma_v - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 + \tau_v^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_2) (\sigma_3 - \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Записанное уравнение (1.9) определяет окружности вида $(x-x_0)^2 + y^2 = R^2$. Их центры расположены на оси абсцисс и отстоят от начала координат на

расстоянии $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$, $\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$, $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ (рис. 1.27). В правой части уравнения (1.9) l , m , n – это изменяемые параметры, поэтому каждое из уравнений (1.9) – это уравнение концентрических окружностей с радиусами:

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + m^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

$$R_3 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

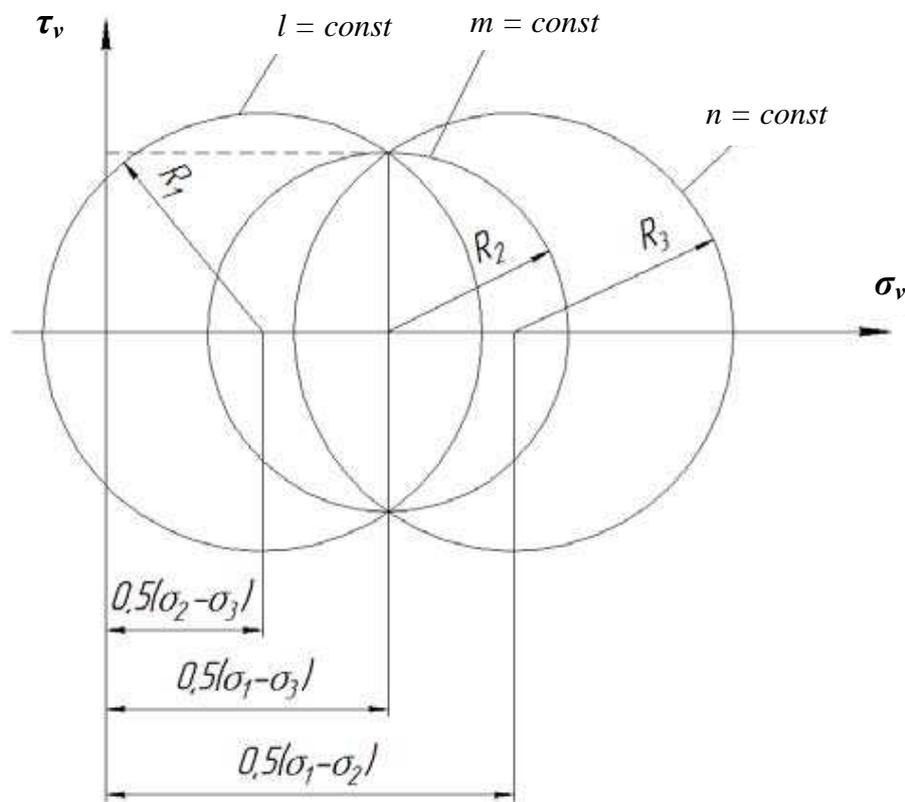


Рис. 1.27

Первое уравнение системы (1.9) определяет в виде окружностей геометрическое место точек σ_v и τ_v для заданного значения l . То же самое справедливо и для двух других уравнений системы. Для заданных значений направляющих косинусов l , m , n и главных нормальных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 величины σ_v и τ_v определяются точкой K на пересечении трех окружностей радиусами R_1 , R_2 , R_3 , при $l = m = n = 0$ радиусы окружностей равны:

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Как видно из первого и третьего уравнения системы (9), при увеличении l и m радиусы соответствующих окружностей увеличиваются. Это означает, что возможные пары значений σ_v и τ_v находятся или на окружностях радиуса R_1 или R_3 , или вне их, но не могут располагаться внутри. Если увеличивать m (второе уравнение системы (1.9)), то R_2 уменьшается и пары σ_v и τ_v находятся внутри окружности R_2 . Таким образом, заштрихованная область – это область значений σ_v и τ_v на произвольных наклонных площадках (рис. 1.28).

Из формулы (1.9) видно, что максимальные касательные напряжения численно равны радиусам кругов. При наложении на тело всестороннего равномерного давления радиусы окружностей не меняются и все построения смещаются относительно горизонтальной оси σ_v .

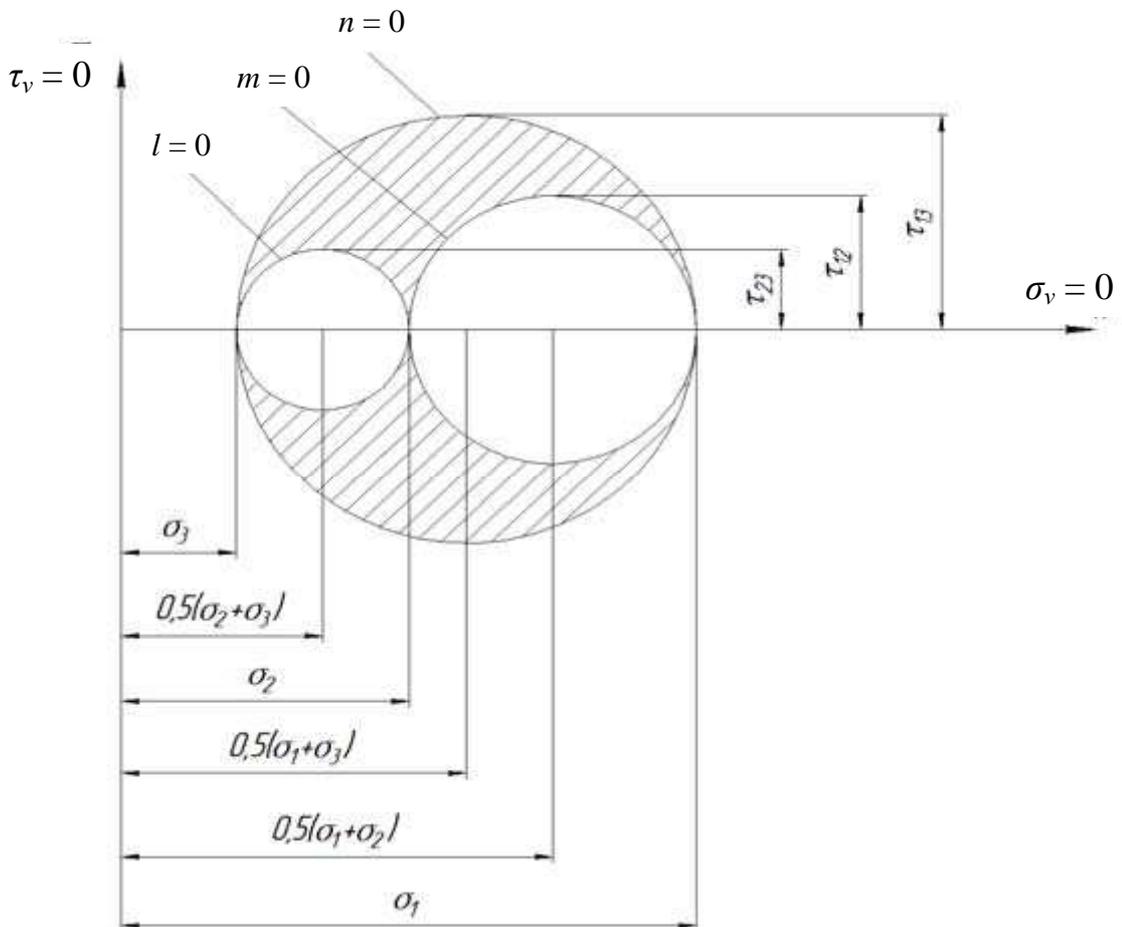


Рис. 1.28

Шаровой тензор напряжений отображается на диаграмме Мора окружностью нулевого радиуса (т.е. точкой), расположенной на расстоянии σ_{cp} от начала координат.

1.11. Примеры решения задач

Задача 1

Записать исходное кубическое уравнение для определения величины главных напряжений, если известны величины главных напряжений:

$$\sigma_1 = 2 \text{ МПа}; \sigma_2 = -1 \text{ МПа}; \sigma_3 = -2 \text{ МПа}.$$

Решение:

Общий вид кубического уравнения для определения величины главных напряжений:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0.$$

Задача сводится к отысканию инварианта тензора напряжений I_1 , I_2 , I_3 по известным главным напряжениям:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2 - 1 - 2 = -1 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + (-2) \times (2) = -4 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 2 \times (-1) \times (-2) = 4 \text{ МПа}.$$

$$\text{Ответ: } \sigma^3 + \sigma^2 - 4\sigma - 4 = 0$$

Задача 2

Известны проекции на главные координаты оси полного напряжения на наклонной площадке: $P_{vx} = 4$; $P_{vy} = -2\sqrt{2}$; $P_{vz} = 1$; и величины главных напряжений в рассматриваемой точке тела: $\sigma_1 = 5$; $\sigma_2 = -5$.

Определить величину σ_3 .

Замечание: в этой и последующих задачах размерности у напряжений не проставлены, предполагается, что они определены в МПа.

Решение:

Для главных координатных осей выражения для напряжений на наклонной площадке существенно упростятся: $P_{vx} = \sigma_1 l = 4$, откуда

$$\lambda = \frac{P_{vx}}{\sigma_1} = \frac{4}{5}, \quad P_{vy} = \sigma_2 m = -2\sqrt{2}, \quad \text{отсюда } m = \frac{P_{vy}}{\sigma_2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}, \quad P_{vz} = \sigma_3 n = 1; \text{ от-}$$

сюда $\sigma_3 = \frac{1}{n}$, а направляющий косинус n находим из соотношения:

$$n = \sqrt{1 - \lambda^2 - m^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25} - \frac{8}{25}} = \pm \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\sigma_3 = -5$ (выбор знака « - » обусловлен обязательным требованием: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Задача 3

По известному тензору напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 100\sqrt{3} & 100 & -100\sqrt{3} \\ 100 & 100\sqrt{2} & -100 \\ -100\sqrt{3} & -100 & 100\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

вычислить полное напряжение на площадке, нормальной оси y .

Решение:

Для заданной площадки направляющие косинусы будут равны: $m = 1$; $\lambda = n = 0$.

Проекция полного напряжения определяются с учетом величины направляющих косинусов:

$$P_{Vx} = \tau_{yx} \cdot 1 = 100 \times 1 = 100; \quad P_{Vy} = \sigma_y m = 100\sqrt{2}; \quad P_{Vz} = \tau_{yz} m = -100;$$

$$P_V = \sqrt{P_{Vx}^2 + P_{Vy}^2 + P_{Vz}^2} = \sqrt{100^2 + 2 \cdot 100^2 + 100^2} = 200.$$

Ответ: $P_V = 200$.

Задача 4

По заданным значениям тензора напряжений и направляющих косинусов найти проекцию P_{Vz} вектора интенсивности поверхностных сил P_V :

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -900 & 1000 & 1000 \\ 1000 & 450 & 0 \\ 1000 & 0 & 900 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} l = m = 0; \\ n = 1 \end{matrix}$$

Решение:

$$P_{Vz} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = 900.$$

Ответ: $P_{Vz} = 900$.

Задача 5

Уравнение эллипсоида Ламе имеет вид:

$$49P_{Vx}^2 + 0,25P_{Vy}^2 + 0,04P_{Vz}^2 = 10^{-2}.$$

Требуется определить значения главных напряжений.

Решение:

Эллипсоид напряжений или эллипсоид Ламе – это геометрическое место концов вектора полного напряжения в рассматриваемой точке тела. Полуосями эллипсоида являются главные напряжения. Данный геометрический образ позволяет наглядно понять следующие свойства главных напряжений и главных площадок:

- наибольшее σ_1 и наименьшее σ_3 из главных напряжений являются наибольшим и наименьшим из возможных значений полного напряжения на множестве площадок, проходящих через исследуемую точку тела;
- при равенстве двух главных напряжений эллипсоид принимает форму

тела вращения, тогда каждая плоскость, проходящая через ось вращения, становится главной;

- при равенстве трех главных напряжений эллипсоид принимает форму сферы, и в исследуемой точке все плоскости являются главными.

Решение данной задачи сводится к приведению уравнения эллипсоида к каноническому виду:

$$\left(\frac{P_{vx}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{P_{vy}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{P_{vz}}{\sigma_3}\right)^2 = 1,$$

или, используя заданные значения,

$$\left(\frac{P_{vx}}{70^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{P_{vy}}{5^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{P_{vz}}{2^{-1}}\right)^2 = 1;$$

$$\sigma_1 = 1/70; \sigma_2 = -0,2; \sigma_3 = -0,5.$$

Отрицательные знаки σ_2, σ_3 обусловлены тем, что необходимо обязательно соблюсти соотношения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Ответ: $\sigma_1 = 1/70; \sigma_2 = -0,2; \sigma_3 = -0,5$.

Задача 6

Чему равны касательные напряжения в точке тела, если известно, что $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma; \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \neq 0$?

Решение:

Эллипсоид напряжений в этом случае превращается в сферу, и все площадки, проходящие через данную точку, будут главными, следовательно, касательные напряжения будут равны нулю.

Ответ: $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Задача 7

По заданному тензору напряжений найти проекции объемных сил.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2y^2 + z & -4yz \\ 2y^2 + z & 8z^3 & -7xy \\ -4yz & -7xy & -7zx \end{pmatrix}$$

Решение:

Используем уравнение равновесия:

$$-X = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 2y^2 + 4y - 4y = 2y^2;$$

$$-Y = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0;$$

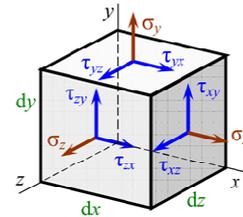
$$-Z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 - 7x - 7x = -14x.$$

Ответ: $X = -2y^2$; $Y = 0$; $Z = 14x$.

Задача 8

В окрестности некоторой точки A заданы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадях, т.е. известен тензор напряжения T_σ :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$



Требуется:

1. определить полное, нормальное, и касательное напряжения, действующие на произвольной площадке, внешняя нормаль к которой задается направляющими косинусами l, m, n ;
2. вычислить главные напряжения;
3. определить положение главных площадок;
4. найти наибольшие касательные напряжения;
5. вычислить интенсивность напряжений.

Дано: $\sigma_x = -100$ МПа; $\sigma_y/\sigma_x = 0,8$; $\sigma_z/\sigma_x = 1,2$; $\tau_{xy}/\sigma_x = -0,8$; $\tau_{yz}/\sigma_x = -0,9$; $\tau_{zx}/\sigma_x = -0,9$; $l/m = 0,714$; $n/m = 0,729$.

Решение:

Из заданных пропорций вычисляем необходимые компоненты напряжений:

$$\sigma_x = -100 \text{ МПа}; \sigma_y = -80 \text{ МПа}; \sigma_z = -120 \text{ МПа}; \\ \tau_{xy} = 80 \text{ МПа}; \tau_{yz} = 90 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 90 \text{ МПа}.$$

Направляющие косинусы нормали определяем по заданным пропорциям, используя уравнение, связывающее величины направляющих косинусов:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1; \quad l = 0,714m; \quad n = 0,729m.$$

$$(0,714m)^2 + m^2 + (0,729m)^2 = 1. \quad m = 0,7; \quad l = 0,5; \quad n = 0,51.$$

Направляющие косинусы внешней нормали ν к наклонной площадке должны удовлетворять уравнению:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \\ 0,5^2 + 0,7^2 + 0,51^2 = 1.$$

Проверка выполняется.

Компоненты полного напряжения P_v , действующего в наклонной площадке (см. рис. 1.14), определяются из уравнений равновесия элементарного тетраэдра (1.1):

$$\begin{aligned} P_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = -100 \times 0,5 + 80 \times 0,7 + 90 \times 0,51 = 51,9 \text{ МПа}; \\ P_{vy} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 80 \times 0,5 - 80 \times 0,7 + 90 \times 0,51 = 29,9 \text{ МПа}; \\ P_{vz} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 90 \times 0,5 + 90 \times 0,7 - 120 \times 0,51 = 46,8 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

Полное напряжение P_v , действующее на наклонной площадке:

$$P_v = \sqrt{P_{vx}^2 + P_{vy}^2 + P_{vz}^2} = \sqrt{51,9^2 + 29,9^2 + 46,8^2} = 76,01 \text{ МПа} .$$

Проецируя компоненты P_{vx} , P_{vy} , P_{vz} на нормаль ν , получим нормальное напряжение σ_ν на наклонной площадке:

$$\sigma_\nu = P_{vx} l + P_{vy} m + P_{vz} n = 51,9 \cdot 0,5 + 29,9 \cdot 0,7 + 46,8 \cdot 0,51 = 70,75 \text{ МПа} .$$

Касательное напряжение на наклонной площадке:

$$\tau_\nu = \sqrt{P_v^2 - \sigma_\nu^2} = \sqrt{76,01^2 - 70,75^2} = 27,78 \text{ МПа} .$$

Вычисляем главные напряжения. Главные напряжения находим, решая кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 , \quad (1.10)$$

где коэффициенты являются инвариантами преобразования координат:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 - 80 - 120 = -300 \text{ МПа}; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -100 \cdot (-80) + (-80) \cdot (-120) + \\ &\quad + (-120) \cdot 100 - 80^2 - 90^2 - 90^2 = 7 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 = (-100) \cdot (-80) \cdot (-120) + \\ &\quad + 2 \cdot 80 \cdot 90 \cdot 90 - (-100) \cdot 90^2 - (-80) \cdot 90^2 - (-120) \cdot 80^2 = 2562 \cdot 10^3 \text{ МПа}^3. \end{aligned}$$

Кубическое уравнение (1.10) подстановкой: $\sigma = y + \frac{I_1}{3}$

приводится к виду:

$$y^3 + py + g = 0 , \quad (1.11)$$

где новые коэффициенты соответственно равны:

$$p = I_2 - \frac{I_1^2}{3} = 7000 - \frac{(-300)^2}{3} = -23000 \text{ МПа}^2;$$

$$g = -\frac{2}{27}I_1^3 + \frac{1}{3}I_1I_2 - I_3 = (-2/27) \times (-300)^3 + (1/3) \times (-300) \times 7000 - 2562000 = \\ = 1262000 \text{ МПа}^3.$$

Корни кубического уравнения (1.11) выражаем через вспомогательный угол φ , определяемый из равенства: $\cos \varphi = \frac{g}{2r^3}$, где $r = \pm 0,5774 \sqrt{|p|}$ (знак r должен совпадать со знаком g , следовательно, $\cos \varphi > 0$).

Определяем эти величины: $r = -0,5774 \sqrt{23000} = -87,56 \text{ МПа}$,

$$\cos \varphi = \frac{1262000}{2 \cdot (87,56)^3} = 0,94; \varphi = 20^\circ; \frac{\varphi}{3} = 6,67^\circ; \cos \frac{\varphi}{3} = 0,993.$$

Корни кубического уравнения (1.11) определяем из равенств:

$$y_1 = -2r \cos \frac{\varphi}{3} = -2 \cdot 0,993 \cdot (-87,6) = 174 \text{ МПа};$$

$$y_2 = 2r \cos(60^\circ - \frac{\varphi}{3}) = 2 \cdot (-87,6) \cdot 0,597 = -104,58 \text{ МПа};$$

$$y_3 = 2r \cos(60^\circ + \frac{\varphi}{3}) = 2 \cdot (-87,6) \cdot 0,396 = -69,37 \text{ МПа}.$$

Проверка правильности решения уравнения (1.11):

$$y_1 + y_2 + y_3 = 174 - 104,6 - 69,37 = 0.$$

Главные напряжения:

$$\sigma_I = y_1 + \frac{I_1}{3} = 174 - 100 = 74 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = y_2 + \frac{I_1}{3} = -104,58 - 100 = -204,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = y_3 + \frac{I_1}{3} = -69,37 - 100 = -169,4 \text{ МПа}.$$

Этим трем главным напряжениям присваиваем обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, где $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$:

$$\sigma_1 = 74 \text{ МПа}; \sigma_2 = -169,4 \text{ МПа}; \sigma_3 = -204,6 \text{ МПа}.$$

Для контроля правильности решения кубического уравнения (1.10) используем инвариантность коэффициентов I_1, I_2, I_3 :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 74 - 169,4 - 204,6 = -300 \text{ МПа}.$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 74 \cdot (-169,4) - 169,4 \cdot (-204,6) - 204,6 \cdot 74 = 6996 \approx \\ \approx 7000 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 74 \cdot (-169,4) \cdot (-204,6) = 2562000 \text{ МПа}^3.$$

Небольшие отклонения в значениях коэффициентов I_2, I_3 по сравнению с первоначальными их значениями в системе координатных осей X, Y, Z (отклонение не превышает 0,06%) объясняется ограничением числа значащих цифр и их округлением при расчёте.

Определяем положение главных площадок, в которых действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Направляющие косинусы внешней нормали к главной площадке определяются из системы трёх алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0; \\ \tau_{yx}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{zy}n_i = 0; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \end{cases}$$

Решая последовательно три раза эту систему уравнений ($i = 1, 2, 3$), подставляя, соответственно, вместо σ_i значения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, определяем направляющие косинусы внешней нормали к каждой главной площадке (все эти три главные площадки взаимно перпендикулярны).

Определяем положение главной площадки, в которой действует главное напряжение $\sigma_1 = 74$ МПа:

$$\begin{cases} (-100 - 74)l_1 + 80m_1 + 90n_1 = 0; \\ 80l_1 + (-80 - 74)m_1 + 90n_1 = 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \end{cases}$$

В результате решения системы трёх уравнений получаем:

$$l_1 = 0,566; m_1 = 0,615; n_1 = 0,548.$$

Аналогично находим направляющие косинусы внешних нормалей ко второй и третьей главным площадкам, в которых действуют главные напряжения $\sigma_2 = -169,4$ МПа, $\sigma_3 = -204,6$ МПа:

$$\begin{cases} (-100 + 169,4)l_2 + 80m_2 + 90n_2 = 0; \\ 80l_2 + (-80 + 169,4)m_2 + 90n_2 = 0; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1. \end{cases}$$

$$l_2 = 0,655; m_2 = -0,74; n_2 = -0,156.$$

$$\begin{cases} (-100 + 204,6)l_3 + 80m_3 + 90n_3 = 0; \\ 80l_3 + (-80 + 204,6)m_3 + 90n_3 = 0; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1. \end{cases}$$

$$l_3 = -0,497 ; m_3 = -0,27 ; n_3 = 0,82 .$$

Контролем правильности вычисления направляющих косинусов являются условия перпендикулярности главных нормалей (главных площадок):

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0;$$

$$0,566 \times 0,655 + 0,615 \times (-0,74) + 0,548 \times 0,156 = 0,00111 \approx 0;$$

$$l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0;$$

$$0,655 \times (-0,497) + 0,74 \times 0,27 + 0,156 \times 0,82 = 0,00218 \approx 0;$$

$$l_1l_3 + m_1m_3 + n_1n_3 = 0;$$

$$0,566 \times (-0,497) + 0,615 \times (-0,27) + 0,548 \times 0,82 = 0,002 \approx 0.$$

Любое одно из этих трёх условий взаимной перпендикулярности главных площадок является следствием двух других, поэтому достаточно проверить только два любых условия.

Покажем в аксонометрии расположение трёх нормалей. Для этого откладываем на осях X, Y, Z соответствующие величины направляющих косинусов, выдерживая масштаб. Порядок построения показан на рисунке 1.29.

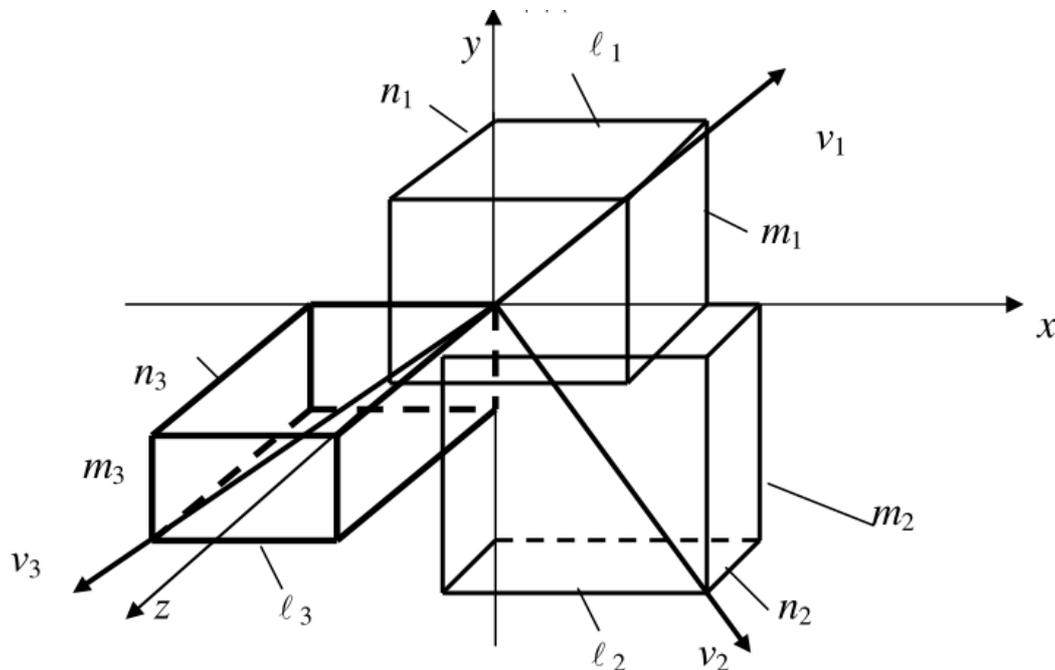


Рис. 1.29. Расположение нормалей к главным площадкам

Находим наибольшее касательное напряжение в точке A . Наибольшее касательное напряжение действует на площадке, делящей пополам угол

между первой и третьей главными площадками, т.е. на площадке, равнонаклоненной к главным площадкам, на которых действуют максимальное и минимальное из главных напряжений. Значение его определяется по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{74 + 204,6}{2} = 139,3 \text{ МПа.}$$

Вычисляем октаэдрические напряжения. Октаэдрическая площадка равно наклонена к главным площадкам. Направляющие косинусы для такой площадки относительно главных осей напряжённого состояния в точке равны между собой и составляют: $l = m = n$. Учитывая формулу:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

находим $l = m = n = 0,577$.

Полное напряжение на октаэдрической площадке

$$P_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(74^2 + 169,4^2 + 204,6^2)} = 159,2 \text{ МПа};$$

Нормальное напряжение на октаэдрической площадке:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(74 - 169,4 - 204,6) = -100 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение на октаэдрической площадке:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(74 + 169,4)^2 + (-169,4 + 204,6)^2 + (-204,6 - 74)^2} = 123,8 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Интенсивность напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \frac{3}{\sqrt{2}} 123,8 = 262,7 \text{ МПа}; \\ \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(74 + 169,4)^2 + (-169,4 + 204,6)^2 + (-204,6 - 74)^2} = \\ &= 262,7 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Проверку правильности определения октаэдрических напряжений осуществляем по формуле:

$$P_{\text{окт}}^2 = \sigma_{\text{окт}}^2 + \tau_{\text{окт}}^2;$$

Подставляя численные значения, получим:

$$159,2^2 = (-100)^2 + 123,8^2; \quad 25336 = 25336 \text{ МПа}^2.$$

В теории пластичности октаэдрическое касательное напряжение является основным, определяющим характер развития пластических деформаций. Исследования показывают, что $\tau_{\text{окт}}$ в точке близко по значению к

наибольшему касательному напряжению для той же точки и находится в пределах:

$$0,942 > \tau_{\text{окт}} / \tau_{\text{max}} > 0,816.$$

Для рассматриваемого примера это отношение равно:

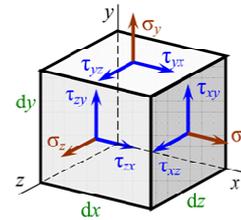
$$\frac{\tau_{\text{окт}}}{\tau_{\text{max}}} = \frac{123,8}{139,27} = 0,889.$$

1.12. Задание и варианты к расчётной работе «Исследование напряженного состояния в точке тела»

Задание.

В окрестности некоторой точки A заданы напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадях, т.е. известен тензор напряжения T_{σ} :

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$



Требуется:

1. определить полное, нормальное и касательное напряжения, действующие на произвольной площадке, внешняя нормаль к которой задается направляющими косинусами l, m, n ;
2. вычислить главные напряжения;
3. определить положение главных площадок;
4. найти наибольшие касательные напряжения;
5. вычислить интенсивность напряжений.

Исходные данные выбираются из таблицы 1.1 в соответствии с порядковым номером фамилии в списке группы.

Таблица 1.1. Исходные данные к заданию «Исследование напряженного состояния в точке тела»

№ варианта	σ_x , МПа	σ_y/σ_x	σ_z/σ_x	τ_{xy}/σ_x	τ_{yx}/σ_x	τ_{zx}/σ_x	λ/m	n/m
1	2	3	3	5	6	7	8	9
1	50	4	3	2	1	0	1,0	2,0
2	50	-4	3	-2	1	2	1,1	1,9
3	50	3	-2	2	2	-1	1,2	1,8
4	50	4	-3	-2	1	1	1,3	1,8
5	50	2	-3	-2	-1	1	1,4	1,6
6	60	3	2	1	2	1	1,5	1,5
7	60	2	3	2	0	2	1,6	1,4
8	60	-3	0	1	0	-2	1,7	1,3
9	60	-3	2	1	2	1	1,8	1,2
10	60	4	3	2	1,5	1	1,9	1,1
11	70	3	2	2	1	2	2,0	1,0
12	70	-3	-2	2	0	2	2,1	1,1

продолжение таблицы 1.1

13	70	3	1	1,5	0	2	2,2	1,2
14	70	2	3	2	1,5	1,5	2,3	1,3
15	70	2,5	3,5	1,5	0	2	2,4	1,4
16	80	3	2	2	2	0	2,5	1,5
17	80	0	1,5	2	-2	0	2,6	1,6
18	80	3	2	-1	-2	-2	2,7	1,7
19	80	3	-2	-1	-1	1	2,8	1,8
20	80	3	2	1	1	1	2,9	1,9
21	90	2	1	1	0	1	3,0	2,0
22	90	2	1	2	0	1	1,0	2,1
23	90	2	2	2	-1	2	1,2	2,2
24	90	2	2	2	-1	-1	1,4	2,3
25	90	2	2	2	2	2	1,6	2,4
26	100	2	1,5	-2	3	-2	1,8	2,5
27	100	2,5	1,5	2	3	-2	2,0	2,6
28	100	2	2	-2	-3	-2	2,2	2,7
29	100	1,5	2,5	1	2	1	2,4	2,8
30	100	0	2	0	1	2	2,6	3,0

2. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

2.1. Перемещения и деформации. Тензор деформации

Термин деформация (от латинского слова «*deformation*») означает искажение размеров и формы тела за счет относительного изменения положения его материальных частиц. Исследуем деформацию тела. Для её определения необходимо сравнить положения точек тела до и после нагружения.

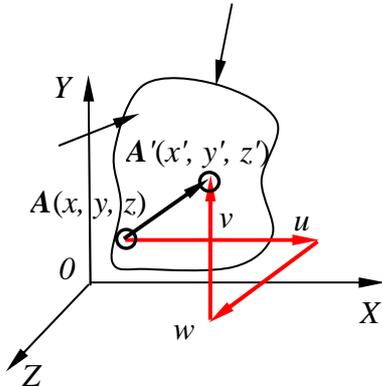


Рис. 2.1

Под действием внешних нагрузок все материальные точки деформируемого тела перемещаются в пространстве и меняется их взаимное положение. Например, некоторая точка A в исходном недеформированном состоянии имела координаты x, y, z . После деформации точка заняла положение A' с координатами $(x' = x + u; y' = y + v; z' = z + w)$, где u, v, w – проекции вектора перемещения AA' точки A на оси x, y, z (рис. 2.1).

Различают два вида перемещения:

- перемещение всего тела как единого целого без его деформации, т.е. как абсолютно твёрдого тела. Эти перемещения изучаются в теоретической механике, и нами рассматриваются;
- перемещение, связанное с деформированием тела.

Считаем, что тело закреплено так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твёрдое тело.

Перемещения u, v, w являются функциями координат и определяют поле перемещений деформируемого тела:

$$u = u(x, y, z); v = v(x, y, z); w = w(x, y, z).$$

В силу сплошности тела будем предполагать, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по x, y, z непрерывны, а компоненты перемещения малы по сравнению с основными размерами тела.

Рассмотрим поведение элементарного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz , параллельными осям координат, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки A . В результате деформации в общем случае этот параллелепипед в окрестности точки A' изменит свою форму и размеры, то есть будут искажаться первоначально

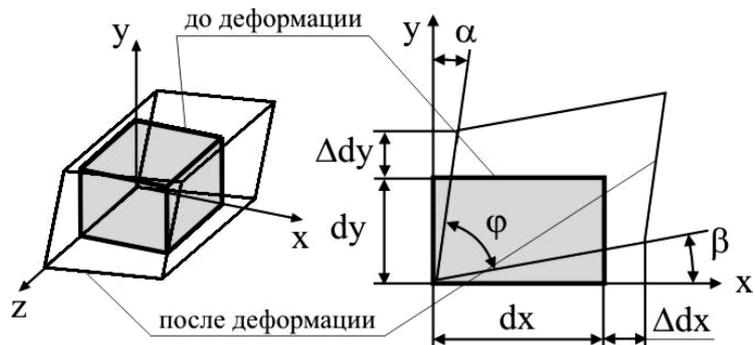


Рис. 2.2

прямые углы между гранями и изменяться длины их ребер (рис. 2.2).

Отношение изменения длины ребра параллелепипеда к первоначальной длине ребра определяет относительную линейную деформацию (ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z) элемента вдоль соответствующей оси:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \quad \epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \quad \epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Индекс в обозначении деформации указывает ось, в направлении которой происходит удлинение (укорочение) длины ребра (рис. 2.3). Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными – укорочению. Эти деформации вызывают нормальные напряжения растяжения (сжатия). Линейные деформации приводят к изменению объема и формы.

Искажение первоначально прямого угла между ребрами элемента в плоскостях его граней определяет угол сдвига или угловую деформацию в соответствующей плоскости, например, для плоскости xu (см. рис. 2.2) $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$. Если угол $\varphi = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ – острый, то угол сдвига считается положительным.

Угловые деформации обозначаются через γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} . Первый индекс указывает направление оси, параллельно которой ребро находилось в исходном состоянии, а второй – оси, по направлению к которой повернулось ребро. Величина деформаций определяется углом между направлением ребер в исходном положении и после деформации. Они приводят к изменению формы тела. Угловые деформации называют иногда деформациями сдвига. Индексы указывают, в какой плоскости появляется угол сдвига. Угловые деформации считаются положительными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями параллелепипеда. В противном случае они отрицательные.

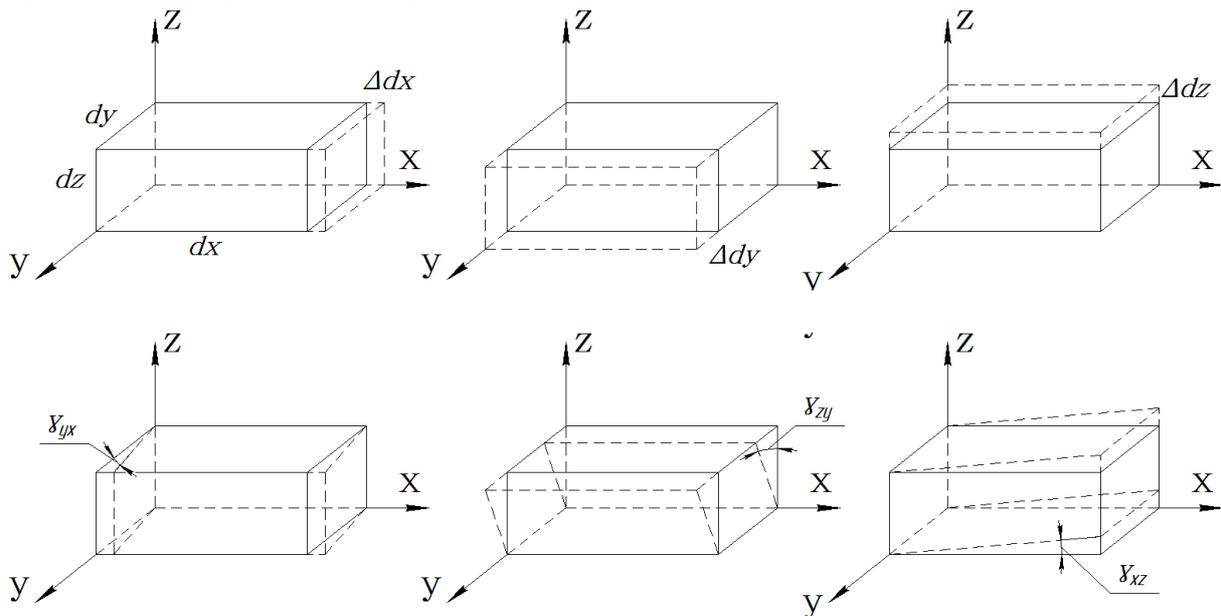
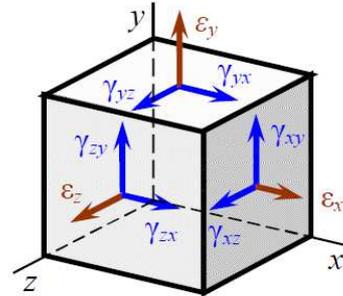


Рис. 2.3. Компоненты деформации в точке тела

Рассмотренные выше деформации являются относительными, безразмерными и малыми по сравнению с единицей.

Стягивая параллелепипед в точку, можно принять, что рассмотренные шесть компонентов деформации описывают деформированное состояние в исследуемой точке, которое можно описать полевым тензором бесконечно малых деформаций второго ранга:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$



Сдвиг можно задавать поворотом одного из ребер (рис. 2.4, а, б), но можно тот же сдвиг задать поворотом одного из ребер (рис. 2.4, в).

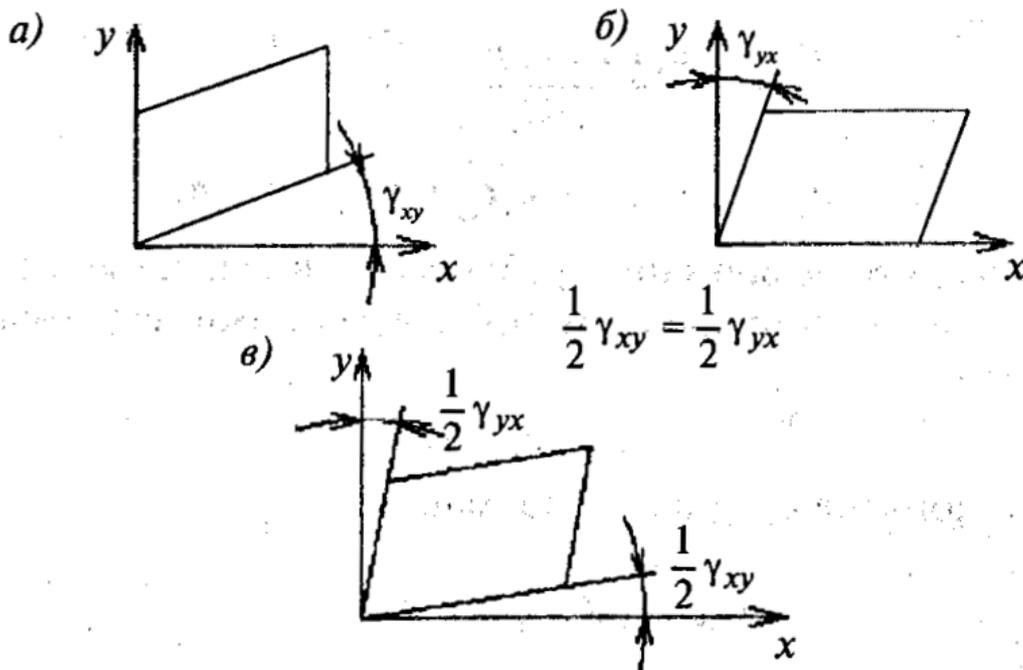


Рис. 2.4. Сдвиги в плоскости xOy в результате деформации

С целью описания деформированного состояния симметричным тензором деформаций (таким же симметричным относительно диагонали, каким является тензор напряжений) принят именно последний способ задания сдвигов.

Тензор деформаций полностью определяет деформированное состояние в исследуемой точке тела.

Между теорией напряжений и теорией деформаций существует математическая аналогия: все формулы теории деформации можно получить из соответствующих формул теории напряжений, заменяя нормальные

напряжения линейными деформациями, а касательные напряжения – половинами угловых деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_x &\rightarrow \varepsilon_x; & \tau_{xy} &\rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2}; \\ \sigma_y &\rightarrow \varepsilon_y; & \tau_{yz} &\rightarrow \frac{\gamma_{yz}}{2}; \\ \sigma_z &\rightarrow \varepsilon_z; & \tau_{zx} &\rightarrow \frac{\gamma_{zx}}{2}. \end{aligned}$$

Можно сказать, что при переходе от одной системы координат к другой компоненты деформации изменяются в соответствии с законом, свойственным для компонентов симметричного тензора второго ранга.

Так, линейная деформация по произвольному направлению v , заданному направляющими косинусами l, m, n , определяется по тем же формулам, что и для напряжений:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl.$$

2.2. Геометрические уравнения (Уравнения Коши)

Разница в значениях перемещений различных точек тела вызывают его деформирование. Бесконечно малый параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz , вырезанный из упругого тела около произвольной т. A , вследствие различных перемещений его точек деформируется таким образом, что изменяется длина его рёбер и искажаются первоначально прямые углы между гранями. Найдем зависимости между компонентами перемещений u, v, w и компонентами деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Для их вывода будем считать, что поле перемещений задано. Выделим для этого в деформируемом теле около произвольной т. A бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , параллельными координатным осям x, y, z . Рассмотрим проекцию этого параллелепипеда на координатную плоскость ZOX (рис. 2.5).

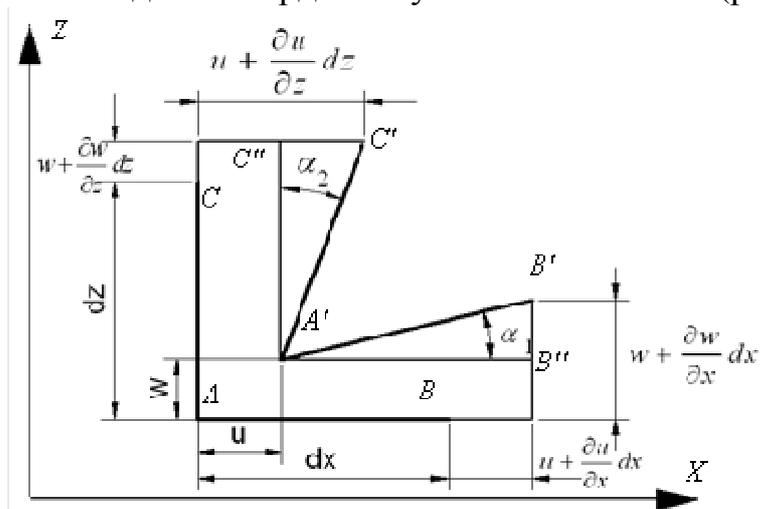


Рис. 2.5

Рассмотрим два ребра параллелепипеда AB и AC , параллельные осям x и z , соответственно. Положения точек: ABC – до деформации; $A'B'C'$ – после деформации (см. рис. 2.5).

Точка A получает перемещения u, v, w .

Точка B получает перемещения $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$.

Точка C получает перемещения $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$.

Длина проекции ребра AB на ось x после деформирования:

$$A'B'' = dx - u + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Проекция абсолютного удлинения вдоль оси x :

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси x : $\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Это линейная деформация по направлению оси x .

Аналогично, получим: $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$.

Итак, линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в том же направлении.

Рассмотрим изменение углов между рёбрами параллелепипеда (см. рис. 2.5). Тангенс угла поворота ребра AB в плоскости xOz :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) - w}{dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

Рассматриваем только малые деформации, поэтому:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1 \text{ и } 1 + \varepsilon_x \approx 1. \text{ Тогда } \alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \text{ аналогично } \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Угол сдвига в плоскости xOz , т.е. искажение прямого угла BAC , называется *угловой деформацией*:

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

аналогично получим: $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$.

Итак, угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.

Полученные шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения и называют геометрические соотношения (уравнения Коши):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Правило знаков:

1. Линейные деформации положительны при удлинениях в соответствующих направлениях.
2. Угловые деформации положительны при уменьшении углов между положительными направлениями координатных осей.

2.3. Уравнения совместности деформаций (Сен-Венана)

Согласно принятой гипотезе о сплошности строения тела, тело до деформации, в процессе деформации и после остается сплошным (без пустот, разрывов, трещин). Компоненты деформаций произвольными быть не могут, они должны быть определенным образом связаны между собой.

Если известны три компонента непрерывного поля перемещений u , v , w , то по ним шесть компонент деформации ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} однозначно определяются из шести уравнений Коши (2.1) простым дифференцированием.

Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть компонент деформаций, то заранее нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений. Уравнений Коши – шесть, а неизвестных перемещений – три. Решение будет неоднозначным. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются совместными деформациями. В противном случае деформации называются несовместными.

Для того чтобы деформации были совместными, они должны быть взаимосвязаны некоторыми соотношениями, которые называются уравнениями совместности деформаций. Рассмотрим это. На рисунке 2.6, *а* показан разрез тела, разбитого на элементарные параллелепипеды системой взаимно перпендикулярных плоскостей, до деформации. Зададим в теле поле деформаций ε_x , ε_y . В результате ребра dx , dy получают некоторые удлинения $(1 + \varepsilon_x)dx$, $(1 + \varepsilon_y)dy$, соответственно. Тело деформируется, как это показано на рисунке 2.6, *б*. При этом возникают углы сдвига как изменения прямых углов, зависящие от компонент ε_x , ε_y . Очевидно, наоборот, задавая γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} в непрерывно деформируемом теле, будем иметь зависящие от них линейные деформации ε_x , ε_y . В случае произвольного и независимого задания

удлинения ребер и углов сдвига деформируемые элементы не удастся сложить в сплошное тело.

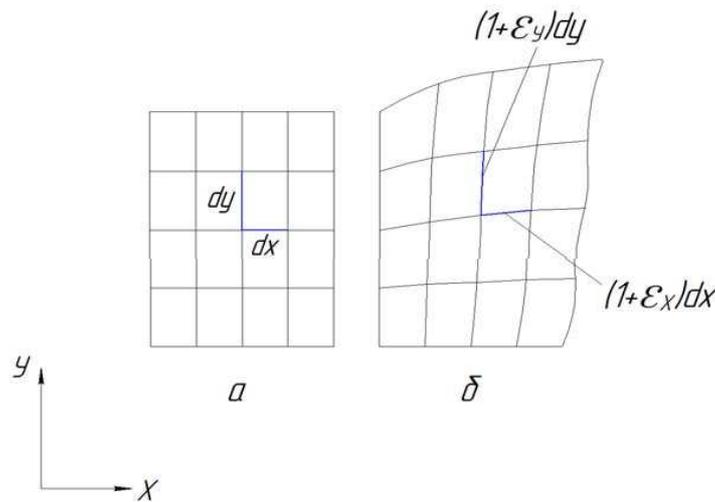


Рис. 2.6

Для вывода первой группы уравнений совместности деформаций исключим из геометрических уравнений компоненты перемещения.

Первое уравнение Коши дважды проинтегрируем по y :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}.$$

А второе уравнение – дважды по x : $\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$,

результаты сложим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично для деформаций в двух других координатных плоскостях и, обобщая, получим первую группу уравнений совместности деформаций:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) показывают, что если заданы две линейные деформации во взаимно перпендикулярных направлениях, то угловую деформацию в плоскости этих линейных деформаций нельзя задать произвольно.

Трёх уравнений (2.2) недостаточно для обеспечения однозначности пе-

ремещений, т.к. они получены дифференцированием. При дифференцировании порядок дифференциального уравнения повышается и возможно появление новых решений, не удовлетворяющих первоначальному уравнению. Чтобы не получалось неприемлемых решений, необходимо иметь дополнительные условия.

Продифференцируем три последних уравнения Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Сложим две первые строки и вычитаем третью:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}.$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Продифференцируем это выражение ещё раз по y и учтем, что эти уравнения свидетельствуют о том, что если заданы три угловые деформации, то линейные деформации не могут быть заданы произвольно.

Уравнения (2.2), (2.3) – уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана.

Смысл этих уравнений можно объяснить геометрически. Представим тело разрезанным на малые параллелепипеды. Если каждый из них получает произвольные деформации, то из деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить первоначальное сплошное твёрдое тело (см. рис. 2.6).

Эти уравнения устанавливают такие зависимости между деформациями, чтобы тело после деформирования осталось сплошным.

2.4. Главные деформации. Схемы главных деформаций

По аналогии с теорией напряженного состояния можно показать, что в любой точке тела существуют три взаимно перпендикулярных направления, по которым тело испытывает только деформации удлинения или укорочения, а угловые деформации равны нулю. Эти линейные деформации называются главными деформациями и обозначаются через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. При этом $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Направления трёх главных деформаций взаимно перпендикулярны и называются *главными осями деформаций*. Их свойство – по их направлению возникает только растягивание или сжатие без сдвигов.

Главные деформации определяются из кубического уравнения:

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 + I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0.$$

Инварианты деформированного состояния:

$$I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1;$$

$$I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

В главных осях тензор деформаций имеет вид: $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$.

Из анализа деформаций в главных осях следует, что всякая деформация может быть осуществлена простыми растяжениями в трех главных направлениях.

Подобно главным напряжениям сдвига главные деформации сдвига имеют место по взаимно перпендикулярным площадкам, наклоненным под углом 45° к двум плоскостям координат $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и проходящим через одну из осей. Главные деформации сдвига связаны с главными деформациями удлинения соотношениями: $\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $\gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$; $\gamma_{13} = \gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$.

При обработке металлов давлением различают три схемы главных деформаций, предложенные С.И. Губкиным (рис. 2.7).

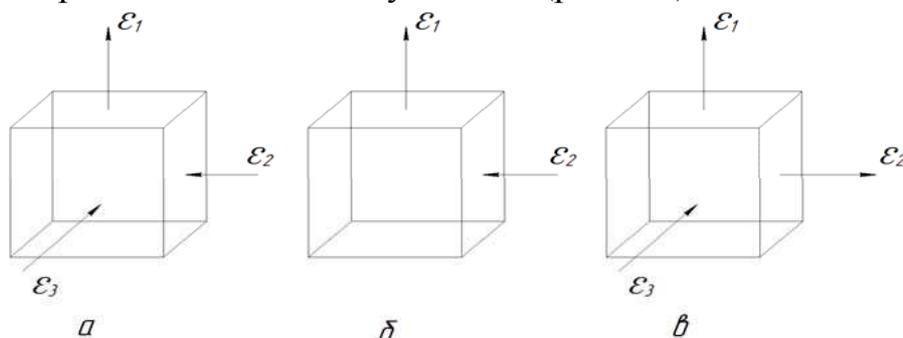


Рис. 2.7. Схемы главных деформаций

Из условия постоянства объема (несжимаемости), широко используемого в процессах обработки металлов давлением, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ следует, что три главные деформации не могут быть одного знака, а схемы деформаций могут быть только разноименные. Поэтому не может быть линейных схем деформации. Реально осуществимы только одна плоская (рис. 2.7, б) и две объемных (рис. 2.7, а, в) схемы.

Схема на рисунке 2.7, а встречается в таких процессах обработки металлов давлением, как прессование и выдавливание (рис. 2.8, в), волочение (рис. 2.8, г). В процессе деформирования происходит уменьшение поперечного сечения заготовки и течение металла в длину. Если течение металла происходит в одной плоскости, то такая деформация называется плоской. Примером плоской деформации является прокатка тонкого широкого листа, при которой деформация по ширине листа равна нулю.

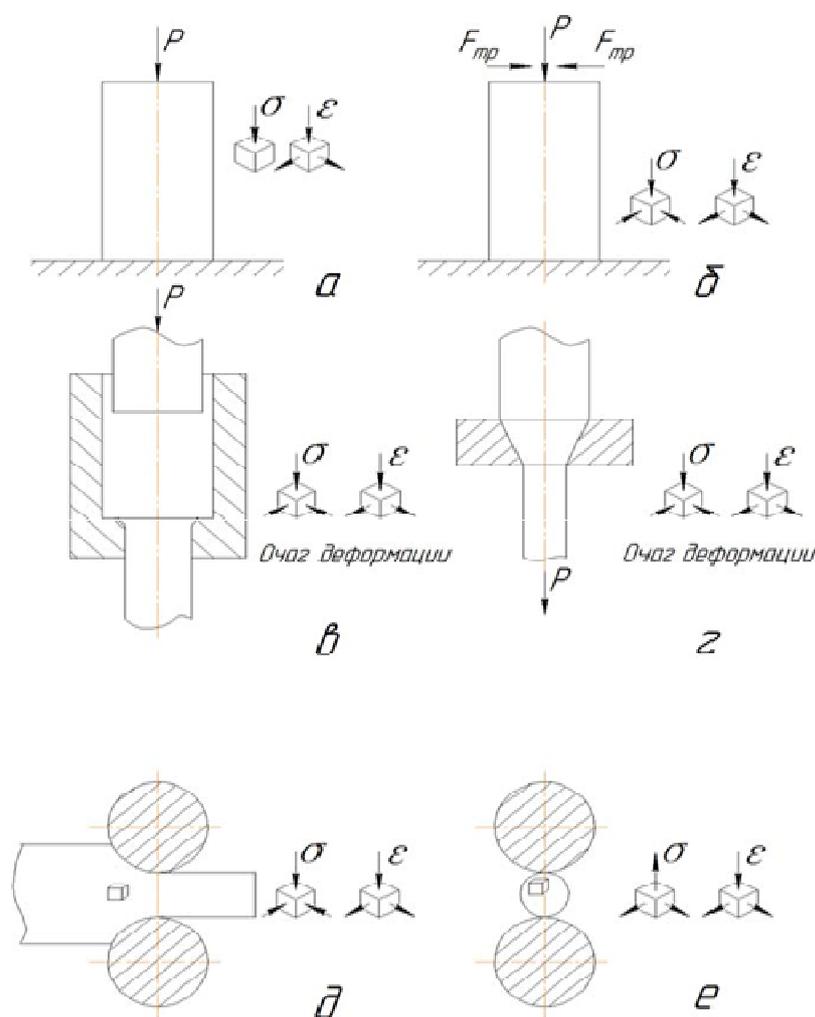


Рис. 2.8. Схемы деформированных состояний в процессах обработки металлов давлением: а – осадка без контактного трения; б – с трением; в – прессование и выдавливание; г – волочение; д – толстолистовая прокатка; е – поперечно-винтовая прокатка

Схема рисунка 2.7, в встречается в таких процессах, как осадка без

контактного трения (рис. 2.8, а) и с трением (рис. 2.8, б), толстолистовая прокатка (рис. 2.8, д), поперечно-винтовая прокатка (рис. 2.8, е).

Главные линейные деформации связаны между собой следующими соотношениями:

для плоского деформированного состояния $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 = 0$;

для линейного растяжения и сжатия $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0,5 \varepsilon_1$, где ε_1 – наибольшая по абсолютной величине главная деформация.

2.5. Разложение тензора деформаций

Тензор деформаций, характеризующий общий случай деформированного состояния в рассматриваемой точке тела, можно представить в виде суммы двух деформированных состояний, то есть разложить на *шаровой тензор деформаций* и *девиатор деформаций*:

$$T_{\varepsilon} = \varepsilon_0 T_1 + D_{\varepsilon},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\theta}{3}$ – средняя деформация в точке;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичный тензор; } T_{\varepsilon}^0 = \varepsilon_0 T_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \text{ – шаровой}$$

тензор;

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \text{ – девиатор деформаций.}$$

Шаровой тензор деформаций описывает деформацию изменения объема, а девиатор деформаций – деформацию изменения формы в точке тела.

При развитой пластической деформации компоненты шарового тензора деформаций $\varepsilon_0 \neq 0$. Тогда $T_{\varepsilon} \neq D_{\varepsilon}$, так как возникновение пластических деформаций в теле связано с образованием сдвигов и, следовательно, с изменением формы элементарного объема. Девиатор деформаций характеризует изменение формы тела в окрестности рассматриваемой точки, т.к. объёмная деформация, равная сумме компонентов главной диагонали девиатора деформации, отсутствует:

$$\theta(D_{\varepsilon}) = (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0.$$

При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают.

Инварианты девиатора деформации в главных осях равны:

$$I_1(D_\varepsilon) = 0;$$

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right];$$

$$I_3(D_\varepsilon) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)(\varepsilon_3 - \varepsilon_0).$$

В теории пластичности важное значение имеет второй инвариант $I_2(D_\varepsilon)$, который можно рассматривать как суммарную характеристику искажения формы элемента сплошной среды.

Неотрицательная величина

$$\gamma_i = \Gamma = 2\sqrt{I_2(D_\varepsilon)} = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]}$$

называется *интенсивностью деформаций сдвига*.

Коэффициент перед корнем выбран так, чтобы при чистом сдвиге

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0, \gamma_{xy} = \gamma$$

интенсивность Γ равнялась бы величине сдвига γ .

Неотрицательная величина

$$\varepsilon_i = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

называется *интенсивностью деформаций*.

Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы при линейном растяжении $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0,5\varepsilon$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ интенсивность ε_i равнялась бы главной линейной деформации.

Октаэдрическая деформация сдвига определяется формулой

$$\gamma_{\text{окт}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}I_2(D_\varepsilon)} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2}.$$

Девиатор деформаций в виде

$$\bar{D}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\gamma_{\text{окт}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\gamma_{\text{окт}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_0)}{\gamma_{\text{окт}}} \end{pmatrix}$$

называется *направляющим тензором деформаций*.

Его главные оси совпадают с главными осями тензора деформаций. Если главные оси деформаций известны, то для описания деформирован-

ного состояния можно использовать показатель вида деформированного состояния Лоде–Надаи:

$$v_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}}.$$

Для одноосного растяжения $v_\varepsilon = -1$, одноосного сжатия $v_\varepsilon = 1$, чистого сдвига $v_\varepsilon = 0$.

2.6. Однородная, равномерная и монотонная деформации

Однородной называется деформация тела, при которой главные оси имеют одинаковые направления во всех точках тела и остаются неизменными в течение всего процесса деформирования. Это означает, что при однородной деформации отсутствуют сдвиги, а различные участки тела получают одинаковые линейные деформации, как по величине, так и по направлению.

Пример однородной деформации при осадке тела между параллельными плитами без трения показан на рисунке 2.9, а.

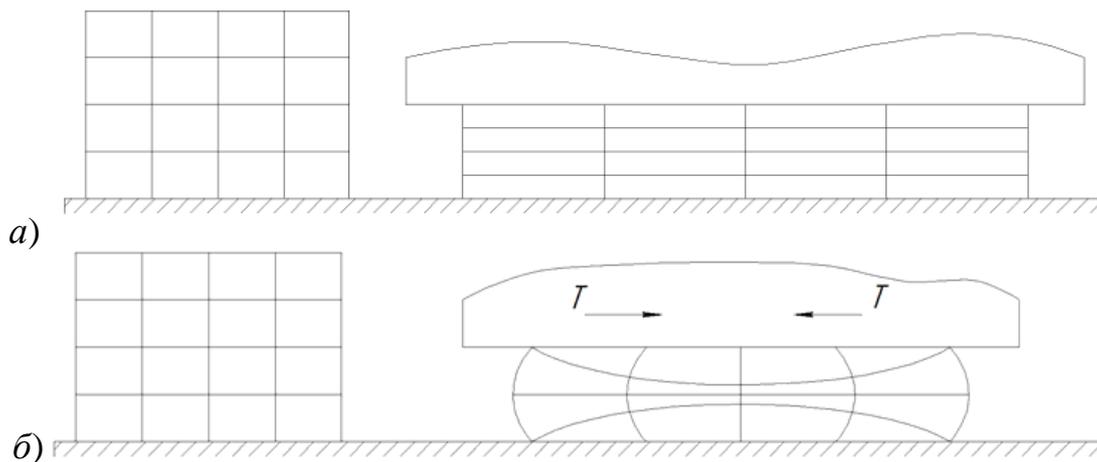


Рис. 2.9. Пример деформации при осадке тела между параллельными плитами:
а) – однородной без трения; б) – неоднородной с трением

При однородной деформации компоненты перемещений линейно зависят от координат: $u = \varepsilon_1 x$; $v = \varepsilon_2 y$; $w = \varepsilon_3 z$.

Отсюда следует, что при однородной деформации любая плоскость деформируемого тела остается плоскостью и после деформации. На этом положении основана гипотеза плоских сечений, широко применяемая в теории обработки металлов давлением.

На практике однородная деформация встречается очень редко. Обычно имеет место неоднородность деформации, это является результатом действия сил трения и формы инструмента.

Пример неоднородной деформации при осадке между параллельными плитами с учетом действий сил трения T приведен на рисунке 2.9, б.

Равномерной называется такая деформация, тензор которой в любой точке тела постоянен и не зависит от координат. Равномерная деформация представляет собой частный случай однородной. Она возможна в условиях линейного напряженного состояния.

Условие монотонности деформации заключается в том, что на всем протяжении деформации от начального до конечного состояния наибольшие и наименьшие удлинения или укорочения испытывают одни и те же материальные волокна, проходящие через рассматриваемую точку тела.

2.7. Большие деформации

В процессах обработки металлов давлением полная деформация может достигать значительной величины. Для ее описания рассмотрим параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям деформаций, и с исходными размерами до пластической деформации X_0 , Y_0 и Z_0 (рис. 2.10, а).

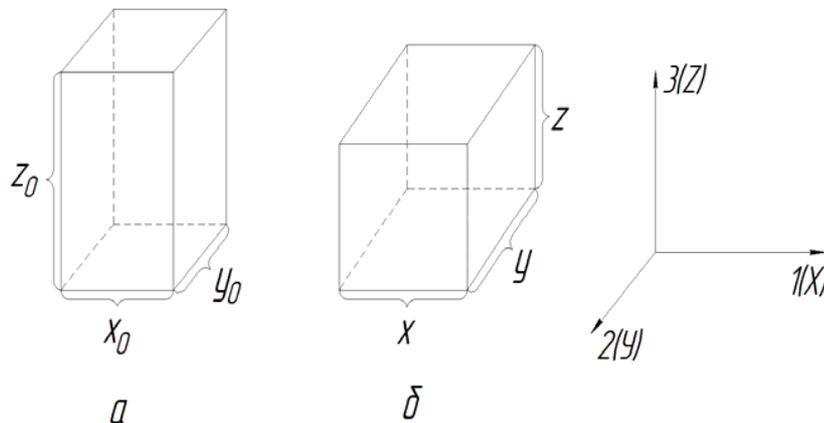


Рис. 2.10

Пусть этот параллелепипед после однородной деформации (рис. 2.10, б) останется также параллелепипедом, и конечные размеры его будут: X , Y , Z . Тогда по условию постоянства объема $V = X_0 Y_0 Z_0 = XYZ$, откуда:

$$\frac{X}{X_0} \frac{Y}{Y_0} \frac{Z}{Z_0} = 1.$$

После логарифмирования: $\ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{Y}{Y_0} + \ln \frac{Z}{Z_0} = 0$.

Сумма трех главных деформаций равна нулю: $e_x + e_y + e_z = 0$,

где
$$e_x = \ln \frac{X}{X_0}; e_y = \ln \frac{Y}{Y_0}; e_z = \ln \frac{Z}{Z_0}. \quad (2.4)$$

Величины e_x , e_y и e_z носят название *логарифмических деформаций*.

Логарифмическая деформация представляет собой интеграл бесконеч-

но малого приращения данного размера тела или его элемента, отнесенного к его величине в каждый данный момент деформации. Например, в направлении ребра Z суммарная относительная деформация при осадке от Z_0 до Z составит:

$$e_z = \int_{Z_0}^Z \frac{dZ}{Z} = \ln \frac{Z}{Z_0}.$$

Аналогичные деформации в направлении ширины и длины соответственно равны:

$$e_x = \int_{X_0}^X \frac{dX}{X} = \ln \frac{X}{X_0}; e_y = \int_{Y_0}^Y \frac{dY}{Y} = \ln \frac{Y}{Y_0}.$$

В случае однородной деформации логарифмические деформации представляют собой результат суммирования бесконечно малых деформаций, поэтому их часто называют истинными деформациями.

Логарифмические деформации обладают свойством аддитивности: их можно складывать при определении суммарной деформации, осуществленной за несколько операций.

Допустим, что растяжение образца длиной 100 мм произведено в два этапа. Вначале образец был растянут до 120 мм, а после – до 150 мм.

Суммарная деформация за два этапа нагружения:

$$e_{x\Sigma} = \ln \frac{150}{100} = \ln \frac{150}{120} \cdot \frac{120}{100} = \ln \frac{120}{100} + \ln \frac{150}{120} = e_{x1} + e_{x2}.$$

Степень деформации тел можно выразить иначе, а именно как отношение приращения размера к начальному размеру тела:

$$\varepsilon_x = \frac{X - X_0}{X_0} = \frac{\Delta X}{X_0}; \varepsilon_y = \frac{Y - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0}; \varepsilon_z = \frac{Z - Z_0}{Z_0} = \frac{\Delta Z}{Z_0}. \quad (2.5)$$

Величины e и ε связаны между собой:

$$\begin{aligned} e_x &= \ln \frac{X}{X_0} = \ln \frac{X_0 + \Delta X}{X_0} = \ln(1 + \varepsilon_x); \\ e_y &= \ln \frac{Y}{Y_0} = \ln \frac{Y_0 + \Delta Y}{Y_0} = \ln(1 + \varepsilon_y); \\ e_z &= \ln \frac{Z}{Z_0} = \ln \frac{Z_0 + \Delta Z}{Z_0} = \ln(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) часто используют в процессах обработки металлов давлением для расчета относительного обжатия, уширения, вытяжки. Например, величина относительного обжатия при осадке:

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}.$$

Граница между деформациями, рассчитываемыми по формулам (2.4) и (2.5), зависит от той точности, с которой рассчитывается процесс.

Истинные и относительные деформации вначале близки между собой, а затем расходятся (рис. 2.11).

Если необходима большая точность, то нужно использовать логарифмические деформации. В пределах 0–10 % можно пользоваться любыми формулами.

При степенях деформации до 10 % проще использовать формулы (2.5), не обладающие свойством аддитивности.

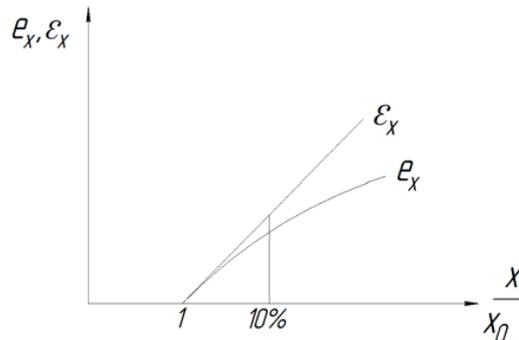


Рис. 2.11. Сравнение результатов вычислений относительных и логарифмических деформаций

2.8. Объемная деформация

В общем случае при деформировании объём тела изменяется. Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед объёмом $dV = dxdydz$.

С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение этого объёма связано только с изменением длины рёбер, но не с угловыми деформациями.

Длина рёбер после деформирования:

$$dx_1 = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = dx(1 + \varepsilon_x); \quad dy_1 = dy(1 + \varepsilon_y); \quad dz_1 = dz(1 + \varepsilon_z).$$

Объём параллелепипеда после деформирования:

$$\begin{aligned} dV_1 &= dx_1 dy_1 dz_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z) = \\ &= dxdydz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_z \varepsilon_y + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что $dxdydz = dV$, находим:

$$dV_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительное изменение объёма или *объёмная деформация*:

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Таким образом, объёмная деформация выражается суммой линейных деформаций.

2.9. Скорость деформации

Рассмотрим процесс деформирования тела во времени. В процессе деформирования отдельные материальные частицы движутся со скоростью $v(x, y, z, t)$. Составляющие скорости по координатным осям x, y, z :

$$v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \quad v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Так как скорость частицы определяется величиной перемещения в единицу времени, то:

$$v_x = du/dt; \quad v_y = dv/dt; \quad v_z = dw/dt,$$

или

$$du = v_x dt; \quad dv = v_y dt; \quad dw = v_z dt.$$

В течение бесконечно малого промежутка времени dt деформируемый элемент тела испытывает бесконечно малые деформации, определяемые перемещением du . В направлении координатной оси x имеем:

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du}{\partial x} = \frac{\partial (v_x dt)}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \xi_x,$$

где ξ_x – линейная скорость деформации.

Аналогично могут быть получены и другие скорости линейных и угловых деформаций:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \eta_{xy} &= \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \\ \xi_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \eta_{yz} &= \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}, \\ \xi_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \eta_{zx} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Скоростью деформации называется изменение степени деформации в единицу времени. Это понятие широко используется в теории пластического течения металла. Скорость деформации, по аналогии с тензором деформаций, можно также представить в виде тензора скоростей деформации:

$$T_\xi = \begin{pmatrix} \xi_x & \frac{1}{2}\eta_{yx} & \frac{1}{2}\eta_{zx} \\ \frac{1}{2}\eta_{xy} & \xi_y & \frac{1}{2}\eta_{zy} \\ \frac{1}{2}\eta_{xz} & \frac{1}{2}\eta_{yz} & \xi_z \end{pmatrix}.$$

Его по аналогии можно представить в виде шарового тензора T_ξ^0 и девиатора скоростей деформаций D_ξ т.е. $T_\xi = T_\xi^0 + D_\xi$.

Шаровой тензор имеет вид:

$$T_{\xi}^0 = \begin{pmatrix} \xi_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

При развитых пластических деформациях средняя скорость деформации:

$$\xi_{cp} = (\xi_x + \xi_y + \xi_z)/3$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Девииатор скоростей деформаций записывается аналогично девииатору деформаций:

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_x - \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{xy} & \frac{1}{2}\xi_{xz} \\ \frac{1}{2}\xi_{yx} & \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{yz} \\ \frac{1}{2}\xi_{zx} & \frac{1}{2}\xi_{zy} & \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор T_{ξ}^0 характеризует скорость изменения объема, а девииатор характеризует скорость изменения формы.

Аналогично вводится понятие интенсивности скоростей деформации сдвига:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{2}{3}(\xi_{xy}^2 + \xi_{yz}^2 + \xi_{zx}^2)}.$$

Главные оси скоростей деформаций, главные скорости линейных деформаций определяются так же, как для тензора деформаций. Размерность скорости деформаций – c^{-1} . Скорость деформации следует отличать от скорости деформирования (хода инструмента). Скорости деформаций для больших деформаций тела определяют, как и для малых. Например, скорость деформации при осадке тела между двумя параллельными плитами:

$$\xi_h = \frac{\varepsilon_h}{\Delta t} = \frac{\Delta h}{h \Delta t} = \frac{v_h}{h}.$$

2.10. Примеры решения задач

Задача 1

Определить значения функции γ_{zx} , если заданы перемещения:

$$u = 2x^2 + y; \quad v = x^2 - 2yz; \quad w = -z1^y.$$

Решение:

Используем соотношения Коши (2.1):

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + 0 = 0.$$

Ответ: $\gamma_{zx} = 0$.

Задача 2

Для упругого тела известны перемещения:

$$u = 0,01(x^2 + y^2); \quad v = 0,01(xy + z^2); \quad w = 0,01(z^2 + y^2).$$

Вычислить полное перемещение ρ точки тела $A(3; -2; 1)$ и определить его направление.

Решение:

Подставляем координаты заданной точки A в функции перемещений:

$$u = 0,01[3^2 + (-2)^2] = 0,13;$$

$$v = 0,01[3 \times (-2) + 1^2] = -0,05;$$

$$w = 0,01[1^2 + (-2)^2] = 0,05;$$

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{(0,13)^2 + (-0,05)^2 + (0,05)^2} = 0,148.$$

Направление полного перемещения ρ определяется величинами направляющих косинусов:

$$l = u/\rho = 0,13/0,148 = 0,878; \quad m = v/\rho = -0,05/0,148 = -0,338;$$

$$n = w/\rho = 0,05/0,148 = 0,338.$$

Ответ: $\rho = 0,148; l = 0,878; m = -0,338; n = 0,338$.

Задача 3

По известным выражениям перемещения упругого тела $u = (x + y + 0,5z)z; v = (y + 0,5z)z; w = xy + yz + xz$; определить деформации тела в точке $A(1; 2; 3)$.

Решение:

Используем соотношения Коши (2.1), подставляя после дифференцирования выражений координаты точки A :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z = 3; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z = 3; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = y + x = 2 + 1 = 3;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z + 0 = 3; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = y + z + x + z = 2 + 3 + 1 + 3 = 9;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = y + z + x + y + z = 2 + 3 + 1 + 2 + 3 = 11.$$

Ответ: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yx} = 3; \gamma_{yz} = 9; \gamma_{zx} = 11.$

2.11. Контрольные вопросы по теме «Теория деформаций»

Контрольные вопросы составлены в форме тестов, необходимо выбрать правильный ответ из предлагаемых.

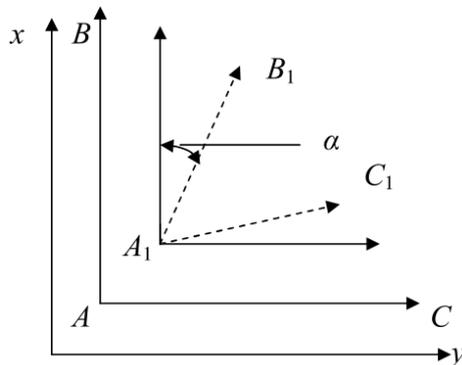
Вопрос № 1: Упругое тело, у которого связь между деформациями каждого элемента и приложенными к нему усилиями не зависит от направления действующих на этот элемент усилий, называется...

Ответ: 1) Однородным. 2) Относительно жёстким. 3) Обладающим свойством геометрической линейности. 4) Изотропным.

Вопрос № 2: Свойство упругих тел деформироваться одинаково во всех точках под действием одинаковых напряжений называется...

Ответ: 1) Идеальной упругостью. 2) Изотропностью. 3) Однородностью. 4) Сплошностью.

Вопрос № 3: Какое из приведённых ниже выражений можно считать равным углу α ?



Ответ: 1) du/dx . 2) du/dy . 3) dv/dx . 4) dv/dy .

Вопрос № 4: Каков геометрический смысл производной dv/dz ?

Ответ:

1) Угол поворота элемента dy в направлении оси Z .

2) Уменьшение угла между элементами dy и dz в результате угловой деформации в плоскости YOZ .

3) Указанное выражение, рассматриваемое в отдельности, геометрического смысла не имеет.

4) Угол поворота элемента dz в направлении оси y .

Вопрос № 5: Определить значение функции γ_{zx} , если заданы перемещения:

$$u = 2x^2 + y; \quad v = x^2 - 2yz; \quad w = -ze^y.$$

Ответ: 1) $4x + e^y$; 2) $4x - e^y$; 3) 1,0; 4) 0.

Вопрос № 6: для упругого тела известны перемещения:

$$u = 0,01(x^2 + y^2); \quad v = 0,01(xy + z^2); \quad w = 0,01(z^2 + y^2).$$

Вычислить полное перемещение ρ точки тела $A(3; -2; 1)$ и определить его направление (направляющие косинусы l, m, n)

Ответ: 1) $\rho = 0,148$; $l = 0,878$; $m = 0,338$; $n = 0,338$;

2) $\rho = 0,148$; $l = -0,878$; $m = 0,338$; $n = 0,338$;

3) $\rho = 0,148$; $l = 0,878$; $m = 0,338$; $n = -0,338$;

4) $\rho = 0,148$; $l = 0,878$; $m = -0,338$; $n = 0,338$.

Вопрос № 7: Для упругого тела известны перемещения

$$u = x^2 + y^2; \quad v = xy + z^2; \quad w = z^2 + y^2.$$

Определить величины деформаций ϵ_y, γ_{xy} .

Ответ: 1) $\epsilon_y = x$; $\gamma_{xy} = 3x$; 2) $\epsilon_y = x$; $\gamma_{xy} = 3y$; 3) $\epsilon_y = y$; $\gamma_{xy} = 3y$;

4) $\epsilon_y = 2y$; $\gamma_{xy} = 3y$.

Вопрос № 8: Для упругого тела известны перемещения:

$u = x^3 + y$; $v = x + z$; $w = x^3 + z$. Определить величины деформаций ϵ_y, γ_{xy} .

Ответ: 1) $\epsilon_y = 0$; $\gamma_{xy} = 3x^2$; 2) $\epsilon_y = x^3$; $\gamma_{xy} = 2$; 3) $\epsilon_y = 0$; $\gamma_{xy} = x^3 + z$;

4) $\epsilon_y = 0$; $\gamma_{xy} = 2$.

Вопрос № 9: Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями: $u = (x + y + 0,5z)z$; $v = (y + 0,5z)z$; $w = xy + yz + xz$.

Определить деформации тела $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}$ в точке $A(1; 2; 3)$.

Ответ: 1) $\epsilon_x = -3$; $\epsilon_y = 3$; $\epsilon_z = 5$; $\gamma_{xy} = 4$; 2) $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 3$;

3) $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 3$; $\gamma_{xy} = -3$; 4) $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 3$; $\gamma_{xy} = 6$.

Вопрос № 10: Указать невозможную комбинацию значений направляющих косинусов нормали к площадке.

Ответ: 1) $l = m = 1$; $n = 0$; 2) $\lambda = m = 0$; $n = 1$; 3) $\lambda = m = 0,5$; $n = 0,5\sqrt{2}$;

4) $\lambda = 0$; $m = 0,6$; $n = 0,8$.

Вопрос № 11: Какое из перечисленных ниже свойств идеально упругого тела выражают уравнения неразрывности деформаций?

Ответ: 1) Идеальную упругость. 2) Относительную жёсткость.

3) Однородность. 4) Сплошность.

3. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

3.1. Обобщенный закон Гука

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформаций необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят *физический* характер, т.к. определяются физическими свойствами материала.

Для малых деформаций упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной.

В общем случае анизотропии каждая составляющая напряжений может зависеть от всех составляющих деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}; \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + \dots \dots + a_{26}\gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + \dots \dots + a_{36}\gamma_{zx}; \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + \dots \dots + a_{46}\gamma_{zx}; \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + \dots \dots + a_{56}\gamma_{zx}; \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + \dots \dots + a_{66}\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

Коэффициенты a_{mn} (их 36) – *упругие постоянные*. Они определяются константами и зависят от ориентации осей x, y, z . Они образуют тензор, но более высокого четвертого ранга. Этот тензор является симметричным: $a_{mn} = a_{nm}$. Количество *независимых* упругих постоянных уменьшается до 21.

Полевые тензоры напряжений и деформаций связаны материальными тензорами четвертого ранга, которые отражают свойства материала, его строение и симметрию.

Для изотропного материала число независимых упругих постоянных уменьшается до двух (E, G):

$$E = 2G(1 + \mu).$$

При испытании стержня на растяжение экспериментально установлена линейная зависимость: $\sigma = E\varepsilon$ – закон Гука. $E = tg\alpha$ – модуль упругости 1-го рода (рис. 3.1, а).

Аналогично при испытании на чистый сдвиг (рис. 3.1, б): $G = tg\beta$ – модуль сдвига (модуль упругости 2-го рода).

Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном и поперечном направлениях (рис. 3.1, в):

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x; \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| \text{ – коэффициент Пуассона.}$$

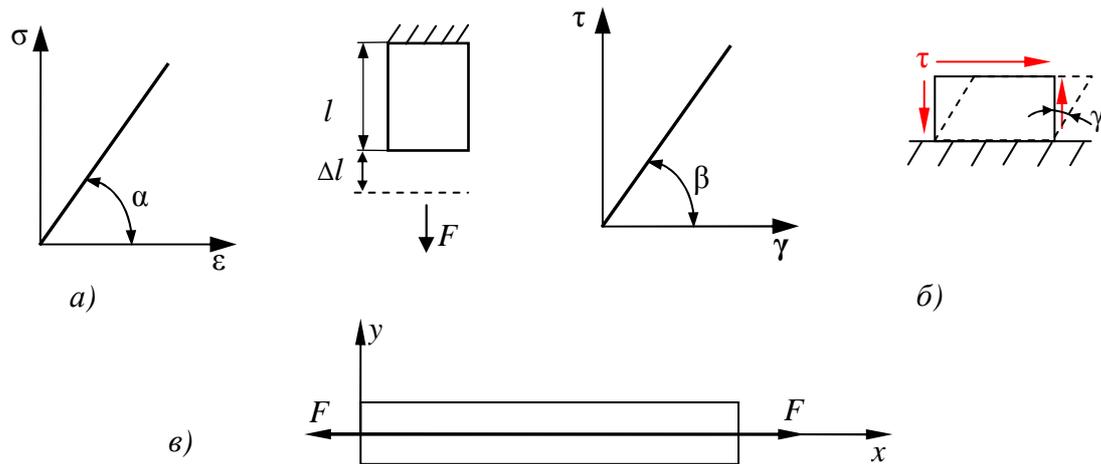


Рис. 3.1. Иллюстрация закона Гука при растяжении (а), сдвиге (б).
 Направление осей для продольной и поперечной деформации при растяжении (в)

Учитывая, что: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$, получим $\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$.

Первая формулировка закона, связывающего напряжения с деформацией, принадлежит выдающемуся естествоиспытателю, члену Лондонского королевского общества Роберту Гуку (1653-1703). Он изучал поведение стальной струны, нагруженной грузами, и свой закон упругости вначале представил в следующем виде: «Каково удлинение, такова и сила».

Далее установим связь между напряжениями и деформациями в общем случае объемного напряженного состояния.

Рассмотрим деформацию элемента тела, выбрав этот элемент в виде прямоугольного параллелепипеда размерами $a \times b \times c$, по граням которого действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (для вывода предполагаем, что все они положительны) (рис. 3.2). Вследствие деформации ребра элемента изменяют свою длину и становятся равными: $a + \Delta a; b + \Delta b; c + \Delta c$.

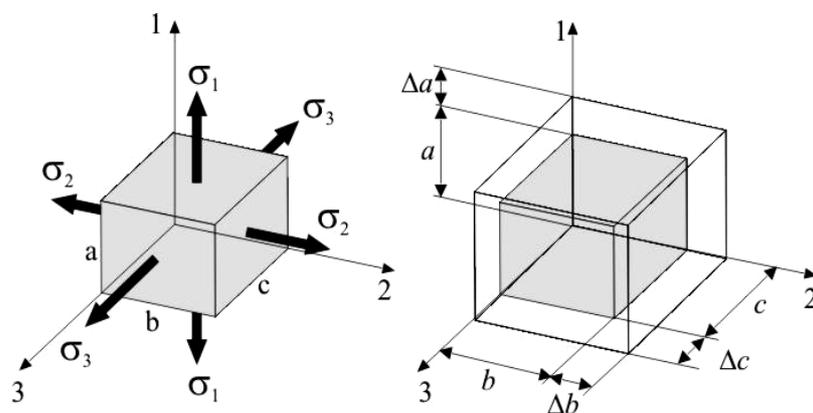
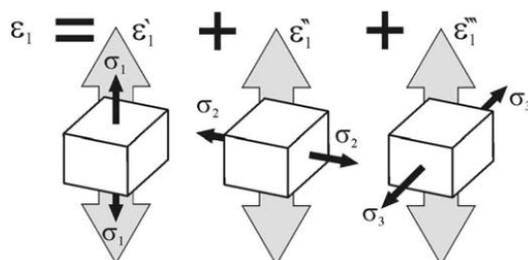


Рис. 3.2. Объемное напряжённое состояние

Относительные удлинения в главных направлениях:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

Применяя принцип суперпозиции, деформацию ε_1 можно представить следующим образом: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1'''$. В каждом из трех направлений проходит по одной продольной и по две поперечных деформации.



$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_1'' = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_1''' = -\mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Суммарные относительные удлинения в направлениях напряжений:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \mu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \mu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Если грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками, то по ним действуют касательные напряжения, не удлиняющие или укорачивающие грани, а вызывающие лишь изменение прямых углов между его гранями.

Рассматриваем изотропное тело и раскладываем сложное напряжённое состояние на простые (рис. 3.3).

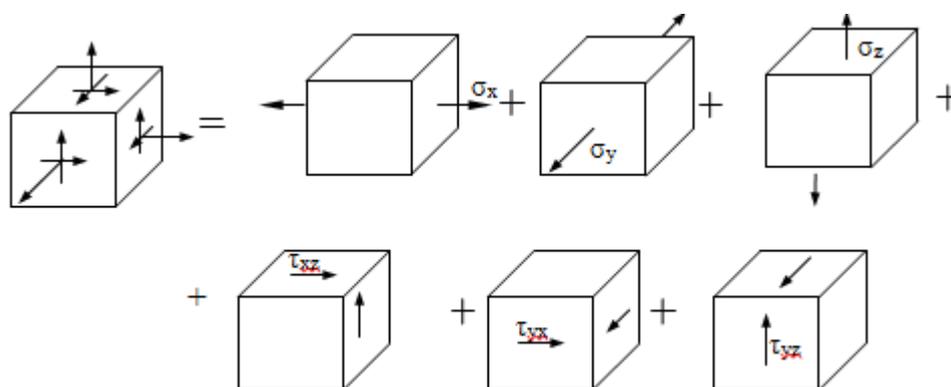


Рис. 3.3

Деформации для каждого простого состояния:

- 1). $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E}; \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$
- 2). $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}; \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E}; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$
- 3). $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_z}{E}; \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0;$
- 4). $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0; \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0;$
- 5). $\gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G}; \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0;$
- 6). $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0; \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0;$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right]; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]; \\ \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}. \end{cases}$$

3.2. Выражение напряжений через деформации (обратная форма закона Гука, форма Ламе)

При решении задач часто необходимы выражения напряжений через деформации.

Складывая три формулы обобщённого закона Гука, получим:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} (1 - 2\mu) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Учтём, что:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta - \text{объёмная деформация};$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \text{среднее напряжение}.$$

И получим:

$$\theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_0. \quad (3.1)$$

Введём модуль объёмного расширения, модуль объёмной упругости, характеризующий жёсткость материала при всестороннем сжатии:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

При $\mu \rightarrow 0,5$ $K \rightarrow \infty$, т.е. имеем несжимаемый материал.

Таким образом, объёмный закон Гука устанавливает пропорциональность среднего напряжения в точке объёмной деформации:

$$\sigma_0 = K\theta.$$

Преобразуем первую формулу закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right].$$

Выделим в формуле среднее напряжение:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x(1+\mu) - 3\mu\sigma_0]. \quad (3.2)$$

Из (3.1) получим:

$$\sigma_0 = \frac{\theta E}{3(1-2\mu)}. \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.2):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x(1+\mu) - \frac{\theta E}{1-2\mu} \right],$$

и получим

$$\sigma_x = \frac{E\mu\theta}{(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{E\varepsilon_x}{1+\mu};$$

Введем коэффициенты Ламе, характеризующие упругие свойства материала:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\}$$

где λ – постоянная Ламе.

Получим более компактную запись для напряжения:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x.$$

По аналогии можно записать и другие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}; \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Это – обратная форма закона Гука. Записана так Ламе.
Складывая первые три уравнения:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

или $I_1 = (3\lambda + 2G)\theta$.

Это соотношение устанавливает связь между первыми инвариантами напряжённого и деформированного состояний через коэффициенты Ламе.

Выражая через средние напряжения и деформации, получим:

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2G)\varepsilon_0. \quad (3.5)$$

Таким образом, среднее напряжение в точке пропорционально среднему удлинению в этой точке.

3.3. Закон Гука в тензорной форме

Будет иметь простой и компактный вид. Преобразуем 1-е уравнение (3.4), вычитая из правой и левой частей среднее напряжение σ_0 :

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x - \sigma_0.$$

учитывая (3.5) и $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{\theta}{3}$, правую часть преобразуем:

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda\theta + 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

По аналогии добавим еще два уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_x - \sigma_0 = \lambda\theta + 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); \\ \sigma_y - \sigma_0 = \lambda\theta + 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \sigma_z - \sigma_0 = \lambda\theta + 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0). \end{cases} \quad (3.6)$$

Касательные напряжения представим в виде:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Левые части уравнений (3.6), (3.7) представлены компонентами девиатора напряжений, а правые – соответствующими компонентами девиатора деформаций, умножаемыми на $2G$:

$$D_{\sigma} = 2GD_{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Это закон изменения формы.

Так как девиаторы σ и ε характеризуют только ту часть деформации, которая связана с изменением формы тела, то к (3.8) следует добавить закон Гука для объёмной деформации – закон изменения объема:

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.9)$$

Таким образом, обобщённый закон Гука выражается двумя равенствами: тензорным (3.8) и скалярным (3.9) с двумя упругими постоянными G и K .

Упругие постоянные задаются или E, μ , или G, K .

3.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения

Разрешающую систему уравнений теории упругости составляют три группы уравнений:

1. Статические уравнения

Дифференциальные уравнения равновесия:

В динамических задачах

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 & = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 & = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 & = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (I)$$

В задачах динамики в правой части уравнений (I) вместо нулей будут выражения $\rho \partial^2 u / \partial t^2$, $\rho \partial^2 v / \partial t^2$, $\rho \partial^2 w / \partial t^2$, соответственно, где ρ – плотность материала тела; u, v, w – проекции перемещения тела на оси x, y, z ; t – время.

Условия на поверхности:

$$\begin{cases} P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ P_{vz} = \tau_{xy} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (II)$$

2. Геометрические уравнения

Соотношения Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{cases} \quad (III)$$

Уравнения неразрывности деформации:

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
\end{cases} \quad (IV)$$

3. Физические уравнения

Обобщенный закон Гука в прямой и обратной форме:

при учёте температуры

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T; & \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \\
\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z) \right] + \alpha \Delta T; & \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \\
\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right] + \alpha \Delta T; & j_{zx} = \tau_{zy} / G
\end{cases} \quad (V)$$

Закон Гука в обратной форме:

при учёте температуры

$$\begin{cases}
\sigma_x = \lambda \theta + 2G\varepsilon_x - 3\alpha K \Delta T; & \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\
\sigma_y = \lambda \theta + 2G\varepsilon_y - 3\alpha K \Delta T; & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\
\sigma_z = \lambda \theta + 2G\varepsilon_z - 3\alpha K \Delta T; & \tau_{zx} = G\gamma_{zx}
\end{cases} \quad (VI)$$

В уравнениях 15 неизвестных функций: шесть компонент напряжений $\sigma_x, \dots, \tau_{xz}$, шесть компонент деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$; три компоненты перемещения u, v, w .

С математической точки зрения задача может быть решена и сводится к интегрированию 15 уравнений (I, III, IV) с 15 неизвестными при удовлетворении условий на поверхности (II).

Решение упростится, если из общей системы 15 уравнений исключить в общем виде часть искоемых функций, что позволит сократить число совместно решаемых уравнений. В этой схеме различают 3 способа решения в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные:

1) *решение в перемещениях*, когда основные неизвестные – три проекции перемещения u, v, w ;

2) *решения в напряжениях*, когда основные неизвестные – шесть составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$;

3) *решение в смешанной форме*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

3.5. Решение в перемещениях. Уравнения Ламе

За неизвестные принимаются три составляющих перемещения: $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$.

Три необходимых уравнения получают из дифференциальных уравнений равновесия (I), выразив в них напряжения через перемещения. В уравнения (I) подставим напряжения из формул закона Гука (VI), затем деформации выразим через перемещения из соотношений Коши (III) и после упрощений и сокращений получим уравнения Ламе:

$$\begin{cases} G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + X = 0; \\ G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + Y = 0; \\ G\nabla^2 w + (\lambda + G)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + Z = 0; \end{cases} \quad (\text{VII})$$

где $\nabla^2 () = \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (набла два).

Это уравнения равновесия элементарного параллелепипеда в перемещениях. Они объединяют статические, геометрические и физические предпосылки теории упругости.

Аналогичными подстановками выражаются условия на поверхности через перемещения:

$$\begin{cases} P_{vx} = \lambda \theta l + G \frac{\partial u}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ P_{vy} = \lambda \theta m + G \frac{\partial v}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ P_{vz} = \lambda \theta n + G \frac{\partial w}{\partial v} + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{cases} \quad (\text{VIII})$$

Производные компонент перемещений по направлению нормали v вычисляется так (на примере u):

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dv} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

План решения задачи в перемещениях.

Для отыскания u, v, w необходимо проинтегрировать уравнения Ламе (VII) и удовлетворить условиям на поверхности (VIII). Затем из (III) определяются деформации и из закона Гука (VI) – напряжения.

Несмотря на уменьшение неизвестных с 15 до 3, общее решение уравнений Ламе не получено.

Замечание: если перемещения u, v, w определены или заданы, то предполагается неразрывность деформации и, следовательно, уравнения совместности деформаций оказываются удовлетворёнными.

3.6. Решение в напряжениях. Уравнения Бельтрами-Митчелла

В дальнейшем будем считать объёмные силы постоянными по всему объёму тела или равными нулю. Это упростит уравнения.

В качестве неизвестных принимаем напряжения. Для их отыскания нужно получить 6 уравнений, не содержащих других функций, кроме напряжений. Уравнения получим из уравнений совместности деформаций (IV), подставляя туда деформации, выраженные через напряжения из закона Гука (V) и выполняя различные преобразования с использованием уравнений равновесия (I), получим:

$$\begin{cases} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} = 0; & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} = 0; & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0; & (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{IX})$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Это уравнение совместности деформаций, выраженные через напряжения, получены в 1892 г. итальянским математиком Е. Бельтрами. В 1899г. австриец Дж. Митчелл вывел аналогичные уравнения для общего случая, когда объёмные силы не постоянные и в правую часть вместо нулей вводят члены, содержащие производные от объёмных сил, поэтому уравнения (IX) называют уравнениями *Бельтрами-Митчелла*.

Эти 6 уравнений эквивалентны только трём независимым уравнениям, т.к. получены путём исключения трёх величин из шести уравнений. Поэтому для решения необходимо интегрировать 9 уравнений (I и IX). Полученные 6 напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (II). Затем из закона Гука (V) определяют деформации, а из соотношений Коши (III) – перемещения.

3.7. Типы граничных условий на поверхности тела.

Методы решения задачи теории упругости

Решение задачи теории упругости любым способом сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих поведение упругого тела во внутренних точках.

Решения указанной выше системы уравнений должны выполняться всюду внутри объема тела. Кроме того, на поверхности, ограничивающей тело, должны быть удовлетворены и граничные условия. Они могут быть либо статическими (поверхностные напряжения в каждой точке поверхности тела (рис. 3.4, а)), либо кинематическими (рис. 3.4, б), либо смешанными (на части поверхности тела задаются перемещения, а на остальной части поверхности – напряжения (рис. 3.4, в)).

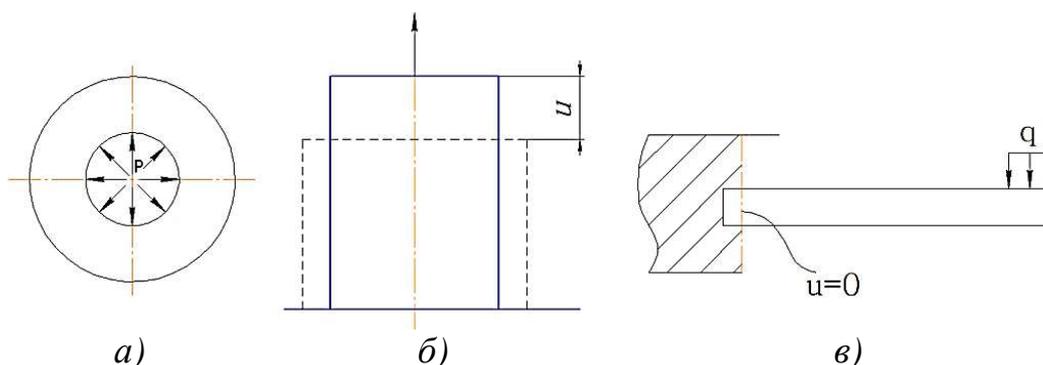


Рис. 3.4. Примеры граничных условий

В зависимости от этого формулируют один из трёх типов краевых задач.

1-я краевая задача – кинематическая. В условии на поверхности тела задают уравнение поверхности и значения составляющих перемещений на этой поверхности.

2-я краевая задача – статическая. Задаётся уравнение поверхности, направляющие косинусы нормали к поверхности и значения составляющих поверхностных нагрузок. Эти данные вносятся в уравнения (II).

В случае, когда поверхность тела совпадает с координатными плоскостями, краевые условия могут быть сформулированы непосредственно в напряжениях. Тогда достаточно указать уравнение поверхности и задать значения составляющих напряжений на этой поверхности.

3-я краевая задача – смешанная. На одной части поверхности задаются кинематические, а на другой – статические условия.

Доказана теорема единственности:

для тела, находящегося в естественном состоянии решение задачи теории упругости единственно, если справедлив принцип независимости действия сил, т.е. заданным объёмным и поверхностным силам соответствует одна система напряжений. Если решение единственно, то безразлично, каким математическим методом оно получено.

Используют 3 основных метода решения задачи теории упругости.

1. Прямой метод. Заключается в непосредственном интегрировании уравнений теории упругости совместно с заданными условиями на поверхности.

2. Обратный метод. Задаются функции перемещений или напряжений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям, и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

Другими словами: заданы: *либо перемещения, либо деформации, либо напряжения.*

Требуется определить две другие из указанных групп величин, а также внешние факторы, вызвавшие заданное напряжённое деформированное состояние.

3. Полуобратный метод Сен-Венана. Он состоит в задании части функций напряжений или перемещений. Затем с помощью уравнений теории упругости устанавливают зависимости, которые должны удовлетворять оставшиеся функции напряжений и перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет трудностей. Является одним из эффективных методов.

4. Способ последовательных приближений. Имеет общие черты с полуобратным способом Сен-Венана. Вначале используются те решения, которые получены при упрощающих гипотезах, например, в сопротивлении материалов. Подставляя эти решения, в уравнения теории упругости анализируют полученные несоответствия и корректируют предварительные решения. В итоге получают если не точное решение, то более скорое, чем исходное.

Расширить число решаемых задач позволяют принципы Сен-Венана (1855 г.).

Приведём две тождественные его формулировки:

1) если к малой части тела приложена взаимно противоположная система сил, то она вызывает напряжения, весьма быстро убывающие по мере удаления от этой части тела.

2) в точках тела, достаточно удалённых от места приложения нагрузки, напряжения почти не зависят от способа приложения нагрузки.

Этот принцип не имеет строгого математического обоснования, однако все имеющиеся решения и практические примеры полностью подтверждают его справедливость.

Применение принципа Сен-Венана позволяет «смягчить» граничные условия, не соблюдать их точно, а удовлетворять интегрально, по главному вектору и главному моменту.

Решения, соответствующие вполне определённому распределению нагрузки, можно рассматривать и на множестве других случаев.

На практике детальный закон распределения нагрузки в местах контакта с другими телами, на опорах не известен. В соответствии с принципом используют решения, полученные для наиболее простого варианта распределения нагрузки.

Пример: составления (формулирования) граничных условий (рис. 3.5). Записываем для плоского случая (для упрощения).

1. Геометрические (кинематические):

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}.$$

2. Статические:

$$P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m;$$

$$P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m.$$

3. Смешанные (на одном участке геометрические, на другом – статические).

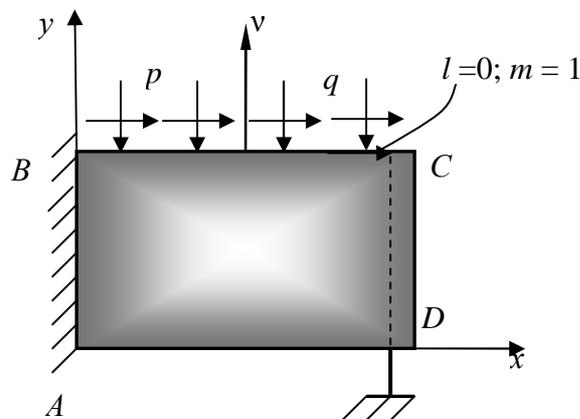


Рис. 3.5. Примеры граничных условий для плоской задачи

На краю AB – жёсткая заделка. Граничные условия геометрические – отсутствие перемещений по x и y : $u = 0$; $v = 0$.

Край BC загружен равномерно распределёнными давлением и сдвиговой нагрузкой с интенсивностью p и q соответственно. Граничные условия – статические:

направляющие косинусы нормали $v - l = 0$ ($\cos 90^\circ$); $m = 1$ ($\cos 0^\circ$)

$$P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{xy} m;$$

$$P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m.$$

т.е. $\tau_{xy} = q$; $\sigma_y = -p$.

Край CD опёрт на жёсткую диафрагму – абсолютно жёсткую в плоскости и гибкую – из плоскости. (Ех.: приварен лист опёртый снизу). Граничные условия смешанные: $\sigma_x = 0$; $v = 0$.

Край AD – свободный край. Граничные условия – статические – отсутствие напряжений: $\sigma_y = 0$; $\tau_{yx} = 0$.

3.8. Плоская задача теории упругости. Плоская деформация.

Плоское напряжённое состояние

При объемном напряженном состоянии определение напряженно-деформированного состояния часто оказывается сложным. Это вынуждает вводить во многих практических задачах ряд допущений относительно распределения напряжений или деформаций, т.е. переходить от объемного напряженного состояния к частным случаям.

Частными случаями объемного напряженного состояния, часто встречающимися при обработке металлов давлением, являются плоская деформация (ПД) и плоское напряжённое состояние (ПНС). Эти задачи, отличающиеся по своей сути, объединяются идентичной математической формулировкой, что позволяет решать их одинаковыми методами.

Плоской деформацией называется деформация, при которой перемещение всех точек тела происходят только в одной плоскости, например, только параллельно плоскости XOY (рис. 3.6).

$$u = u(x, y); v = v(x, y); w = 0.$$

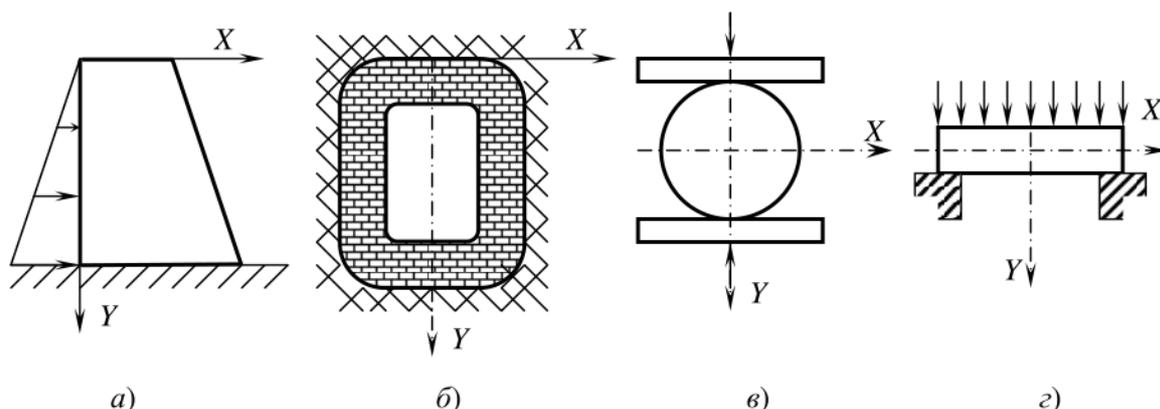


Рис. 3.6. Примеры расчётных схем (а – длинная плотина; б – тоннельные конструкции; в – длинный цилиндрический каток; г – длинная пластина)

Такие перемещения возникают в длинном призматическом или цилиндрическом теле, продольная ось которого параллельна оси OZ , при действии нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль неё.

В процессах обработки металлов давлением примерами плоского деформированного состояния являются прокатка широких тонких листов, когда ширина листа остается постоянной (прокатка без уширения), брус,

подвергающийся осадке в направлении толщины. В этих примерах перемещения всех точек тела параллельны одной и той же плоскости.

Нагрузка не меняется вдоль оси OZ . Из соотношений Коши:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x,y); & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x,y); & \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x,y); & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Несмотря на отсутствие линейных деформаций в направлении OZ , напряжение $\sigma_z \neq 0$. Эти напряжения зависят от напряжений, действующих в плоскости xOy .

Из закона Гука: $\varepsilon_z = [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]/E = 0$,
получим $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$.

Эти напряжения появляются вследствие стеснения продольных деформаций. Если выделить из плотины элемент двумя близкорасположенными поперечными сечениями, то в свободном состоянии этот элемент под нагрузкой деформировался бы так, что за счёт эффекта Пуассона поперечные сечения перестали бы быть плоскими. В составе плотины такие удлинения невозможны, т.е. элемент заключён между двумя соседними, находящимися в таком же состоянии и препятствующими этому удлинению (рис. 3.7).

Подставляя σ_z в формулы закона Гука, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= (1 - \mu^2) (\sigma_x - \sigma_y \mu / (1 - \mu)) / E; \\ \varepsilon_y &= (1 - \mu^2) (\sigma_y - \sigma_x \mu / (1 - \mu)) / E; \\ \varepsilon_z &= 0; \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \mu) \tau_{xy} / E; \quad \gamma_{yz} = 0; \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right.$$

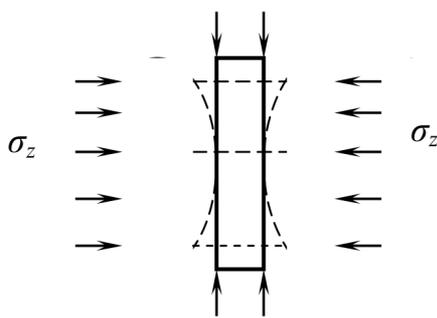


Рис. 3.7

Если ввести новые постоянные:

$$E_1 = E / (1 - \mu^2); \quad \mu_1 = \mu / (1 - \mu);$$

то формулы закона Гука изменяют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu_1 \sigma_y) / E_1; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu_1 \sigma_x) / E_1; \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \mu_1) \tau_{xy} / E_1; \\ 2(1 + \mu) / E &= 2(1 + \mu_1) / E_1. \end{aligned} \right. \quad (3.10)$$

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

Так как на боковой поверхности $n = 0$, то условия на поверхности упрощаются:

$$\begin{cases} P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m; \\ P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{cases} \quad (3.12)$$

Соотношения Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций остаётся одно (остальные превращаются в тождества):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.14)$$

ПД характеризуется тензорами:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

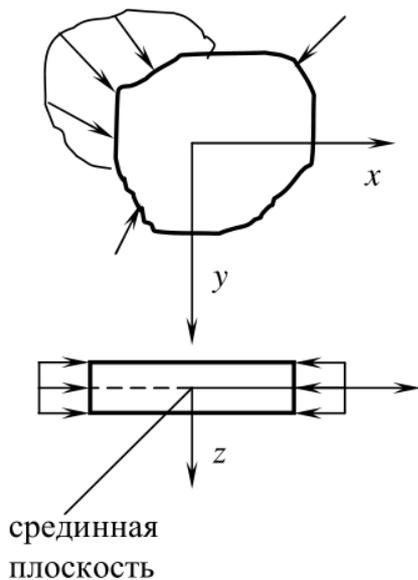


Рис. 3.8

При обобщённом плоском напряжённом состоянии напряжения в теле по всему объёму можно считать с достаточной точностью параллельным одной плоскости XOY . Плоское напряжённое состояние в процессах обработки металлов давлением может быть, например, во фланце при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала, при волочении и обжиге тонкостенных труб.

Пример: пластинка, нагруженная по боковой поверхности силами, параллельными её основаниям и равномерно распределёнными по толщине (рис. 3.8). Основания свободны от нагрузок и для них: $\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Так как пластинка тонкая, то можно считать, что эти напряжения равны нулю и по

всему объёму тела. Кроме того, из-за малости толщины, можно считать:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad u = u(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \\ v = v(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y);$$

w мала, из-за малости толщины и ею пренебрегают.

Отличие от плоской деформации в отношении напряжений лишь в условии $\sigma_z = 0$.

Дифференциальные уравнения равновесия (3.11), условия на поверхности (3.12), соотношения Коши (3.13), уравнения неразрывности деформаций (3.14) остаются без изменений.

Отличие в формулах закона Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= 2\tau_{xy}(1+\mu)/E. \end{aligned} \tag{3.15}$$

$\varepsilon_z = -\mu(\sigma_y + \sigma_x)/E$ – основание пластинки будет несколько искривляться.

ПНС характеризуется тензорами:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

При ПНС в направлении перпендикулярном основанию (вдоль Z) есть w, ε_z , в отличие от ПД. При ПД в этом направлении есть σ_z .

Таким образом, в основных уравнениях для плоской деформации и плоского напряжённого состояния отличие только в упругих постоянных закона Гука $E(E_1), \mu(\mu_1)$. Для решения задач можно пользоваться общими уравнениями и объединить две задачи в одну: плоскую задачу теории упругости.

3.9. Решение плоской задачи в напряжениях.

Функция напряжений

Решение сводится к отысканию 3-х неизвестных функций:

$$\sigma_x(x, y); \quad \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy}(x, y).$$

Для этого используются два дифференциальных уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases}$$

И уравнение неразрывности деформации (3.14), в котором заменяем деформации на напряжения посредством формул закона Гука (3.15):

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.16)$$

Исключим из этого уравнения τ_{xy} , для этого первое уравнение равновесия продифференцируем по x , а второе – по y , и почленно сложим:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

подставим в (3.16):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

или короче:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.17)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть гармоническая функция. (Гармоническими называются функции, которые удовлетворяют уравнению $\nabla^2 () = 0$).

Условие (3.17) называют *уравнением Леви*. Оно не содержит других постоянных и применимо как к ПНС, так ПД.

Следовательно, решение плоской задачи (при постоянстве объёмных сил) сводится к интегрированию трёх уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \end{cases}$$

При обязательном удовлетворении условий на поверхности:

$$\begin{cases} P_{Vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m; \\ P_{Vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m; \end{cases}$$

Решение плоской задачи в напряжениях можно упростить, сведя её к отысканию одной функции $\varphi(x, y)$, называемой *функцией напряжений Эри*.

Её выбирают с таким расчётом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия обращались в тождества:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.18) в (3.17), получим:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0$$

или, сокращая запись: $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$; $\nabla^4 \varphi = 0$. (3.19)

(3.19) – бигармоническое уравнение («набла четыре ф» двойной оператор Лапласа). Функция, удовлетворяющая уравнению (3.19), называется *бигармонической*.

Это уравнение в развёрнутом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Функция Эри имеет размерность силы.

Выразим условия на поверхности через функцию напряжений:

$$\begin{cases} P_{vx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m; \\ P_{vy} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{cases}$$

Задача сводится к отысканию одной функции $\varphi(x,y)$, удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами (в полиномах (целых функциях), в тригонометрических рядах, с помощью конечных разностей).

При произвольной форме контура пластины решение является сложной математической задачей, которая обычно решается приближённо численными методами.

Решение в полиномах осуществляется полуобратным методом: задаются функции напряжений в виде полинома, удовлетворяющего бигармоническое уравнение, а затем определяют, каким нагрузкам на контуре она соответствует.

Этим методом можно решить ряд простых задач: чистый изгиб балки, изгиб балки на двух опорах под действием равномерно распределённой нагрузки, задачу о треугольной подпорной стенке.

Полином первой степени $\varphi_1 = a_1 x + b_1 y$ как функция напряжений нас не интересует, т.к. напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

будут равны нулю.

Полиномы 2-й и 3-й степени:

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2;$$

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3.$$

Удовлетворяют бигармоническому уравнению при любых значениях коэффициентов a_3, b_3, c_3, d_3 и могут быть применимы для решения.

Для полинома 4-й степени:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{4 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Бигармоническое уравнение: $2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0$.

Можно выразить: $e_4 = -a_4 - c_4$.

Таким образом, здесь независимы только четыре коэффициента a_4, b_4, c_4, d_4 , а пятый e_4 нужно взять из полученного соотношения.

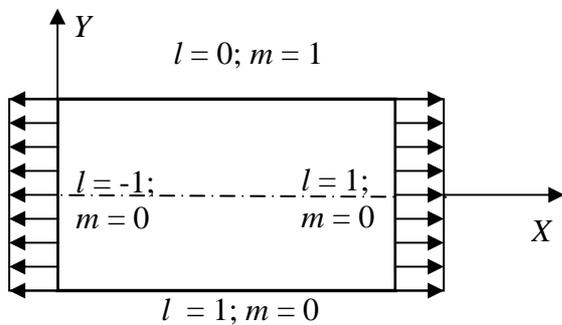


Рис. 3.9. Растяжение пластины

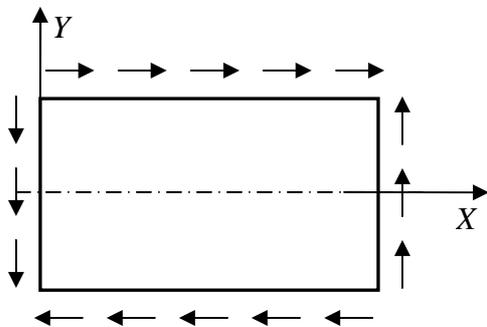


Рис. 3.10. Чистый сдвиг

Для полинома 5-й степени из 6-ти коэффициентов уже 2 будут зависимы.

Примеры использования полиномов:

1. Возьмём полином $\varphi_2 = \frac{c_2}{2} y^2$.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2c; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Из граничных условий:

$$\begin{cases} P_{vx} = \sigma_x l + \tau_{yx} m = \sigma_x l; \\ P_{vy} = \tau_{xy} l + \sigma_y m = 0. \end{cases}$$

На горизонтальных осях (рис. 3.9): $l = 0$ и $P_{vx} = P_{vy} = 0$.

На правой грани: $l = 1$ и $P_{vx} = \sigma_x = c$.

На левой грани: $l = -1$ и $P_{vx} = -\sigma_x = -c$.

Это решение соответствует *растяжению – сжатию*.

2. Полином $\varphi_2 = bxy$ соответствует *чистому сдвигу* (рис. 3.10).

$$\tau_{xy} = -b; \quad \sigma_x = \sigma_y = 0.$$

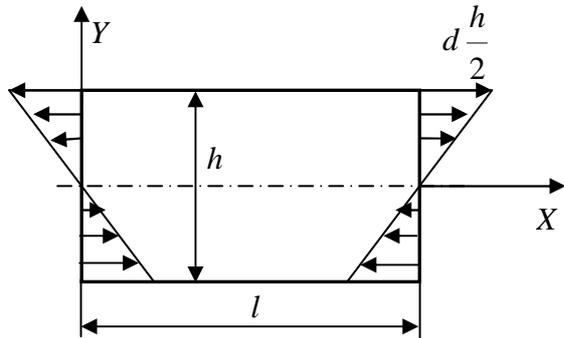


Рис. 3.11. Чистый изгиб

3. Полином $\varphi_3 = \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3$ соответствует *чистому изгибу* (рис. 3.11).

$$\sigma_x = dy \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

3.10. Решение плоской задачи в полярных координатах

При исследовании напряжённого состояния в круглых кольцах, дисках, трубах и т.п. удобно пользоваться полярными координатами r, θ (рис. 3.12).

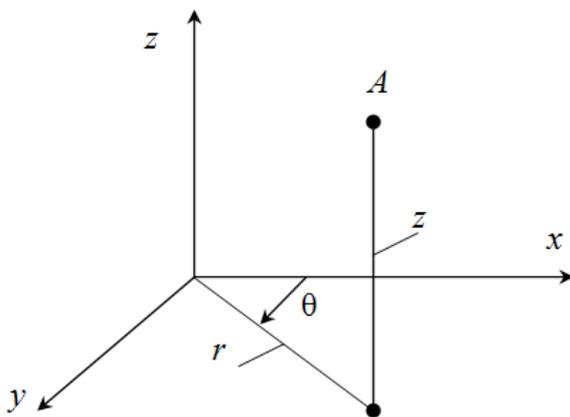


Рис. 3.12. Полярная система координат

Связь с декартовыми координатами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right).$$

Рассмотрим основные уравнения плоской задачи в полярных координатах.

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta = 0. \end{cases}$$

Геометрические соотношения Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \\ \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Физические соотношения закона Гука:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r); \\ \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta); \\ \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{cases}$$

Для плоской деформации здесь необходимо заменить упругие константы E и μ на:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Уравнения неразрывности деформации:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$$

Оператор Лапласа здесь имеет вид:

$$\nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\)}{\partial \theta^2}.$$

Здесь σ_r – радиальное напряжение; σ_θ – тангенциальное или окружное напряжение; R, θ – составляющие объёмной силы.

Общее решение этих дифференциальных уравнений можно также выразить через одну функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$.

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{cases}$$

Эта функция тоже должна удовлетворять бигармоническому уравнению:

$$\nabla^4 \varphi = 0.$$

В развёрнутом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0.$$

В инженерной практике большое распространение имеет полярно – симметричное распределение напряжений, когда напряжение не зависит от угла θ . К таким случаям относится задача о толстостенной трубе (кольце)

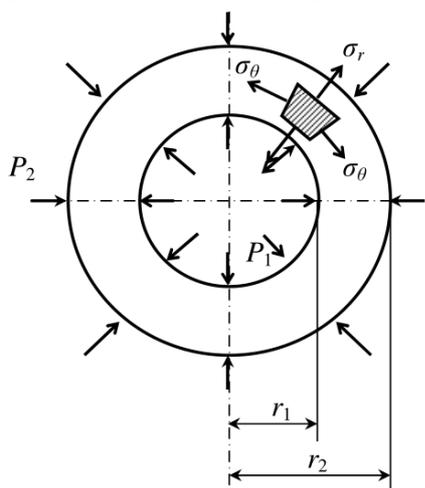


Рис. 3.13. Напряжения в толстой трубе

под действием внешнего и внутреннего давлений (задача Ламе) (рис. 3.13) и др.

При рассмотрении процессов обработки металлов давлением, таких как осадка цилиндрической заготовки, прессование и волочение прутков и труб, а также деформация круглой тонкостенной трубы, находящейся под равномерным наружным или внутренним давлением, от объемного напряженного состояния можно перейти к осесимметричному.

При этом существенно упростятся некоторые уравнения.

Дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

соотношения Коши:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}.$$

Радиальные и тангенциальные площадки будут главными – $\tau_{\theta r} = 0$.

Перемещения вдоль радиуса u не зависят от угла θ , перемещения в направлении θ отсутствуют.

3.11. Расчёт толстостенных труб

Труба (цилиндр) считается толстостенной, если толщина её стенки больше одной десятой среднего радиуса. Рассматриваем трубу под действием внешнего и внутреннего давлений (задача Ламе) (см. рис. 3.13).

Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации также симметричны относительно его оси. Это – *осесимметричная задача*.

Деформация – осесимметрична: перемещения вдоль радиуса u не зависят от угла θ , перемещения в направлении θ – v – отсутствуют.

Радиусы остаются прямыми, а окружности – окружностями.

Выделим элемент $abcd$ и рассмотрим его деформацию (рис. 3.14).

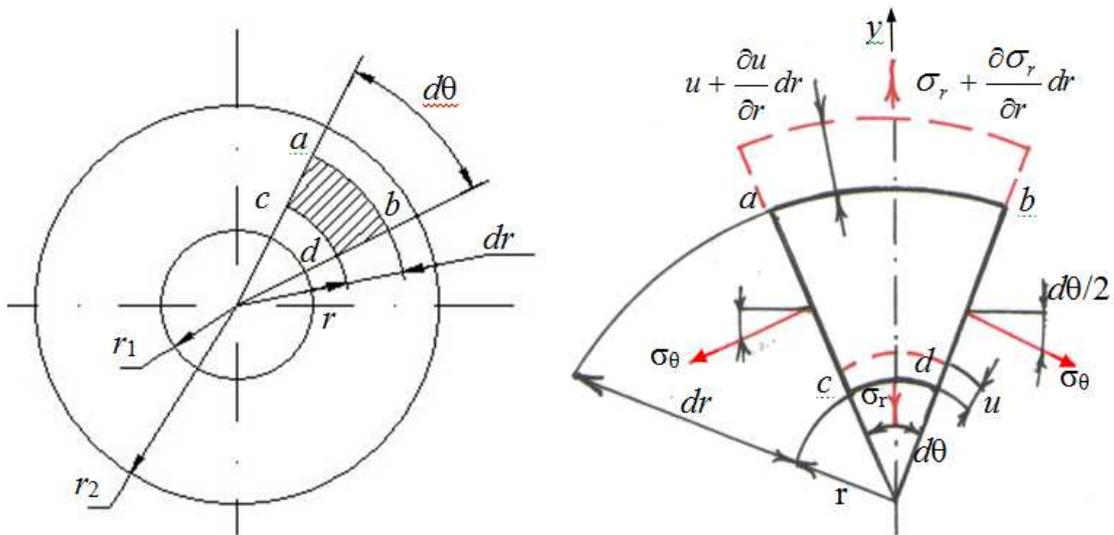


Рис. 3.14. Осесимметричная деформация трубы

Элемент $abcd$ перекашиваться не будет, и касательных напряжений на гранях нет $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$, значит – это главные площадки, а σ_r, σ_θ – главные напряжения.

Проецируем силы на ось Y . Пусть толщина элемента – dr .

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: & -\sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz + (\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr) \cdot (r + dr) dz d\theta - 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dz dr = 0; \\ & -\sigma_r \cdot r \cdot d\theta + \sigma_r dr d\theta + \sigma_r \cdot r \cdot d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \cdot dr \cdot d\theta - \\ & - 2\sigma_\theta \sin \frac{d\theta}{2} dz dr = 0; \\ & \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} r = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (3.20)$$

Это уравнение равновесия для осесимметричной задачи.

Получим геометрические соотношения (соотношения Коши).

Обозначим радиальное перемещение u . Деформация, вследствие осесимметричности задачи, происходит так, что радиусы остаются прямыми (см. рис. 3.14).

$AB = dr$ – до нагружения; $A_1B_1 = dr + du$ – после нагружения.

$$\varepsilon_r = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{dr - du - dr}{dr} = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}.$$

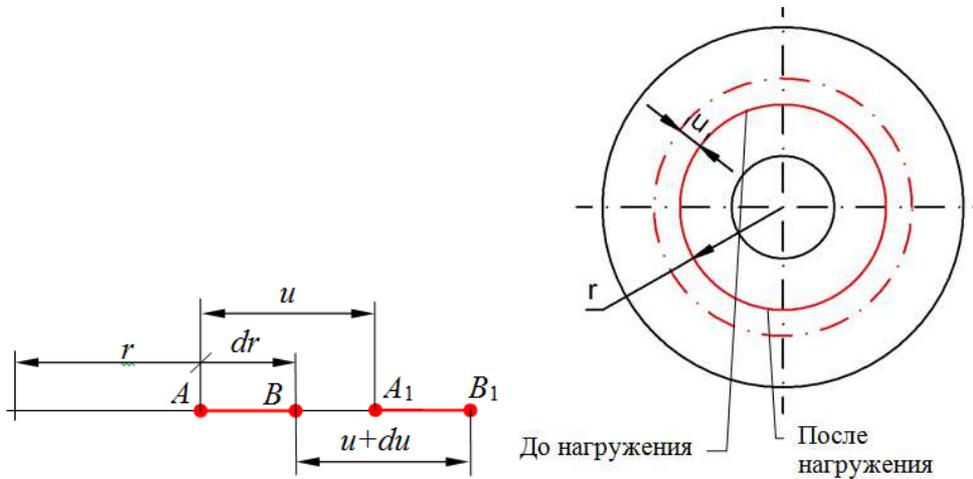


Рис. 3.15. Радиальные перемещения элемента трубы

Для осесимметричной задачи из 6 соотношений Коши остаются 2:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (3.21)$$

Физические соотношения (закон Гука):

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) \end{cases}. \quad (3.22)$$

Физические соотношения через напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r). \end{cases} \quad (3.23)$$

Подставим в (3.23) выражения (3.21) и (3.22):

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right); \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right). \end{cases} \quad (3.24)$$

Подставим (3.24) в (3.20) и получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (уравнение Эйлера):

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (3.25)$$

Представим (3.25) в виде:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} = \text{const} = A.$$

Интегрируя по r , получим общее решение уравнения:

$$u = Ar + B \frac{1}{r}. \quad (3.26)$$

Постоянные интегрирования A и B определим из граничных условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра. Подставим (3.26) в (3.24):

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) A \mu \frac{1-\mu}{r^2} B \right]. \quad (3.27)$$

При $r=r_1$ получим $\sigma_r = -p_1$; при $r=r_2$ получим $\sigma_r = -p_2$, подставляем эти условия в 1-е уравнение (3.27):

$$-p_{1(2)} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu) A \mu \frac{1-\mu}{r_{1(2)}^2} B \right].$$

Решая эти уравнения относительно A и B , получаем:

$$A = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$B = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Подставляя A и B в (3.27), получим формулы Ламе:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \mu \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}. \quad (3.28)$$

Из (3.26) получим:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r^2}. \quad (3.29)$$

Сложив два уравнения (3.28), получим:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}.$$

Сумма радиального и окружного напряжений – величина постоянная.

Осевая деформация, параллельная оси цилиндра, также постоянна на любом радиусе:

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = const.$$

Поперечные сечения цилиндра при деформации остаются плоскими.

При наличии днщ будут возникать и осевые напряжения.

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)};$$

$$N = p_1 \pi r_1^2 - p_2 \pi r_2^2.$$

Напряжения σ_r и σ_θ при этом не изменяются. К радиальным перемещениям нужно добавить:

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r.$$

Все приведённые формулы для деформаций и напряжений справедливы для сечений, достаточно удалённых от днщ. Вблизи днщ они будут искажены (деформации и напряжения).

Проанализируем частные случаи нагружения цилиндра.

1. Труба под действием только внутреннего давления (рис. 3.16):

$p_1 = p; p_2 = 0.$

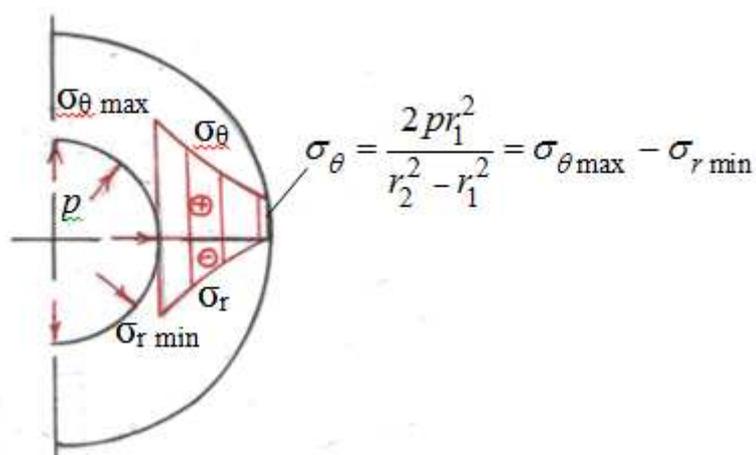


Рис. 3.16. Действие внутреннего давления

$$\sigma_{r\theta} = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \mu \frac{r_2^2}{r^2} \right) p. \quad (3.30)$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \frac{r_1^2 \cdot p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (3.31)$$

$$\sigma_\theta > 0 \text{ по толщине трубы} \quad \sigma_{\theta \max} \Big|_{r=r_1} = p \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

$$\sigma_r < 0 \text{ по толщине трубы} \quad \sigma_r \min \Big|_{r=r_1} = -p.$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 0.$$

$$\text{На наружной поверхности:} \quad \sigma_\theta \Big|_{r=r_2} = \frac{2pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}; \quad \sigma_r \Big|_{r=r_2} = 0.$$

По абсолютной величине $\sigma_\theta > \sigma_r$. Наиболее напряжённая точка – на внутренней поверхности при $r = r_1$.

Для неё:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\theta \max} - \sigma_{r \min} = p \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - (-p) = \frac{2pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Проанализируем, как влияет увеличение толщины трубы на его прочность. Пусть $r_2 \rightarrow \infty$, тогда в опасной точке:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = 2p \leq [\sigma].$$

$$\text{Тогда можно принять:} \quad [p] \leq \frac{[\sigma]}{2},$$

т.е. увеличение толщины стенки является эффективным способом только до определённого значения. Для инженерной точности расчётов 5% при $\frac{r_2}{r_1} \geq 4$ можно трубу (цилиндр) уже считать бесконечно толстой. И дальнейшее увеличение толщины не увеличивает прочность.

$$[p] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

При этом форма внешнего контура может быть произвольна (рис. 3.17).

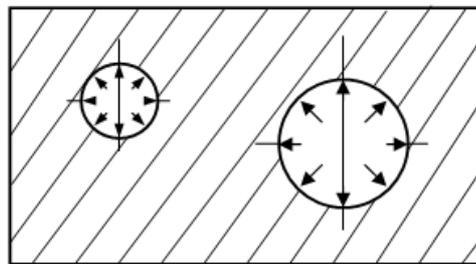


Рис. 3.17

Для таких конструкций справедливы формулы бесконечно толстого цилиндра:

$$[p] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

$$\sigma_{r\theta} = mp \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (3.32)$$

$$\sigma_\theta = |\sigma_r|,$$

т.е. в этом случае материал в любой точке находится в условиях чистого сдвига (рис. 3.18).

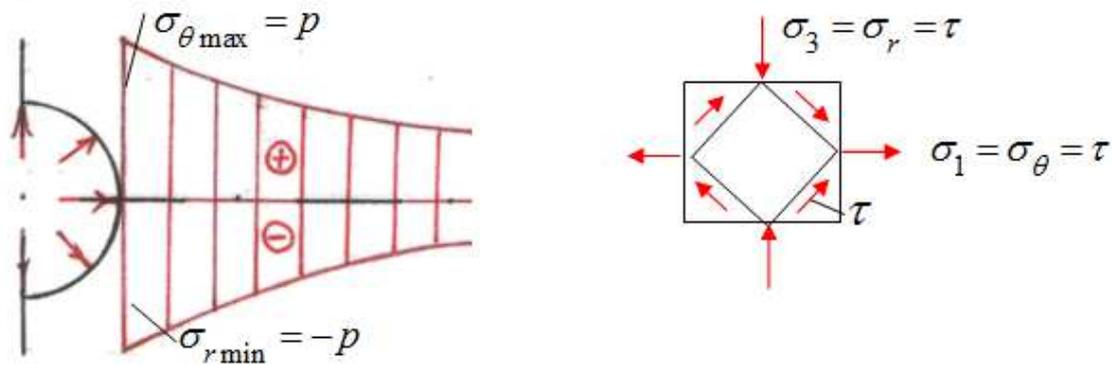


Рис. 3.18

2. Труба находится под действием только наружного давления (рис. 3.19): $p_1 = 0$; $p_2 = p$.

Оба напряжения будут сжимающими:

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \mu \frac{r_2^2}{r^2} \right) p. \quad (3.33)$$

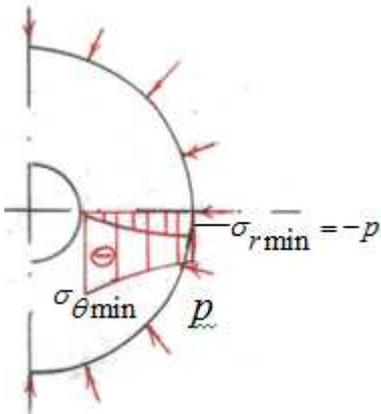


Рис. 3.19. Действие наружного давления

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \frac{r_1^2 \cdot p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot p}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r}. \quad (3.34)$$

На внутренней поверхности:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_1} = 0; \quad \sigma_\theta \Big|_{r=r_1} = -\frac{2p \cdot r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

На наружной поверхности:

$$\sigma_r \Big|_{r=r_2} = -p; \quad \sigma_\theta \Big|_{r=r_2} = -p \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

3.12. Температурные напряжения в толстых трубах

При неравномерном нагреве трубы будут возникать температурные напряжения.

Если в трубе находится нагретая среда, то температура внутренней поверхности выше температуры наружной поверхности, поэтому внутрен-

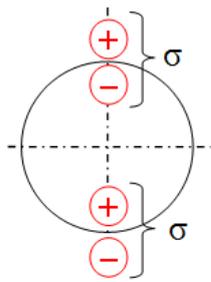


Рис. 3.20

при $t_{\text{в}} > t_{\text{н}}$

ние слой стремятся расширяться, создаются растягивающие σ_{θ} в нагретых слоях, а сами внутренние слои в результате противодействия наружных слоёв будут сжаты (рис. 3.20).

при $t_{\text{в}} < t_{\text{н}}$

Если обозначить T_1 , T_2 – температуры внутренней и наружной поверхностей трубы, соответственно; принять линейный закон изменения температуры по толщине трубы:

$$T_{(r)} = \Delta T \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}; \quad \Delta T = T_1 - T_2;$$

то формулы для температурных напряжений примут вид:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[r - \frac{r^3}{r_2^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right];$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[2r + \frac{r^3}{r_2^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right];$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right].$$

У внутренней поверхности цилиндра (при $r = r_1$):

$$\sigma_r \Big|_{r=r_1} = 0 .$$

$$\sigma_{\theta} \Big|_{r=r_1} = \sigma_z \Big|_{r=r_1} = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right].$$

У наружной поверхности цилиндра (при $r = r_2$):

$$\sigma_r \Big|_{r=r_2} = -p ;$$

$$\sigma_{\theta} \Big|_{r=r_2} = \sigma_z \Big|_{r=r_2} = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right].$$

На рисунке 3.21 показаны эпюры распределения температурных напряжений по толщине трубы при $r_1/r_2 = 0,5$; $\mu = 0,3$.

Вблизи торцов цилиндра напряжения, определяемые полученными формулами, могут иметь место лишь в том случае, если торцы будут нагружены поверхностной нагрузкой, изменяющейся в соответствии с формулой для σ_z .

При совместном действии давления и температуры напряжения суммируются (рис. 3.21):

$$\sigma_z = \sigma_z^p + \sigma_z^{\Delta T}; \quad \sigma_r = \sigma_r^p + \sigma_r^{\Delta T}; \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^p + \sigma_\theta^{\Delta T}.$$

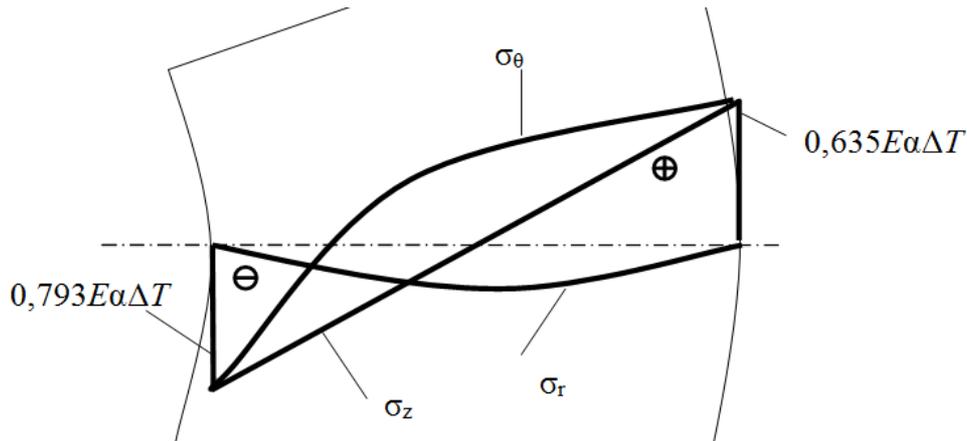


Рис. 3.21. Распределение температурных напряжений по толщине трубы при $r_1/r_2 = 0,5$; $\mu = 0,3$.

Следовательно, при действии внутреннего давления более опасен наружный нагрев, так как в этом случае в опасной точке – на внутренней поверхности, напряжения σ_θ^T и σ_θ^p суммируются (см. рис. 3.22).

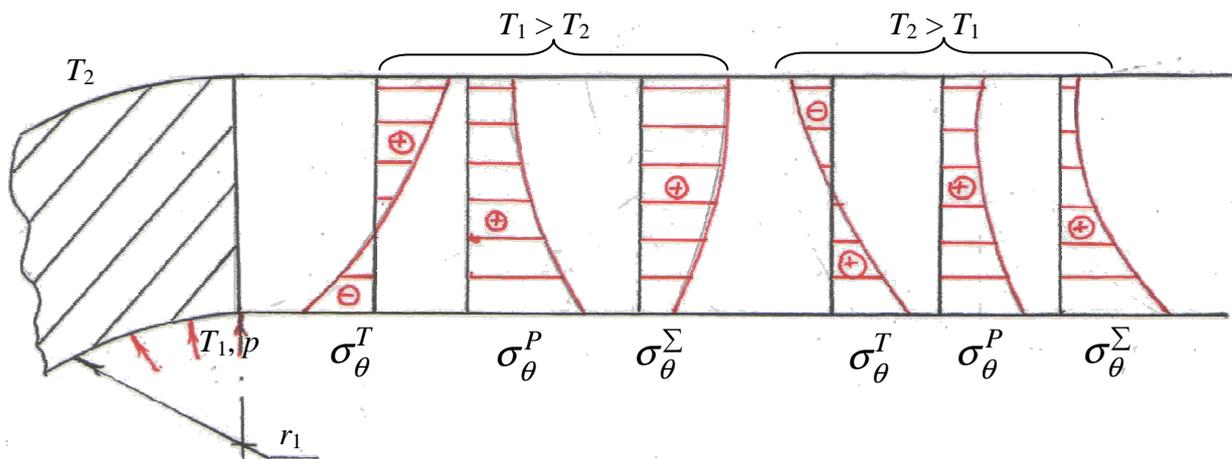


Рис. 3.22. Эпюры напряжений в стенке толстой трубы при совместном действии внутреннего давления и температуры

3.13. Расчёт составных труб

Увеличение толщины стенки трубы незначительно снижает напряжения в опасных точках, поэтому внутреннее давление не может превышать определённой величины. Распределение напряжений по толщине стенки можно сделать более равномерным и за счёт этого повысить величину допускаемого внутреннего давления, если предварительно в трубе создать напряжённое состояние, при котором внутренние слои будут сжаты, а наружные растянуты.

Такое распределение напряжений создаётся в многослойных трубах (цилиндрах), сборка которых производится посадкой нагретого наружного цилиндра на внутренний. При остывании наружный цилиндр стягивает внутренний, происходит их самоскрепление с указанным распределением напряжений по стенке. Так изготавливают оружейные стволы.

При посадке одного цилиндра на другой с натягом окружные напряжения σ_θ во внутреннем цилиндре становятся сжимающими, а в наружном – растягивающими.

На эпюрах (рис. 3.23, а) характерно:

- скачок на эпюре σ_θ ;
- перелом на эпюре σ_r .

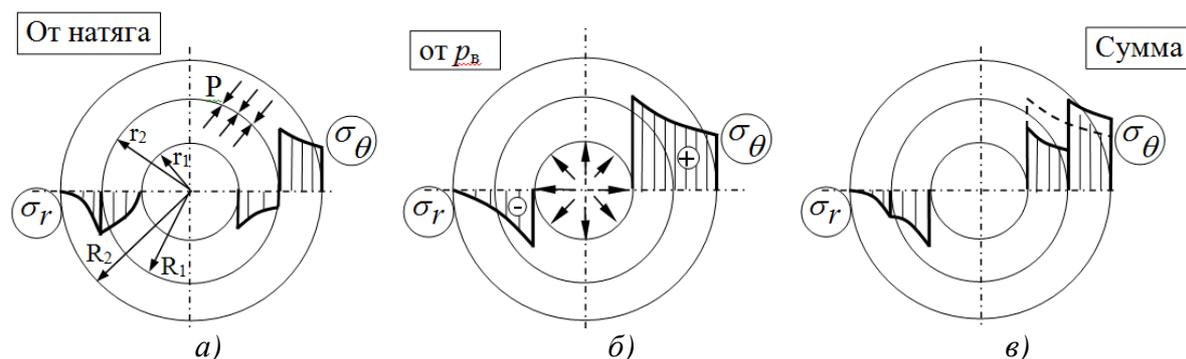


Рис. 3.23. Распределение напряжений в двухслойной трубе: от натяга (а), от внутреннего давления (б), суммарных (в)

Во внутренней трубе эти напряжения определяются по формулам (3.33) от наружного давления p от натяга. А в наружном – по (3.30) от внутреннего давления p от натяга.

Если такую составную трубу подвергнуть внутреннему давлению, то в ней возникнут дополнительные растягивающие окружные и сжимающие радиальные напряжения (рис. 3.23, б). Они находятся по формулам (3.30) как для цельной трубы.

Результирующие напряжения получим суммированием (рис. 3.23, в):

σ_r – складываются;

σ_θ – складываются в наружном, вычитаются – во внутреннем.

В составных трубах допускается давление большее, чем в цельных. Увеличивая число слоёв, можно сделать распределение σ_r ; σ_θ более равномерным.

Найдём зависимость давления p по контактной поверхности от величины натяга δ :

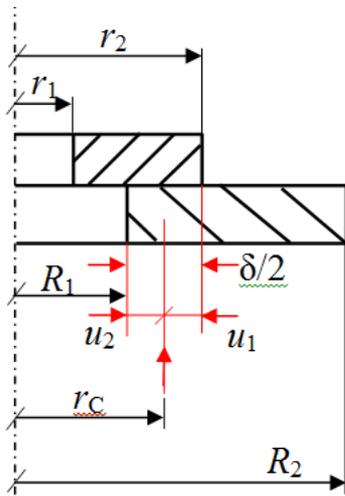


Рис. 3.24

$$\frac{\delta}{2} = r_2 - R_1; \quad \delta = 2r_2 - 2R_1.$$

При посадке одной трубы на другую наружный радиус внутренней трубы (r_2) и внутренний радиус наружной (R_1) становятся одинаковыми.

$$|u_1| + |u_2| = \frac{\delta}{2}. \quad (3.35)$$

Так как величина натяга мала по сравнению с радиусами труб будем считать: $r_2 = R_1 = r_c$ (рис. 3.24).

Контактное давление p будет наружным для внутреннего цилиндра и внутренним для наружного цилиндра. Уменьшение наружного радиуса r_2 внутреннего цилиндра находим по формулам (3.34) при $r = r_2$.

$$u_1 = -\frac{r_2}{E_1} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu_1 \right) p;$$

увеличение внутреннего радиуса R_1 наружно цилиндра по формулам (3.31) при $r = R_1$:

$$u_2 = -\frac{R_1}{E_2} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \mu_2 \right) p.$$

Если материал двух цилиндров одинаков, то $E_1 = E_2 = E$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, подставив u_1 , u_2 в (3.35) и, принимая $r_2 \approx R_1 \approx r_c$:

$$\frac{\delta}{2} = \frac{r_2}{E} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu \right) p + \frac{r_2}{E} \left(\frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} + \mu \right) p = \frac{r_2}{E} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \right) p$$

Отсюда давление на контактной поверхности от натяга:

$$p = \frac{\delta E (r_2^2 - r_1^2) (R_2^2 - r_2^2)}{4r_2^3 (R_2^2 - r_1^2)}.$$

Для числовых расчётов эту формулу удобнее представить так:

$$p = \frac{\delta E \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \left(1 - \frac{r_2^2}{R_2^2}\right)}{4r_2 \left(1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}\right)}. \quad (3.36)$$

Эта формула справедлива при напряжениях на контактной поверхности не превышающих предела пропорциональности. При пластических деформациях p будет меньше и вычисляется методами теории пластичности.

При посадке трубы на сплошной вал ($r_1 = 0$) получим:

$$p = \frac{\delta E (R_2^2 - R_1^2)}{4R_2 R_1^2}.$$

3.14. Примеры решения задач

Задача 1.

Определить относительные линейные и угловые деформации, если в исследуемой точке задан тензор напряжений

$$T\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -16 \\ 0 & -40 & 12 \\ -16 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

и другие константы упругости: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 7,7 \cdot 10^4$ МПа.

Решение.

Для нахождения компонент деформаций используем уравнения закона Гука в прямой форме. Коэффициент Пуассона найдем из формулы:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^4} - 1 = 0,3.$$

Линейная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [40 - 0,3(-40 + 20)] = 2,3 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогично находятся и другие компоненты деформаций.

Задача 2.

По заданным величинам модулей нормальной упругости и сдвига $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 10^5$ МПа определить величины коэффициента Пуассона постоянной Ламе, модуля объемной упругости.

Решение:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2,2}{2} - 1 = 0,1.$$

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \frac{0,1 \cdot 2,2 \cdot 10^5}{(1 + 0,1)(1 - 2 \cdot 0,1)} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{2,2 \cdot 10^5}{3(1 - 2 \cdot 0,1)} = 0,917 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

Ответ: $\mu = 0,1$; $\lambda = 2,5 \cdot 10^5$ МПа; $K = 9,17 \cdot 10^4$ МПа.

Задача 3.

Стальная деталь нагружена и замерены следующие упругие деформации:

$$\varepsilon_x = 0,001, \quad \varepsilon_y = 0,002, \quad \varepsilon_z = 0,003,$$

$$\gamma_{xy} = 0,0015, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0.$$

Найти напряженное состояние детали, если $E = 2,1$ МПа, $\mu = 0,33$.

Решение:

Для нахождения компонент тензора напряжений используем запись закона Гука в обратной форме. Вначале находим коэффициенты Ламе:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,33}{(1 - 2 \cdot 0,33)(1 + 0,33)} = 1,53 \cdot 10^5 \text{ МПа.}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{2(1 + 0,33)} = 7,9 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Объемная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,001 + 0,002 + 0,003 = 0,006.$$

Компоненты напряжения

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x = 1,53 \cdot 10^5 \cdot 0,006 + 2 \cdot 7,9 \cdot 10^4 \cdot 0,001 = 1080 \text{ МПа,}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 7,9 \cdot 10^4 \cdot 0,0015 = 120 \text{ МПа.}$$

Аналогично находятся и другие компоненты тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1080 & 120 & 0 \\ 120 & 1250 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.

По заданным значениям тензора напряжений и направляющих косинусов найти значение проекции поверхностных сил P_{vz} .

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -900 & 1000 & 1000 \\ 1000 & 450 & 0 \\ 1000 & 0 & 900 \end{pmatrix}; \quad l = m = 0; \quad n = 1.$$

Решение:

$$P_{vz} = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n = 900.$$

Ответ: $P_{vz} = 900$.

Задача 5.

Дана прямоугольная полоса-балка (рис. 3.25) длиной $\lambda = 2$ м, высотой $h = 1$ м и толщиной, равной 1. Начало координат O принято в середине торцевого сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz ; продольная ось Ox проходит посередине полосы-балки. Выражение для функции напряжений $\varphi(x, y) = axy^3 + bx^3y + cx^2$. Объемными силами пренебречь.

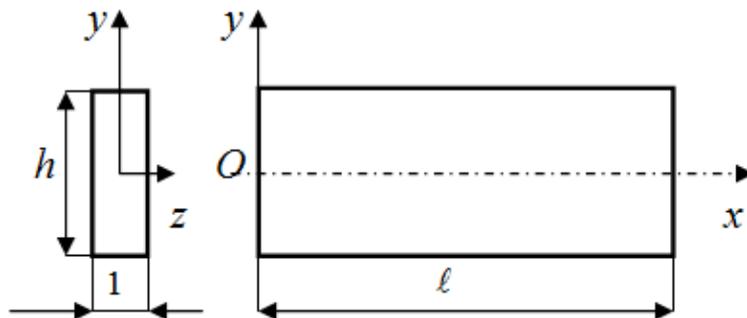


Рис. 3.25. Прямоугольная полоса-балка

Требуется:

1) Проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x, y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используют бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

2) Найти выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} решаемой задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

3) Построить эпюры напряжений σ_x , τ_{xy} для одного сечения: перпендикулярного оси Ox при $x = 1$ м.

4) Определить внешние силы (нормальные и касательные), примененные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры. В этих целях исполь-

зуют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия):

$$P_{vx} = \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{yx} \cos(y, \nu),$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu).$$

Решение:

1) Проверим, можно ли предложенную функцию $\varphi(x, y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используем бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Определяем частные производные по x , y четырежды и смешанные – дважды по x и y :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ay^3 + 3bx^2y + 2cx; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6bxy + 2c; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 6by; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3ay^2x + bx^3; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6axy; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 6ax; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 6bx; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 3ay^2 + 3bx^2.$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение:

$$0 + 2 \times 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, заданная функция $\varphi(x, y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принята для решения этой задачи.

2) Найдем выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} решаемой задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6axy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6bxy + 2c; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -3ay^2 - 3bx^2.$$

3) Построение эпюр напряжений в сечении $x = 1$.

Для этого сечения $\sigma_x = 6ay = 12y$; $\sigma_y = 6y + 4$; $\tau_{xy} = -6y^2 - 3$. По указанным выражениям для напряжений, изменяя y от $-h/2$ до $+h/2$, строим их эпюры (рис. 3.26).

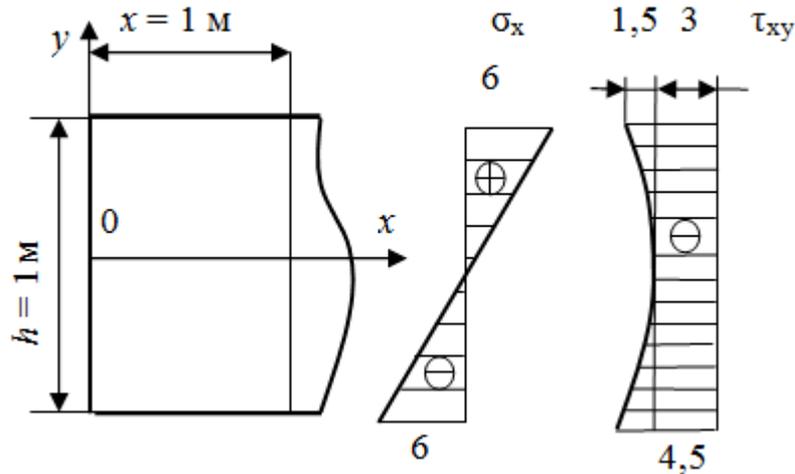


Рис. 3.26. Эпюры напряжений в сечении $x = 1$

4) Определим внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки и построим соответствующие эпюры. В этих целях используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия):

$$P_{vx} = \sigma_x \cos(x, \nu) + \tau_{yx} \cos(y, \nu),$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} \cos(x, \nu) + \sigma_y \cos(y, \nu).$$

Верхняя грань: $y = h/2 = 0,5$ м; $\sigma_x = 6x$; $\sigma_y = 3x + 4$; $\tau_{xy} = -1,5 - 3x^2$;

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, y) = 0; m = \cos(y, \nu) = \cos(y, y) = 1;$$

$$P_{vx} = \sigma_x \times 0 + \tau_{xy} \times 1 = \tau_{xy} = -1,5 - 3x^2;$$

$$P_{vy} = \tau_{xy} \times 0 + \sigma_y \times 1 = \sigma_y = 3x + 4.$$

Для сил, нормальных P_{vy} и касательных P_{vx} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 2,0$ м (рис. 3.27).

Нижняя грань: $y = -h/2 = -0,5$ м; $\sigma_x = -6x$; $\sigma_y = -3x + 4$; $\tau_{xy} = -1,5 - 3x^2$;

$$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, -y) = 0; m = \cos(y, \nu) = \cos(y, -y) = -1;$$

$$P_{vx} = \sigma_x \times 0 + \tau_{xy} \times (-1) = -\tau_{xy} = 1,5 + 3x^2;$$

$$P_{vy} = \tau_{xy} \times 0 + \sigma_y \times (-1) = -\sigma_y = 3x - 4.$$

Для сил, нормальных P_{vy} и касательных P_{vx} к этой грани, строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 2,0$ м (см. рис. 3.27).

Левая грань: $x = 0$; $\sigma_x = 0$; $\sigma_y = 4$; $\tau_{xy} = -6y^2$; $l = \cos(x, \nu) = \cos(x, -x) = -1$;

$$m = \cos(y, \nu) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$P_{vx} = \sigma_x \times (-1) + \tau_{xy} \times 0 = -\sigma_x = 0;$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} \times (-1) + \sigma_y \times 0 = -\tau_{yx} = 6y^2.$$

Для сил, нормальных P_{vx} и касательных P_{vy} к этой грани, строим их эпюры, изменяя y от $-h/2$ до $+h/2$ (см. рис. 3.27).

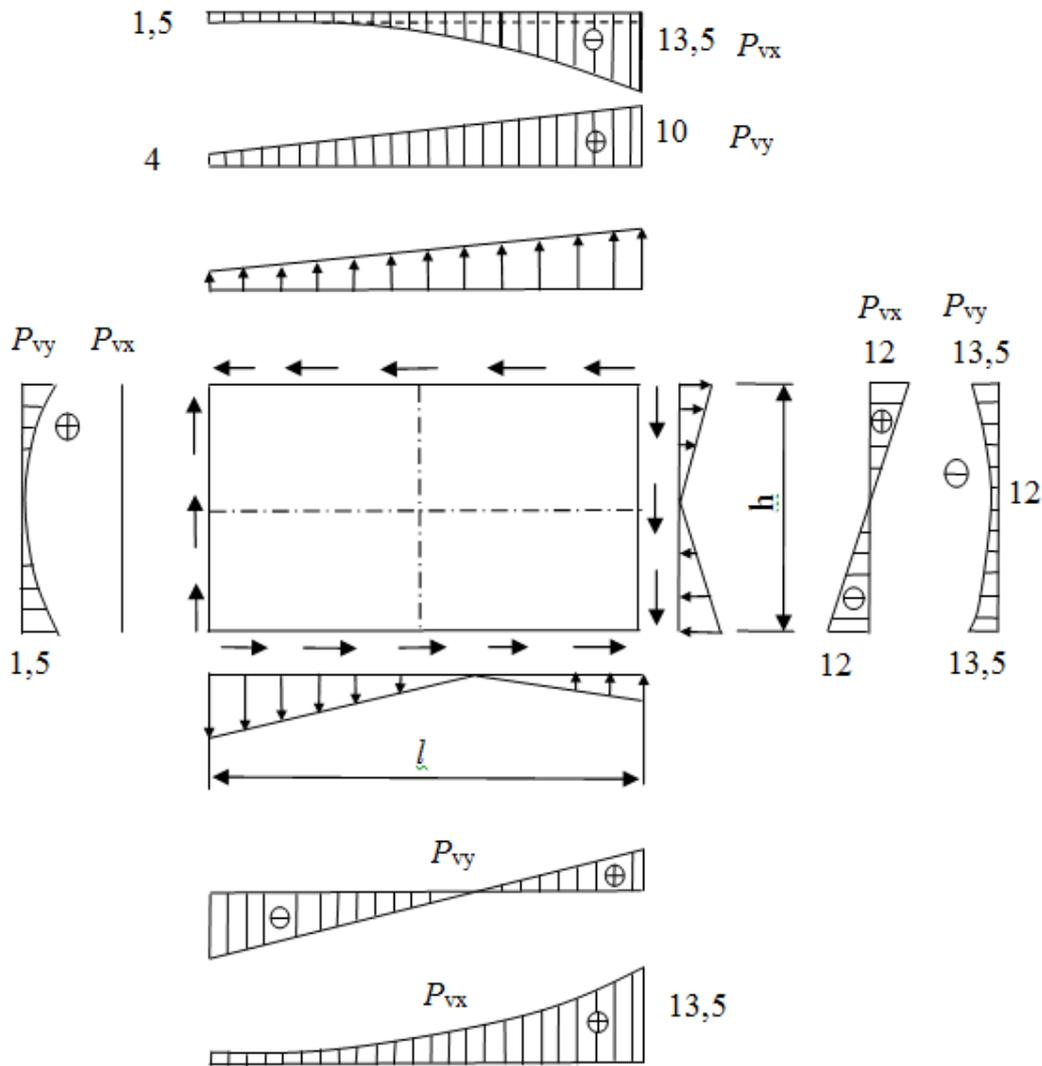


Рис. 3.27. Эпюры поверхностных сил

Правая грань: $x=1 = 2$; $\sigma_x = 24y$; $\sigma_y = 4 + 12y$; $\tau_{xy} = -6y^2 - 12$;

$l = \cos(x, \nu) = \cos(x, x) = 1$; $m = \cos(y, \nu) = \cos(y, x) = 0$;

$P_{vx} = \sigma_x \times 1 + \tau_{xy} \times 0 = \sigma_x = 24y$;

$P_{vy} = \tau_{yx} \times 1 + \sigma_y \times 0 = \tau_{yx} = -6y^2 - 12$.

Для сил, нормальных P_{vx} и касательных P_{vy} к этой грани, строим их эпюры, изменяя y от $-h/2$ до $+h/2$. Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рисунке 3.27.

3.15. Задание и варианты к расчётной работе «Плоская задача. Функция напряжений»

Дана прямоугольная полоса-балка (см. рис. 3.25) длиной λ , высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат O принято в середине торцевого сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz ; продольная ось Ox проходит посередине полосы-балки. Выражения для функции напряжений φ и числовые значения выбрать из таблицы 3.1. Объёмными силами пренебречь.

Требуется:

1) Проверить, можно ли предложенные функции $\varphi(x, y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используют бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

2) Найти выражения для напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} решаемой задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

3) Построить эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} для одного сечения: либо перпендикулярного оси Ox , либо перпендикулярного оси Oy (значения x и y заданы в табл. 3.1).

4) Определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырём граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры. В этих целях используют условия на поверхности тела (условия на контуре тела или статические граничные условия):

$$P_{vx} = \sigma_x \cos(x, v) + \tau_{yx} \cos(y, v),$$

$$P_{vy} = \tau_{yx} \cos(x, v) + \sigma_y \cos(y, v),$$

где P_{vx} , P_{vy} – проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; v – нормаль к грани; $\cos(x, v)$, $\cos(y, v)$ – направляющие косинусы нормали v .

Таблица 3.1. Исходные данные

Вариант	Функция напряжений $\varphi(x, y)$	a	b	λ	h	x	y
		M					
1	$\varphi = a(x^4 - y^4) + bx^3y + xy^3$	1	1	5	1	1	0,2
2	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	1	6	1	2	0,3
3	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	2	1	5	2	2	0,4
4	$\varphi = axy^3 + b(x^2y^2 - x^4/3)$	1	2	6	1	2	0,3
5	$\varphi = ax^3 + bx^2y + xy^2 + xy$	1	2	6	2	2	0,5
6	$\varphi = a(x^4 - y^4) + by^2 + by^2(x^2 - y^2/3)$	2	2	4	2	1	0,5
7	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	2	1	4	2	1	0,5
8	$\varphi = a(x^4 - y^4)/12 + xy(bx^2 + y^2)/3$	2	1	6	1	3	0,3
9	$\varphi = x^3y/3 + bx^2y^2/2 - by^4/6$	1	2	5	1	2	0,2
10	$\varphi = axy^3/3 + bx^2y^2/3 - bx^4/6$	2	1	5	2	2	0,4
11	$\varphi = ax^4 - 3ax^2y^2 + bxy^3$	1	2	4	1	2	0,3
12	$\varphi = ax^3y - 3bx^2y^2 + by^4$	2	1	4	2	1	0,4
13	$\varphi = ax^4 - 3(a+b)x^2y^2 + by^4$	1	1	6	1	2	0,5
14	$\varphi = axy^3 + x^3 + y^3 - bxy$	2	2	5	1	1	0,2
15	$\varphi = ax^3y + b(x^2y^2 - y^4/3)$	1	2	6	2	2	0,3
16	$\varphi = x^3y/3 + bx^2y^2/2 - by^4/12$	2	1	4	1	1	0,2
17	$\varphi = a(x^4 - y^4)/12 + xy(bx^2 + y^2)/3$	1	1	4	2	1	0,4
18	$\varphi = axy^3 + b(x^2y^2 - x^4/3)$	1	1	6	1	2	0,5
19	$\varphi = ay(x^2 + y^2) + bxy^2 + xy$	1	1	4	1	1	0,2
20	$\varphi = ax(x^2 + y^2) + bx^2y + xy$	2	2	4	1	1	0,5
21	$\varphi = ax^3 + x^3 + y^3 - bxy$	1	2	6	1	1	0,3
22	$\varphi = a(y^4 - x^4) + bxy^3 + x^2y$	1	1	4	1	1	0,2
23	$\varphi = ax^4 - 3ax^2y^2 + bxy^3$	2	1	5	1	2	0,2
24	$\varphi = ax^3y - 3bx^2y^2 + by^4$	1	2	4	1	2	0,2

3.16. Контрольные вопросы по теме «Теория упругости»

Контрольные вопросы составлены в форме тестов, необходимо выбрать правильный ответ из предлагаемых.

Вопрос №1. Сколько уравнений совместности деформаций Сен-Венана следует учитывать при решении плоской задачи?

Ответ: 1) Одно уравнение; 2) Два уравнения; 3) Три уравнения;

4) Ответ может быть дан при более конкретной постановке вопроса, т.е. для плоского напряженного состояния или же плоской деформации.

Вопрос №2. Плоская деформация имеет место, если ...

Ответ: 1) Тонкая пластина загружена по контуру силами, действующими

щими параллельно незагруженным плоскостям, не изменяющимися по толщине пластины. 2) На упругое тело, у которого один размер значительно превышает два остальных, действуют силы, расположенные в одной плоскости. 3) $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; $u \neq 0$; $v \neq 0$; $w \neq 0$. 4) Призматическое тело, у которого один размер значительно превышает два остальных, нагружено усилиями, не изменяющимися вдоль оси, направленной параллельно наибольшему размеру тела.

Вопрос №3. Какие из приведенных ниже условий соответствует случаю плоской деформации?

Ответ: 1) $w = 0$; $\varepsilon_z = 0$; $u = f(x, y)$; $v = \varphi(x, y)$.

2) $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$; $\sigma_x = f_1(x, y)$; $\sigma_y = f_2(x, y)$; $\tau_{xy} = f_3(x, y)$.

3) $w = 0$; $\varepsilon_z = 0$; $v = 0$; $u = 0$.

4) $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$; $\sigma_z \neq 0$.

Вопрос №4. Сколько геометрических уравнений (Коши и Сен-Венана) остается в случае плоского напряженного состояния?

Ответ: 1) Три уравнения; 2) Четыре уравнения; 3) Шесть уравнений; 4) Десять уравнений.

Вопрос №5. Плоское напряженное состояние реализуется, если ...

Ответ: 1) Тонкая пластина загружена по контуру силами, действующими параллельно незагруженным плоскостям, не изменяющимися по толщине пластины. 2) На упругое тело, у которого один размер значительно превышает два остальных, действуют силы, расположенные в одной плоскости

3) $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; $u \neq 0$; $v \neq 0$; $w \neq 0$. 4) Призматическое тело, у которого один размер значительно превышает два остальных, нагружено усилиями, не изменяющимися вдоль оси, направленной параллельно наибольшему размеру тела.

Вопрос №6. Какие из приведенных ниже зависимостей соответствуют плоскому напряженному состоянию?

Ответ: 1) $\begin{cases} \varepsilon_x = ((1-\mu^2)/E)(\sigma_x - (\mu/(1-\mu))\sigma_y); \varepsilon_y = ((1-\mu^2)/E)(\sigma_y - (\mu/(1-\mu))\sigma_x); \\ \varepsilon_z = 0; \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{cases}$

2) $\varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = 0$; $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_z = 0$

3) $\begin{cases} \sigma_x = (E/1-\mu^2)(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \sigma_y = (E/1-\mu^2)(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x); \sigma_z = 0; \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{cases}$

4) $\sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$; $u = 0$; $v \neq 0$; $w \neq 0$.

Вопрос №7. Какому напряженному состоянию соответствует тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x(x, y) & 0,5\gamma_{xy}(x, y) & 0 \\ 0,5\gamma_{xy}(x, y) & \varepsilon_y(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z = a + bx + cy = \varepsilon_z(x, y) \end{vmatrix}$$

Ответ: 1) Плоскому напряженному состоянию; 2) Плоской деформации; 3) Частному случаю объемной деформации, не относящемуся к плоской задаче; 4) Плоскому напряженному состоянию и плоской деформации.

Вопрос № 8. Какому напряженному состоянию соответствует тензор напряжений?

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x(x,y) & \tau_{xy}(x,y) & 0 \\ \tau_{yx}(x,y) & \sigma_y(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

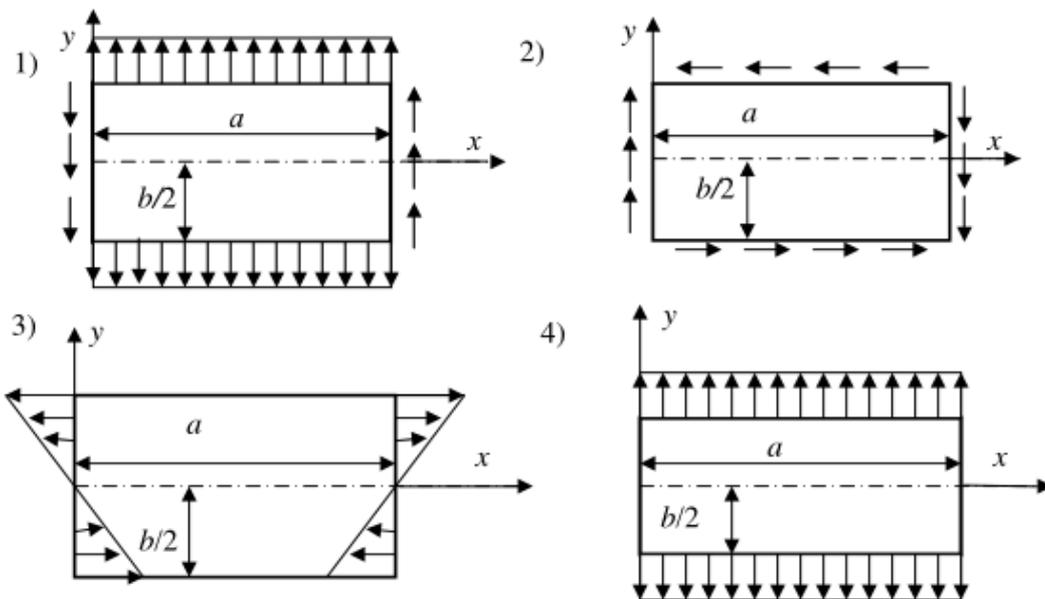
Ответ: 1) Плоскому напряженному состоянию. 2) Плоской деформации. 3) Двухосному растяжению-сжатию одновременно с чистым сдвигом в плоскостях, нормальных осям x и y . 4) Плоскому напряженному состоянию и плоской деформации.

Вопрос № 9. Какое из нижеприведенных условий исключает возможность использования функции $\varphi(x,y) = Ay^4 + 3Bx^2y^2 + Cx^4$ в качестве функции Эри?

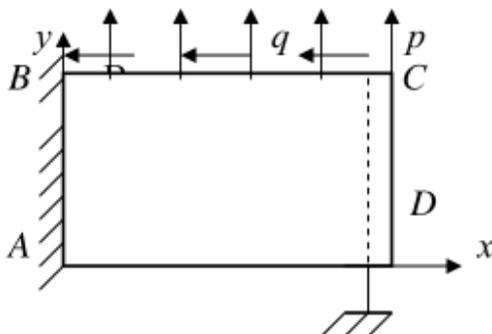
Ответ: 1) $B = 0; A = -C$; 2) $3A + B + 3C = 0$; 3) $A = B = C = 0$; 4) $3A + 3B + 3C = 0$.

Вопрос № 10. Какому из видов напряженного состояния полосы соответствует функция напряжений $F = x^2 \sqrt{2c} + 2y$?

Ответ:



Вопрос № 11. Выбрать правильный вид граничных условий на краю пластины, где направляющие косинусы нормали $\lambda = 0; m = -1$.



Ответ:

- 1) $u = 0; v = 0$;
- 2) $P_{vx} = -q; P_{vy} = p$;
- 3) $v = 0; \sigma_x = 0$;
- 4) $\sigma_y = 0; \tau_{yx} = 0$.

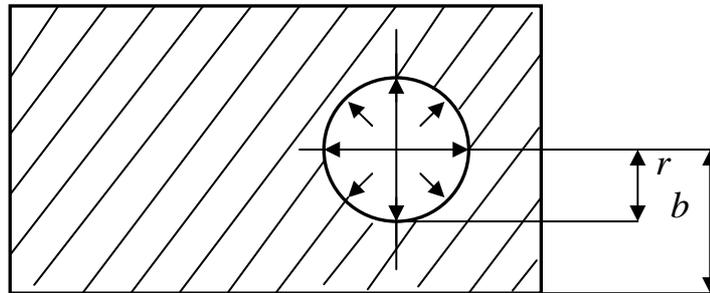
Вопрос № 12. Для бесконечно толстой трубы ($r_2 \rightarrow \infty$), находящейся под действием только внутреннего давления p , определить величину допускаемого давления $[p]$, если известен предел текучести материала трубы $\sigma_T = 300 \text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности $n_T = 2$.

Ответ: 1) 150 МПа; 2) 72,5 МПа; 3) 75 МПа; 4) 300 МПа.

Вопрос № 13. В толстостенном цилиндре при действии наружного давления $p = 10 \text{ МПа}$ на наружной поверхности возникают окружные нормальные напряжения $\sigma_\theta|_{r=r_2} = -16,7 \text{ МПа}$. Определить напряжения на внутренней поверхности $\sigma_\theta|_{r=r_1}$?

Вопрос № 14. Чему равна величина допускаемого внутреннего давления для бесконечно длинного тела, форма поперечного сечения которого представлена на рисунке, если известен предел текучести материала $\sigma_T = 400 \text{ МПа}$ и коэффициент запаса прочности $n_T = 2$.

$b/r \geq 4$



Ответ: 1) 400 МПа. 2) 200 МПа. 3) 100 МПа. 4) 50 МПа.

Вопрос №15. Функция напряжений имеет вид

$$F(x,y) = Ax^2y + Bx^4 + Cx^2y^2.$$

Чему равно касательное напряжение τ_{xy} ?

Ответ: 1) $-2x(A + 2Cy)$; 2) $2Ax + 4Cxy$; 3) $2A + 12Bx^2 + 2Cy^2$; 4) $2Cx^2$.

4. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

В теории пластичности решается та же задача, что и в теории упругости – определение напряжённо-деформированного состояния в деформируемом твердом теле, но с учетом пластического деформирования тела. Поэтому между указанными теориями имеется много общего. В частности, общими являются уравнения равновесия, геометрические уравнения, уравнения совместности деформаций. Только вместо обобщенного закона Гука, используемого в теории упругости, в теории пластичности применяются другие физические соотношения.

4.1. Условия перехода металла в пластическое состояние

Начало пластических деформаций является следствием перехода от одной формы устойчивого равновесия в атомной решетке зерна к другой. При линейном напряженном состоянии, например при растяжении, можно считать, что пластическое состояние наступает тогда, когда нагрузка вызывает нормальные напряжения, равные пределу текучести σ_T . Если по мере деформации металл упрочняется, то для дальнейшего развития пластической деформации необходимо увеличить напряжение, величина которого определяется по кривой упрочнения. Если упрочнение отсутствует, то пластическая деформация протекает при постоянном напряжении. Отсюда следует, что возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями σ_T .

Перенести эти рассуждения и на случай трехмерного (объемного) напряженного состояния сложнее.

Напряженное состояние в рассматриваемой точке описывается шестью компонентами тензора напряжений – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Количество возможных комбинаций напряжений, при которых тело переходит в пластическое состояние, является бесконечным. Точная форма поверхности раздела упругих и пластических деформаций неизвестна. В связи с этим приходится прибегать к гипотезам по переходу тела в пластическое состояние, а поверхность раздела строить на основе гипотез. Эти гипотезы и соответствующие уравнения, которые являются их математической формулировкой, называют критериями (условиями) пластичности.

К ним предъявляются следующие требования:

1. Критерий пластичности должен иметь форму инварианта, так как характеризуется уравнением состояния тела, которое выражает некоторый физический закон. А это значит, что в это уравнение в качестве независимых переменных должны входить инварианты.

2. В уравнение критерия пластичности, помимо компонентов тензора напряжений, должны входить компоненты материального тензора, характеризующие механические свойства металла и определяющие возникновение пластических деформаций при простейших напряженных состояниях.

3. Критерий пластичности должен быть действительным для любых элементарных объемов металла, находящихся в произвольном объёмном напряжённом состоянии.

Исходя из этих требований для изотропного металла, критерий пластичности не должен зависеть от направлений и может быть представлен в виде функции инвариантов девиатора напряжений:

$$F [I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K,$$

где K – постоянная пластичности.

Как показывают опыты, при всестороннем равномерном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают. Поэтому критерий пластичности можно представить как функцию только второго и третьего инвариантов девиатора напряжений:

$$F [I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K.$$

Если известны главные нормальные и максимальные касательные напряжения,

$$F (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K \quad \text{или} \quad F (\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}) = K.$$

Из многочисленных предложенных в разное время критериев пластичности наибольшее применение в обработке металлов давлением получили условия Треска и Мизеса. Рассмотрим их более подробно той исторической последовательности, как они появились.

4.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения

Французский инженер Треска в 1868 г., основываясь на собственных опытах по истечению металла через отверстия, впервые высказал предположение (гипотезу) о том, что в момент начала пластической деформации во всех точках деформируемой среды максимальные касательные напряжения имеют одно и то же значение для данного металла, т.е.

$$|\tau_{\max}| = K.$$

Французский ученый Сен-Венан в 1871 г. дал математическую формулировку этого условия для плоской деформации.

Если $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$, то

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = K.$$

При линейном напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_T$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, откуда постоянная текучести $K = 0,5\sigma_T$.

В объёмном случае условие Треска можно записать:

$$\begin{aligned} 2 \left| \tau_{12} \right| &= \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right| \leq \sigma_T; \\ 2 \left| \tau_{23} \right| &= \left| \sigma_2 - \sigma_3 \right| \leq \sigma_T; \\ 2 \left| \tau_{13} \right| &= \left| \sigma_1 - \sigma_3 \right| \leq \sigma_T. \end{aligned} \tag{4.1}$$

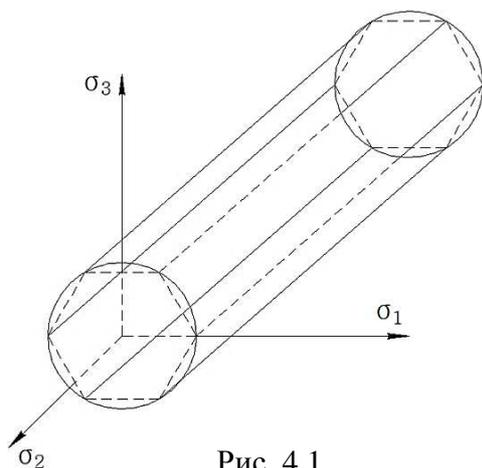


Рис. 4.1

Если все три условия выполняются со знаком неравенства, то металл находится в упругом состоянии. Чтобы металл находился в состоянии текучести, в одном или двух из этих уравнений должен быть знак равенства.

Окончательное условие Треска можно сформулировать следующим образом. *Переход тела из упругого состояния в пластическое не зависит от вида напряженного состояния и происходит тогда, когда по крайней мере одно или два касательных*

напряжений достигают максимального значения, определяемого только механическими свойствами металла.

Из уравнений (4.1) вытекает следующее соотношение между пределом текучести при сдвиге и растяжении:

$$2\tau_T = \sigma_T.$$

В трехмерном пространстве главных нормальных напряжений условие Треска интерпретируется поверхностью пластичности, представляющей собой правильную шестигранную призму бесконечной длины, ось которой равнонаклонена к трем главным осям $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (рис. 4.1).

Так как поверхность пластичности описывается тремя уравнениями, то она ограничена шестью попарно параллельными плоскостями.

Поскольку возникновение пластических деформаций определяется не величиной главных нормальных напряжений, а их разностью, длина призмы не ограничена. Если точка, изображающая напряженное состояние в главных осях, находится внутри призмы, то материальная частица металла деформируется упруго. Когда изображающая точка попадает на поверхность призмы, в частице металла возникает пластическая деформация.

При плоском напряженном состоянии уравнения (4.1) принимают вид:

$$\begin{cases} |\sigma_1| \leq \sigma_T; \\ |\sigma_3| \leq \sigma_T; \\ |\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_T. \end{cases} \quad (4.2)$$

На плоскости $\sigma_1\sigma_3$ эти уравнения определяют шестиугольник (рис. 4.2).

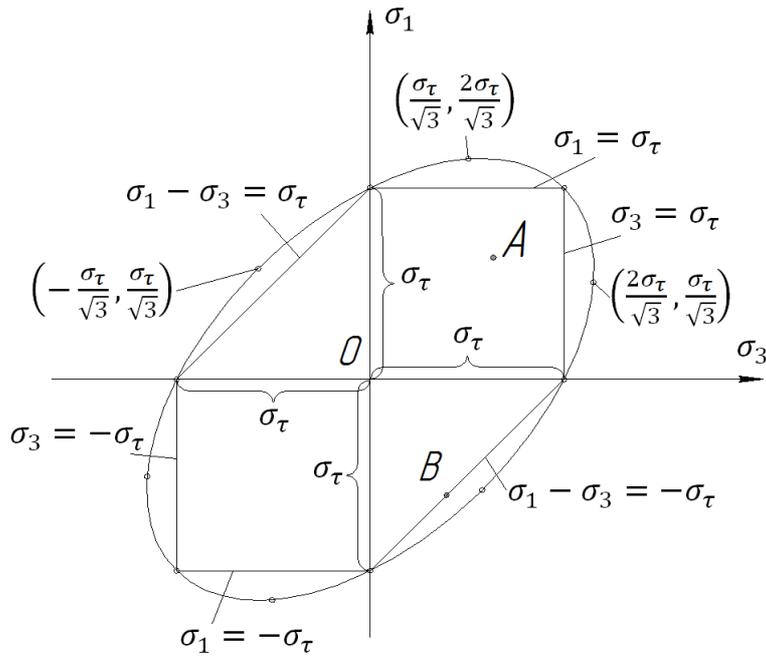


Рис. 4.2

Если точка A , изображающая напряженное состояние, находится внутри шестиугольника, частица металла деформируется упруго. Если точка B лежит на контуре шестиугольника, в частице возникает пластическая деформация. В соответствии с условиями при линейном напряженном состоянии шестиугольник отсекает на осях координат отрезки, равные σ_{τ} .

При плоском деформированном состоянии σ_2 всегда является средним главным нормальным напряжением $\sigma_2 = 0,5 (\sigma_1 + \sigma_3)$ и из трех уравнений (4.1) остается одно:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_{\tau}. \quad (4.3)$$

В произвольных осях, если ось z совпадает с главной осью, условие пластичности имеет вид:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_{\tau}^2. \quad (4.4)$$

Условие пластичности Треска-Сен-Венана в общем удовлетворительно характеризует наступление пластического состояния металла и согласуется с наблюдениями по линиям Людерса-Чернова.

4.3. Условие постоянства интенсивности напряжений

В объемных задачах использование условия Треска в виде трех уравнений наталкивается на большие математические трудности. Часто нелегко установить заранее, какое из трех касательных напряжений достигает максимального значения, а также учесть влияние среднего главного напряжения. Эти обстоятельства привели немецкого ученого Мизеса в 1913 г. к гипотезе об описании вокруг шестигранной призмы в координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кругового цилиндра (см. рис. 4.1), уравнение которого имеет вид

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) отличается от второго инварианта девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$, интенсивности касательных напряжений, октаэдрического касательного напряжения только постоянным множителем. Поэтому условие пластичности Мизеса носит в литературе несколько наименований: «условие постоянства интенсивности напряжений», «условие постоянства интенсивности касательных напряжений», «условие постоянства октаэдрического касательного напряжения».

Условие пластичности Мизеса инвариантно к преобразованию координат. Оно учитывает влияние среднего главного напряжения на условие перехода упругой деформации в пластическую. Третий инвариант девиатора напряжений не оказывает влияния на наступление пластического состояния.

Если главные напряжения в каком-либо элементе тела таковы, что они определяют точку, лежащую на поверхности цилиндра (рис. 4.1), то элемент металла будет находиться в пластическом состоянии.

Если главные нормальные напряжения в элементе таковы, что они определяют точку, лежащую внутри цилиндра, то элемент будет находиться в упругом состоянии. Так как количество точек на поверхности цилиндра бесконечно большое, то существует неограниченное количество комбинаций величин главных напряжений, удовлетворяющих условию (4.5).

В дальнейшем выяснилось, что раньше Мизеса это условие как условие прочности было предложено польским ученым Губером в 1904 г. Позднее Генки в 1923 г. заметил, что левая часть условия Губера имеет простой физический смысл, соответствуя с точностью до постоянного множителя удельной энергии упругого изменения формы тела:

$$U_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (4.6)$$

Откуда получаем условие пластичности Мизеса (4.5). Таким образом, пластическая деформация тела начинается тогда, когда запас удельной энергии упругого изменения формы достигает определенной для данных условий величины независимо от схемы напряженного состояния. Поэтому условие Мизеса в отличие от вышеприведенных часто называют энергетическим условием пластичности или уравнением Губера-Мизеса-Генки.

Приняв при плоском напряженном состоянии в произвольных осях $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, уравнение (4.5) примет вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2. \quad (4.7)$$

В главных осях выражение (4.7) запишется так:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_T^2.$$

Приняв при плоском деформированном состоянии в произвольных осях $\sigma_z = 0,5(\sigma_x - \sigma_y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, уравнение (4.5) примет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\sigma_T^2/3. \quad (4.8)$$

В главных осях при $\sigma_2 = \sigma_{cp}$ выражение (4.8) запишется так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_T = 2\sigma_T/\sqrt{3} = 2K, \quad (4.9)$$

откуда $\tau_T = \sigma_T/\sqrt{3}$.

Сравнивая (4.3) и (4.9), видим, что для плоского деформированного состояния рассмотренные условия пластичности совпадают, но по Треска $\tau_T = 0,5\sigma_T$, а по Мизесу $\tau_T = \sigma_T/\sqrt{3}$.

Рассмотрим графики условий начала пластических деформаций по критериям Мизеса и Треска для плоского напряженного состояния.

Уравнение (4.7) описывает эллипс с центром в начале координат σ_1 и σ_3 (см. рис. 4.2). Условия пластичности Треска описывают шестиугольник. В точках с координатами $(0, \sigma_T)$, $(\sigma_T, 0)$, $(0, -\sigma_T)$, $(-\sigma_T, 0)$ критерии пластичности Мизеса и Треска совпадают. Эти точки соответствуют линейному напряженному состоянию растяжения или сжатия. Другие четыре точки на эллипсе $(\sigma_T/\sqrt{3}, 2\sigma_T/\sqrt{3})$; $(2\sigma_T/\sqrt{3}, \sigma_T/\sqrt{3})$; $(-\sigma_T/\sqrt{3}, 2\sigma_T/\sqrt{3})$; $(-2\sigma_T/\sqrt{3}, -\sigma_T/\sqrt{3})$ соответствуют плоскому напряженному и плоскому деформированному состояниям. В этих точках критерии Треска и Мизеса отличаются друг от друга на 15 %. В точках $(\sigma_T/\sqrt{3}, -\sigma_T/\sqrt{3})$; $(-\sigma_T/\sqrt{3}, \sigma_T/\sqrt{3})$, соответствующих чистому сдвигу, критерии отличаются друг от друга примерно на 8 %.

Таким образом, рассматриваемые критерии пластичности Треска и Мизеса близки друг к другу. Мизес считал условие Треска точным, а свое – приближенным. Однако многочисленные эксперименты показали, что условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических металлов лучше, чем условие Треска.

Использование энергетического условия пластичности в полной форме (4.5) приводит к большим математическим трудностям, связанным с его нелинейностью. Например, при плоской по напряжениям осесимметричной задаче уравнение статического равновесия имеет вид (3.20):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Для решения его совместно с условием пластичности желательно, чтобы условие пластичности было выражено в виде разности $(\sigma_r - \sigma_\theta)$. Однако условие пластичности имеет вид:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + \sigma_r^2 - \sigma_\theta^2 = 2\sigma_T^2.$$

или

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_T^2.$$

Запишем показатель вида напряженного состояния Лоде-Надаи:

$$v_\sigma = \frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}.$$

Разрешим его относительно среднего напряжения

$$\sigma_2 = \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (4.10)$$

Энергетическое условие пластичности в главных осях напряжений имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Подставим в него (4.10) и получим:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (3 + \nu_\sigma^2) = 4\sigma_T^2.$$

Откуда получим:
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Это уравнение запишем в виде:
$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_T, \quad (4.11)$$
 где β – коэффициент Лоде

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Если среднее главное нормальное напряжение равно одному из крайних, то есть $\sigma_2 = \sigma_1$ или $\sigma_2 = \sigma_3$, то $\beta = 1$, а условие (4.11) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T,$$

то есть совпадает с условием пластичности Треска Сен-Венана.

Максимальную величину коэффициент β имеет при плоском деформированном состоянии, когда $\sigma_2 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\nu_\sigma = 0$, $\beta = 2/\sqrt{3} = 1,155$ (рис. 4.3).

В этом случае $\sigma_1 - \sigma_3 = 1,155\sigma_T$ и разница между обоими условиями пластичности наибольшая. Как видно, эта наибольшая разница невелика, т.е. влияние σ_2 на переход из упругого состояния в пластическое несущественно.

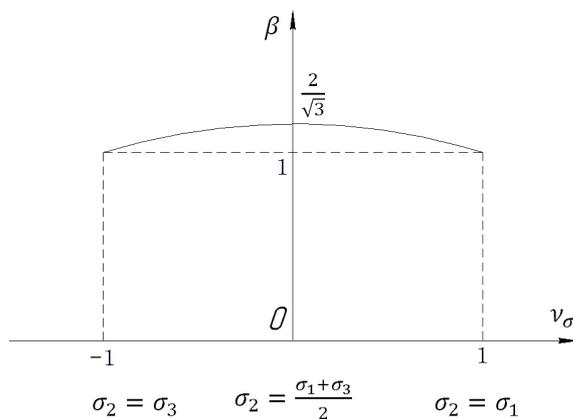


Рис. 4.3

Энергетическое условие пластичности часто используют при расчетах процесса обработки металлов давлением в виде (4.11), где
$$2/\sqrt{3} \leq \beta \leq 1.$$

Если принять максимальное значение β , то (4.11) можно рассматривать как приближенную запись энергетического условия пластичности.

Использование условия пластичности в упрощенной линейной форме записи (4.11) не дает однозначного решения, так как не всегда известно точное значение β . Однако отдельные

задачи, в частности осесимметричное деформирование тонкостенных оболочек, удастся решить, если использовать параметрическое представление условия пластичности Мизеса.

Рассмотрим вначале случай изотропного тела. Как показал А. Надаи, энергетическое условие пластичности изотропного тела

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2$$

геометрически интерпретируется эллипсом с углом наклона осей 45° (см. рис. 4.2) и может быть записано, как уравнение эллипса, в параметрической форме через $\cos\psi$, где ψ – функция, через которую выражены напряжения σ_1 и σ_2 . Пределы изменения этой функции устанавливаются исходя из знаков действующих напряжений или, другими словами, из условий конкретной задачи.

4.4. Условие упрочнения

Пластическая деформация приводит к упрочнению металла, предел его текучести повышается (рис. 4.4). Если образец растягивать из начального состояния, то при $\sigma_1 = \sigma_T$ в образце возникает пластическая деформация ε_{A}^n . Произведем нагружение образца до точки A , а затем полную его разгрузку до точки N . Если теперь вновь растягивать образец из упрочненного состояния, то нагружение будет совпадать с прямой NA . Пластическая деформация возникает в образце в точке A , когда соблюдается условие $\sigma_1 = \sigma_A$. В связи с этим σ_T называют начальным, а σ_A – текущим пределом текучести при линейном напряженном состоянии.

Текущий предел текучести зависит от предыдущей пластической деформации и позволяет легко различать при одноосном растяжении *нагружение*, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией, и *разгрузку*, происходящую чисто упруго.

Если по достижении точки A приращение напряжения $d\sigma_1$ таково, что $\sigma_1 > \sigma_A$, произойдет нагружение, а если $\sigma_1 < \sigma_A$, то произойдет разгрузка.

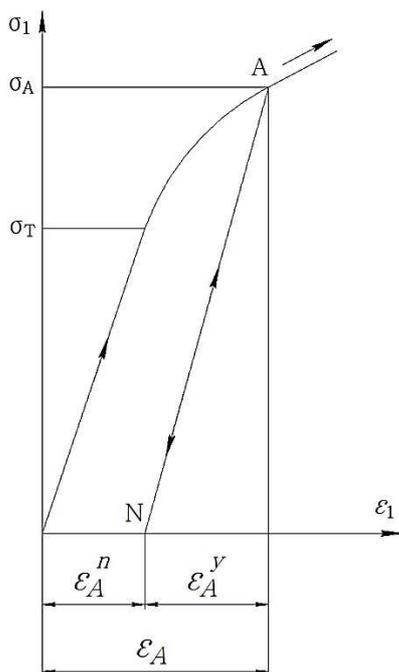


Рис. 4.4

При переходе к сложному напряженному состоянию рассматривают поверхность нагружения (рис. 4.5). В шестимерном пространстве напряжений σ_{ij} уравнение поверхности текучести Σ_T является границей области.

Если точка, изображающая напряженное состояние, лежит внутри области, ограниченной Σ_T , частица ведет себя как упругое тело. Если точка находится на поверхности текучести Σ_T , в частице возникают пластические деформации. Граница Σ_T представляет собой выпуклую поверхность совокупности пределов текучести для всевозможных напряженных со-

стояний. Начало координат соответствует нулевым напряжениям.

С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения Σ , совпадающая в начальном (неупрочненном) состоянии с поверхностью текучести Σ_T , расширяется и смещается.

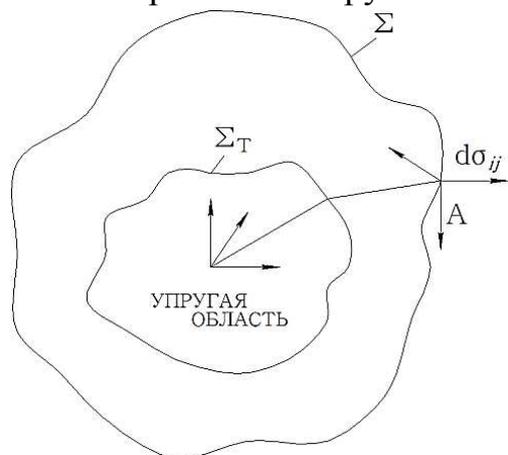


Рис. 4.5

Допустим, что в точке A пластически деформируемого упрочняемого тела напряжения σ_{ij} получили приращения $d\sigma_{ij}$. Если вектор $d\sigma_{ij}$ направлен наружу к поверхности нагружения Σ , происходит нагружение частицы. Если же вектор $d\sigma_{ij}$ направлен внутрь поверхности нагружения Σ , то происходит разгрузка. Если вектор $d\sigma_{ij}$ лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения Σ , в частице произойдут нейтральные изменения, сопровождающиеся упругими деформациями.

Рассмотрим некоторые простые формы поверхности нагружения.

Изотропное упрочнение. В этом случае упрочнение материала происходит одинаково во всех направлениях и не зависит от среднего напряжения σ_{cp} . Тогда поверхность нагружения можно задать в виде

$$F[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = \varphi(q), \quad (4.12)$$

где $\varphi(q)$ – возрастающая положительная функция, q – параметр упрочнения, характеризующий предыдущую деформацию.

Если предположить, что условие (4.12) содержит только второй инвариант девиатора напряжений, то условие (4.12) запишем в виде

$$\sigma_i = \varphi(q).$$

Оно представляет собой круговую цилиндрическую поверхность, равнонаклоненную к главным осям. В процессе пластической деформации радиус поверхности увеличится и в зависимости от выбора параметра q можно получить различные текущие поверхности нагружения.

Особый интерес представляет случай, когда в качестве меры упрочнения принимается величина достигнутой интенсивности деформацией ε_i (*деформационная гипотеза упрочнения*):

$$\sigma_i = E'(\varepsilon_i) \varepsilon_i. \quad (4.13)$$

где $E'(\varepsilon_i)$ – некоторая характерная для данного металла функция, иногда называемая модулем пластичности.

Если в координатах σ_i, ε_i построить кривую, то для упругого и пластического состояний получим одну и ту же зависимость для различных напряженных состояний, называемую *единой кривой* (рис. 4.6).

Здесь E' – модуль пластичности,

$\sigma_i = E\varepsilon_i$ – упругая область,

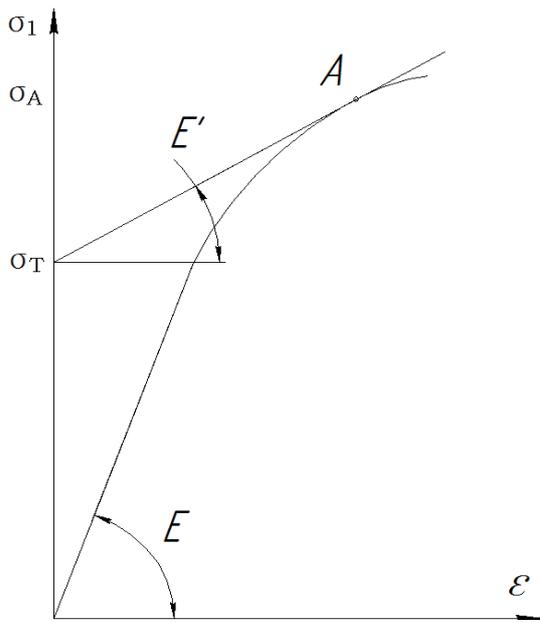


Рис. 4.6

$\sigma_i = E' \varepsilon_i$ – пластическая область.

Разница между E и E' состоит в том, что E – величина постоянная (константа материала), а E' – величина переменная, зависящая от упрочнения, температуры, скорости деформации и т.п.

За меру упрочнения q иногда берут накопленную пластическую деформацию или так называемый параметр Удквиста:

$$q = \int d\varepsilon_i^n,$$

где $d\varepsilon_i^n$ – интенсивность приращения пластических деформаций.

В главных осях $d\varepsilon_i^n$ имеет вид:

$$d\varepsilon_i^n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1^n - d\varepsilon_2^n)^2 + (d\varepsilon_2^n - d\varepsilon_3^n)^2 + (d\varepsilon_3^n - d\varepsilon_1^n)^2}$$

За меру упрочнения q может быть принята и удельная работа пластической деформации частицы (энергетическая гипотеза упрочнения) на всем пути пластического деформирования:

$$q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n.$$

Энергетическое условие упрочнения является более общим, чем предыдущее условие, и подтверждается опытами для более широкого класса нагружения. Однако оно не учитывает деформационной анизотропии и может быть использовано лишь для сравнительно несложных путей нагружения.

При изотропном упрочении поверхность нагружения равномерно расширяется, оставаясь подобной самой себе. Эффект Баушингера при этом не описывается, поскольку σ_T в прямом OA^+ и обратном OA^- направлениях нагружения одинаковы по величине (рис. 4.7, а).

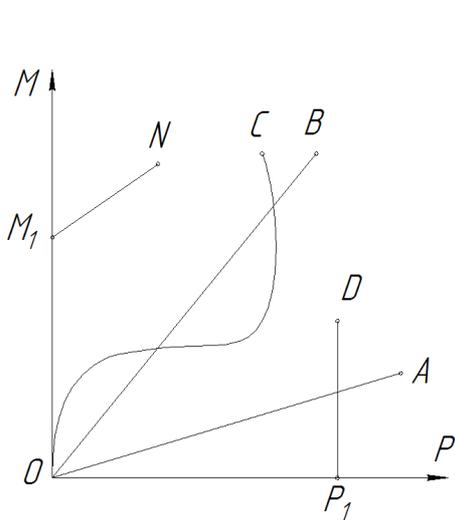


Рис. 4.8

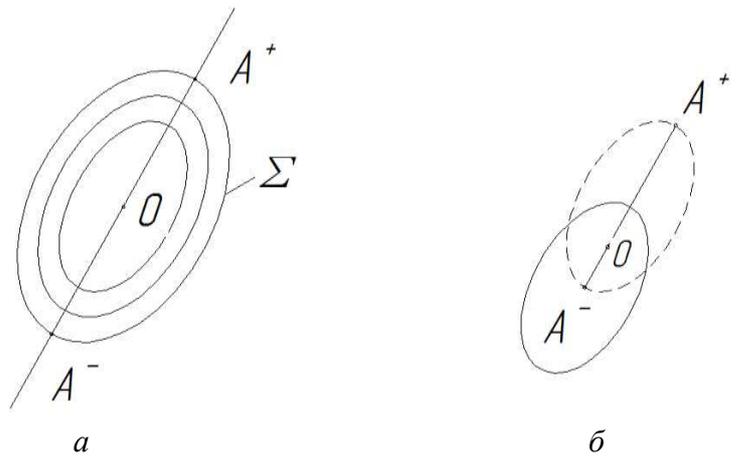


Рис. 4.7

Трансляционное упрочнение. Поверхность нагружения испытывает жесткое смещение в направлении деформирования (рис. 4.7, б). Сплошная линия – начальное положение, пунктирная – положение после деформации. Если теперь вновь нагрузить металл, то σ_T в направлении предыдущей деформации (OA^+) возрастает – произошло упрочнение. В обратном направлении (OA^-) σ_T падает (произошло разупрочнение). Эта схема качественно описывает эффект Баушингера.

Уравнение поверхности нагружения имеет вид:

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = K,$$

где a_{ij} – координаты центра поверхности нагружения.

Наиболее простой вариант выбора a_{ij} : линейное упрочнение

$$a_{ij} = c \varepsilon_{ij}^n,$$

где c – положительная константа, характерная для данного материала; ε_{ij}^n – компоненты пластической деформации.

Перенос и расширение. Комбинация двух предыдущих случаев приводит к более полной схеме нагружения, т.е.

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q).$$

Это уравнение удовлетворительно описывает упрочнение металла в довольно широких границах изменения пути нагружения.

4.5. Простое и сложное нагружение

Нагружение частицы называется простым, если все компоненты тензора напряжений σ_{ij} или внешние силы возрастают от начального состояния пропорционально одному параметру, т.е.

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^o,$$

где σ_{ij}^o – постоянный тензор; λ – переменный скалярный параметр.

В противном случае нагружение называется сложным. Примерами простого нагружения в $P + M$ – опытах являются лучи OA и OB , примерами сложного нагружения траектории – OC , OM_1N , OP_1D (рис. 4.8).

При простом нагружении коэффициент Лодэ-Надаи v_σ , положение главных осей T_σ не меняется в процессе нагружения.

Теорема А.А. Ильюшин о простом нагружении: для того чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагружаемого внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру, нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m,$$

где A и m – характеристики металла.

При простом нагружении в каждой точке тела $v_\sigma = v_\varepsilon = \text{const}$.

Это справедливо для тела любой формы, при любом количестве и любых направлениях внешних сил.

Для упругого тела последовательность его нагружения внешними силами какой-либо роли не играет, так как имеет место однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями независимо от того, каким образом они созданы. В упругопластических телах ситуация оказывается принципиально отличной. Для упругопластического тела существенен не только характер напряженного состояния в его точке, но и путь, по которому оно было создано. В зависимости от этого может значительно меняться деформированное состояние в одних и тех же точках тела.

Это наглядно видно при простом растяжении (рис. 4.9). Одному и тому же напряжению σ_T^* могут соответствовать деформации $00_1, 00_2, 00_3$ и т.д.

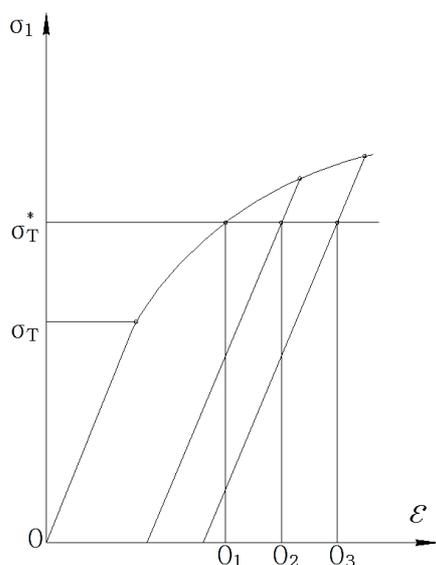


Рис. 4.9

4.6. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации

При определении технологических параметров обработки металлов давлением, связанных с точностью получения формы, необходимо знать, как поведет себя материал после снятия всех внешних сил, т.е. знать характер его разгрузки. Теоретический анализ точностных параметров проводится на основе теоремы о разгрузке А.А. Ильюшина.

Рассмотрим одноосное растяжение образца и его разгрузку (рис. 4.10).

Предположим, что в растянутом образце в точке B возникло напряжение σ_B . Причем $\sigma_B > \sigma_T$. Этому напряжению соответствует деформация ε_B . Если теперь частично разгрузить образец на $\sigma_{\text{разг}}$, то в образце останутся остаточные напряжения $\sigma_{\text{ост}} = \sigma_B - \sigma_{\text{разг}}$.

Напряжению $\sigma_{\text{ост}}$ соответствует деформация $\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_B - \varepsilon_{\text{разг}}$.

Как показывает опыт, если при разгрузке тело подчиняется закону Гука, то $\varepsilon_{\text{разг}}$ можно определить по формуле

$$\varepsilon_{\text{разг}} = \sigma_{\text{разг}} / E .$$

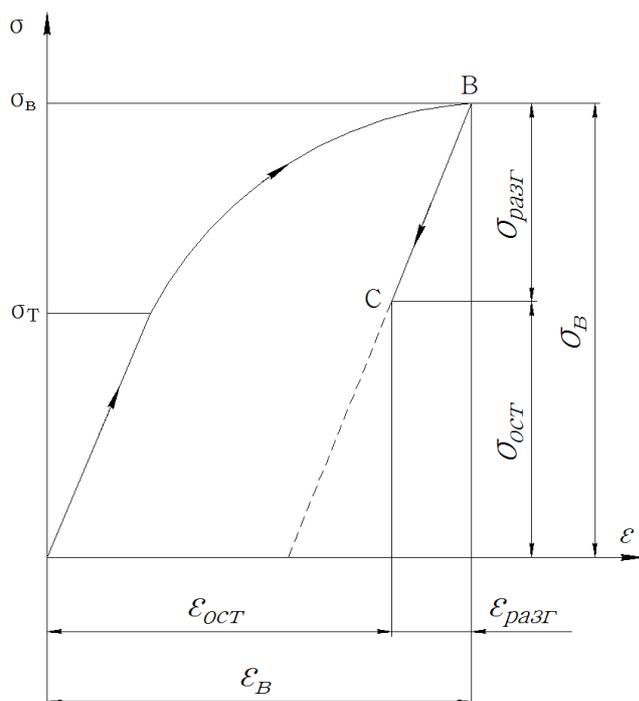


Рис. 4.10

Таким образом, при вычислении остаточных деформаций необходимо из полной деформации, соответствующей наибольшему напряжению, вычесть упругую деформацию, соответствующую значению напряжения, на величину которого уменьшилось наибольшее напряжение.

А.А. Ильющин распространил эту закономерность и на случай сложного напряженного состояния для определения остаточных деформаций, напряжений или перемещений частиц тела. Теорема о разгрузке звучит так: перемещения точек тела, а также деформации и напряжения в определенный момент разгрузки равны разностям между их значениями в

момент начала разгрузки и упругими перемещениями, деформациями, напряжениями, которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки.

Для технологических расчетов наиболее важно следствие из теоремы. При полном снятии внешних сил для определения остаточных перемещений, деформаций, напряжений нужно решить пластическую задачу для данных внешних сил, а также для этих же сил решить упругую задачу. Затем взять разность этих решений.

Допустим, что при нагружении тела были достигнуты напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} . Тогда после полной разгрузки, когда все внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения $\sigma_{ij}^{\text{ост}}$ и остаточные деформации $\varepsilon_{ij}^{\text{ост}}$, равные

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{\text{ост}} &= \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^* , \\ \varepsilon_{ij}^{\text{ост}} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^* , \end{aligned}$$

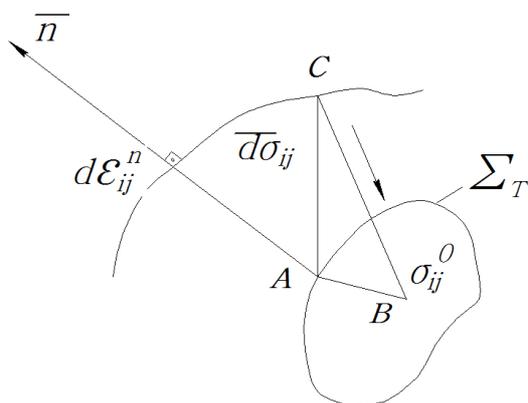


Рис. 4.12

Произведем нагружение в упругой области по линии BA . Точка A лежит на поверхности Σ_T , соответствующей началу пластического течения. Из точки A произведем бесконечно малое догружение $d\sigma_{ij}$ до точки C (вектор AC), что вызовет пластическую деформацию $d\varepsilon_{ij}^n$. Вернемся теперь в точку B . Согласно постулату Друкера за весь цикл нагружения и разгрузки $BACB$ добавочные напряжения $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$ и $d\sigma_{ij}$ выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^n > 0, d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n > 0.$$

Из постулата Друкера следует, что поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращение пластических деформаций, $d\varepsilon_{ij}^n$ направлен по нормали к ней.

4.8. Ассоциированный закон течения

Как только возникают пластические деформации, определяющие уравнения теории упругости перестают быть верными. В силу того, что пластическая деформация зависит от истории нагружения материала, в теории пластичности соотношение между напряжениями и деформациями очень часто формулируется через приращения деформаций:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^y + d\varepsilon_{ij}^n.$$

Для вывода уравнений, связывающих приращения компонент деформации с компонентами напряжений, применяется ассоциированный закон течения.

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями компонент напряжений. Поэтому приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n$ также является функцией компонент напряжений. Однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности $F(\sigma_{ij}) = K$. Поэтому условие максимума функции приращения работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n$ по способу множителя Лагранжа запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n - d\lambda F) = 0,$$

где $d\lambda$ – множитель Лагранжа. Отсюда следует:

$$d\varepsilon_{ij}^n = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.15)$$

Это соотношение является математическим выражением ассоциированного (с условием пластичности) закона течения.

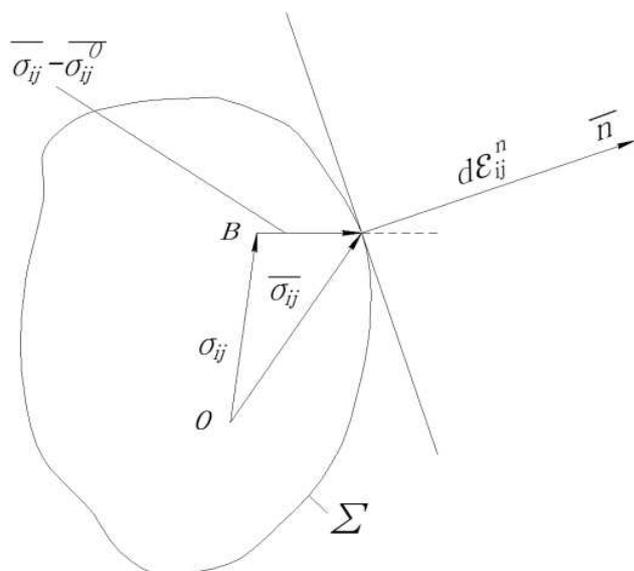


Рис. 4.13

Поясним полученный результат геометрически. Из соотношения (4.14) следует, что скалярное произведение двух векторов $(\underline{\sigma}_{ij} - \underline{\sigma}_{ij}^o)$ и $d\varepsilon_{ij}^n$ положительно, то есть угол между ними острый (рис. 4.13).

Так как точка B может быть взята по обе стороны от вектора $\underline{\sigma}_{ij}$, то поверхность нагружения Σ выпукла, а вектор приращения пластической деформации $d\varepsilon_{ij}^n$ направлен по нормали к поверхности нагружения.

Только при выполнении этих двух условий угол между векторами $(\underline{\sigma}_{ij} - \underline{\sigma}_{ij}^o)$ и $d\varepsilon_{ij}^n$ будет острым.

Поскольку направляющие косинусы нормали к поверхности пропорциональны частным производным от уравнения поверхности по координатам, приходим к соотношению (4.15).

4.9. Теория малых упругопластических деформаций

Эта теория разработана А.А. Ильюшиным. Она устанавливает связь между напряжениями и деформациями и применима при условии простого нагружения. Деформации являются достаточно малыми, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь.

Кроме того, деформации являются упругопластическими, когда в одних частях тела возникают только упругие, в других – пластические деформации.

В основе теории лежат следующие гипотезы:

1. Объемная деформация элемента тела всегда является упругой и связана со средним напряжением такой же зависимостью, как и при упругой деформации: $\sigma_{cp} = K \theta$ или $\sigma_{cp} = 3K\varepsilon_{cp}$.

Часто твердое тело полагают несжимаемым, тогда

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{cp} = 0.$$

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя (подобны между собой) ψ :

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon$$

В развернутом виде:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{xy} = \psi 0,5 \gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{yz} = \psi 0,5 \gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{zx} = \psi 0,5 \gamma_{zx}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр ψ через интенсивности напряжений и деформаций σ_i и ε_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{\psi}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \psi \frac{3}{2} \varepsilon_i, \end{aligned}$$

откуда $\psi = 3\sigma_i / (2\varepsilon_i)$.

После подстановки связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}) 2\sigma_i / (3\varepsilon_i), \quad \tau_{xy} = \gamma_{xy} \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}) 2\sigma_i / (3\varepsilon_i), \quad \tau_{yz} = \gamma_{yz} \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = (\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}) 2\sigma_i / (3\varepsilon_i), \quad \tau_{zx} = \gamma_{zx} \sigma_i / (3\varepsilon_i).$$

Это и есть физические уравнения теории малых упругопластических деформаций. Они играют такую же роль, как уравнения обобщенного закона Гука. Но в отличие от последних, они являются нелинейными.

Когда пластически деформированное тело предполагается несжимаемым, то уравнения примут вид

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \sigma_{cp}) 3\varepsilon_i / (2\sigma_i), \quad \gamma_{xy} = \tau_{xy} 3\varepsilon_i / \sigma_i,$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \sigma_{cp}) 3\varepsilon_i / (2\sigma_i), \quad \gamma_{zy} = \tau_{zy} 3\varepsilon_i / \sigma_i,$$

$$\varepsilon_z = (\sigma_z - \sigma_{cp}) 3\varepsilon_i / (2\sigma_i), \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz} 3\varepsilon_i / \sigma_i.$$

3. Интенсивность напряжений σ_i является для заданного материала вполне определенной функцией от интенсивности деформаций ε_i :

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

Вид этой функции определяется механическими свойствами материала и не зависят от характера напряженного состояния. Функция $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ действительна как для упругой, так и пластической области (гипотеза единой одной кривой). Кривую $\sigma_i = E(\varepsilon_i)$ строят на основании опытных данных при простом растяжении.

Теория располагает:
 тремя дифференциальными уравнениями статического равновесия, являющимися едиными для упругой и пластической областей:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

шестью геометрическими уравнениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = 0,$$

шестью физическими уравнениями:

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_\varepsilon,$$

уравнением для расчета ε_i и зависимостью $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$.

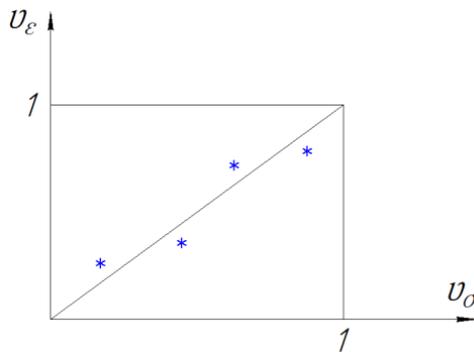


Рис. 4.14

Всего имеем 17 уравнений с 17 неизвестными ($U_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_i, \varepsilon_i$).

Решение задачи будет такое, когда для каждой точки деформированного тела удовлетворяются все уравнения. Кроме того, на границе тела должны быть выполнены контурные условия:

$$S_k = \sigma_{jk} n_j.$$

Экспериментальные исследования подтверждают корректность теории (рис. 4.14).

Решение задач пластичности по теории малых упругопластических деформаций, как и задач упругости, можно получить двумя основными методами: в перемещениях или в напряжениях.

В плоских и осесимметричных задачах число уравнений уменьшается. Например, при плоском напряженном состоянии их будет восемь:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\varepsilon_x \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\varepsilon_y \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\varepsilon_z \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} \sigma_i / (3\varepsilon_i),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2},$$

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i).$$

4.10. Теория пластического течения

Теория пластического течения устанавливает связь между бесконечно малыми приращениями пластической деформации и напряжениями.

Она основывается на следующих гипотезах:

1. Соблюдается объемный закон Гука:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3K} \sigma_{cp} = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_{cp}.$$

2. Полные приращения компонент деформации равны сумме приращений упругих и пластических деформаций, т.е.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^y + d\varepsilon_x^n, \quad d\gamma_x = d\gamma_{xy}^y + d\gamma_{xy}^n.$$

Индексы y и n означают соответственно упругую и пластическую деформации.

В соответствии с первой гипотезой отсюда следует равенство:

$$d\varepsilon_{cp}^n = d\varepsilon_x^n + d\varepsilon_y^n + d\varepsilon_z^n = 0.$$

Это условие можно интерпретировать как несжимаемость материала в пластическом состоянии.

Девiator приращений пластических деформаций имеет вид:

$$D_{d\varepsilon^n} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yx}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n & d\varepsilon_y^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zy}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{xz}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n & d\varepsilon_z^n \end{pmatrix}.$$

3. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций и девиатора напряжений равны с точностью до бесконечно малого скалярного множителя: $d\lambda$:

$$D_{d\varepsilon^n} = d\lambda D_\sigma.$$

В развернутом виде это равенство записывается так:

$$d\varepsilon_x^n = d(\sigma_x - \sigma_{cp}), \quad 0,5d\gamma_{xy}^n = d\lambda \tau_{xy},$$

$$d\varepsilon_y^n = d(\sigma_y - \sigma_{cp}), \quad 0,5d\gamma_{yz}^n = d\lambda \tau_{yz},$$

$$d\varepsilon_z^n = d(\sigma_z - \sigma_{cp}), \quad 0,5dy_{xz}^n = d\lambda \tau_{xz}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр $d\lambda$ через интенсивности σ_i и $d\varepsilon_i^n$ (интенсивности приращений пластической деформации):

$$\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{1}{d\lambda} d\varepsilon_i^n.$$

Отсюда следует:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_i} d\varepsilon_i^n.$$

4. Соотношение между параметром упрочнения и интенсивностью σ_i не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Возьмем в качестве параметра упрочнения параметр Удквиста:

$$q = \int d\varepsilon_i^n.$$

Тогда

$$\sigma_i = \Phi(q) = \int d\varepsilon_i^n.$$

Интенсивность напряжений σ_i является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряженного состояния. Найдем эту зависимость, воспользовавшись диаграммой растяжения материала.

При одноосном растяжении имеем

$$\sigma_i = \sigma_1, \quad d\varepsilon_i^n = d\varepsilon^n.$$

По отношению к чисто пластическим деформациям материал несжимаем, поэтому

$$d\varepsilon_2^n = d\varepsilon_3^n = -0,5d\varepsilon_1^n.$$

Тогда

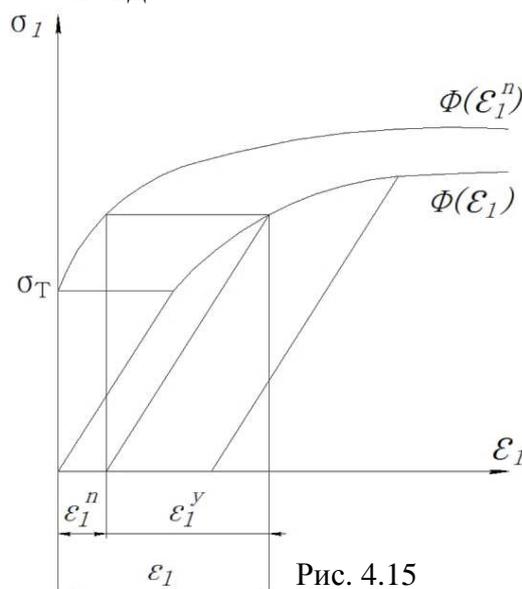


Рис. 4.15

$$q = \int d\varepsilon_i^n = \varepsilon^n,$$

$$\sigma = \Phi(\varepsilon_i^n) = \Phi(\varepsilon^n),$$

$$d\varepsilon_i^n = d\varepsilon^n.$$

Теперь график зависимости $\Phi(\varepsilon^n)$ трудно построить по диаграмме растяжения, для чего в любой точке ее нужно найти величину упругой деформации ε^y (рис. 4.15).

Построенная таким образом кривая и является графиком функции $\Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right)$.

Уравнения теории пластического течения оказываются значительно сложнее уравнений теории малых упруго-

пластических деформаций. При простом нагружении эти теории дают одинаковые решения. В случае сложного нагружения результаты, полученные с помощью теории пластического течения, лучше согласуются с экспериментальными данными, и поэтому эта теория находит применение при решении задач в случаях сложных нагружений.

4.11. Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса

Теория Сен-Венана – Леви – Мизеса относится к группе теорий течения и устанавливает зависимость между компонентами тензора скоростей деформаций. Для плоской задачи основные уравнения получены Сен-Венаном (1871), для пространственного случая – Леви, а затем Мизесом.

Основные гипотезы теории:

1. Главные оси напряжений совпадают с главными осями скоростей деформаций (в законе Гука $D_\sigma = 2GD_\xi$ G заменили на λ): $D_\sigma = 2\lambda D_\xi$, где λ – модуль пластичности, величина переменная и неизвестная.

В развернутом виде

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_x - \xi_{cp}), \quad \tau_{xy} = \lambda \eta_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_y - \xi_{cp}), \quad \tau_{zy} = \lambda \eta_{zy},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_z - \xi_{cp}), \quad \tau_{zx} = \lambda \eta_{zx}.$$

2. В пластической области выполняется условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 3\xi_{cp} = 0.$$

Тогда физические уравнения примут вид

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_x - \xi_{cp}), \quad \tau_{xy} = \lambda \eta_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_y - \xi_{cp}), \quad \tau_{zy} = \lambda \eta_{zy},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda(\xi_z - \xi_{cp}), \quad \tau_{zx} = \lambda \eta_{zx},$$

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2\lambda \partial v_x / \partial x, \quad \tau_{xy} = \lambda (\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x),$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2\lambda \partial v_y / \partial y, \quad \tau_{zy} = \lambda (\partial v_y / \partial z + \partial v_z / \partial y),$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2\lambda \partial v_z / \partial z, \quad \tau_{zx} = \lambda (\partial v_z / \partial x + \partial v_x / \partial z).$$

3. Интенсивность нормальных (или касательных) напряжений постоянна в состоянии текучести:

$$\sigma_i = \sigma_T = \text{const},$$

или

$$\tau_i = \sqrt{3}\sigma_T/2 = \text{const},$$

или есть для каждого материала функция интенсивности скоростей деформаций (или интенсивности скоростей деформации сдвига):

$$\sigma_i = \Phi(\xi_i)$$

или

$$\tau_i = f(\gamma_i),$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T.$$

Модуль λ получается следующим образом. Подставим в выражение σ_i значения физических уравнений:

$$\sigma_i = \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + 6(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)},$$

откуда

$$\lambda = \sigma_i / (3\xi_i).$$

Напряжения должны удовлетворять уравнениям движения сложной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + x_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

4.12. Выводы

В процессе обработки металлов давлением при расчетах напряженно-деформированного состояния важно знать внешние нагрузки, при которых в деформируемом теле впервые появляются пластические деформации. Условие, которому должны удовлетворять напряжения в заданной точке тела, чтобы в ней появились пластические деформации, называется условием (критерием) пластичности.

При линейном напряженном состоянии условие пластичности имеет вид $\sigma_1 = \sigma_T$. При сложном напряженном состоянии по предложению французских ученых Треска и Сен-Венана металл переходит в пластическое состояние, когда в нем наибольшее касательное напряжение достигает некоторого предельного значения $\tau_{\max} = \tau_T$. Мизес и Генки в качестве условия пластичности предложили условие постоянства интенсивности напряжений $\sigma_i = \sigma_T$. Практика показала, что оба условия пластичности близки меж-

ду собой и довольно правильно определяют начало пластической деформации, причем условие пластичности Мизеса оказывается более точным. Оба условия пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса (часто называемое энергетическим) принимают, что наступление пластичности не зависит от среднего напряжения и схемы напряженного состояния, а определяется свойствами деформируемого металла.

При исследовании пластической деформации тела огромное значение имеет характер нагружения тела. При простом нагружении в каждой точке тела внешние силы и напряжения возрастают пропорционально одному и тому же параметру. В противном случае нагружение будет сложным. Согласно теореме А.А. Ильюшина о простом нагружении для несжимаемого материала интенсивности напряжений и деформации связаны между собой степенной зависимостью вида $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$.

При объемном напряженном состоянии поверхность нагружения является границей между упругими и пластическими деформациями. С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения расширяется и смещается. Расширение поверхности нагружения есть следствие упрочнения металла при пластической деформации. Смещение поверхности нагружения относительно начала координат есть следствие эффекта Баушингера. Поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращение пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^n$, направлен по нормали к ней. Согласно постулату Друкера, в цикле нагружения–разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу.

При разгрузке тела (снятие внешних сил) деформация частицы происходит благодаря накопленной ею упругой потенциальной энергии. После полной разгрузки, когда внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения σ_{ij}^{ocm} и остаточные деформации ε_{ij}^{ocm} , определяемые по теореме о разгрузке, предложенной А.А. Ильюшиным.

Теории пластичности могут быть условно отнесены к двум типам: деформационным теориям и теориям пластического течения. В теориях первого типа при построении физических уравнений устанавливается связь между напряжениями и деформациями, в теориях пластического течения – связь между бесконечно малыми приращениями компонент пластической деформации и напряжениями. Отсюда видна принципиальная разница между указанными теориями. В деформационных теориях физические уравнения являются конечными нелинейными соотношениями, в теориях пластического течения – дифференциальными. Одной из теорий деформационного типа является теория малых упругопластических деформаций.

4.13. Примеры решения задач

Задача 1. Напряженное состояние в исследуемой точке изотропного тела задано в виде тензора напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 200 \\ 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Принимая $\sigma_{\tau} = 800$ МПа, по критерию пластичности Мизеса выяснить, в каком состоянии находится исследуемая частица металла.

Решение. По формуле (4.5) находим

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(100 - 300)^2 + (300 - 200)^2 + (200 - 100)^2 + 6(100^2 + 200^2)} = \\ &= 600 \text{ МПа} \text{ } p \text{ } 800 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Исследуемая частица тела находится в упругом состоянии.

Задача 2. Найти внутреннее давление, при котором в толстостенной трубе зарождается пластическая деформация.

Решение. Согласно условию постоянства максимального касательного напряжения для плоского деформированного состояния

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \sigma_{\tau};$$

у внутренней поверхности достигает наибольшего значения:

$$\sigma_{\theta \max} \Big|_{r=r_1} = p \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Радиальное напряжение при этом равно $-p$. Тогда

$$p \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + p = \sigma_{\tau}.$$

Откуда

$$p = \frac{\sigma_{\tau}}{1 + \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}}.$$

Задача 3. Пример расчёта составной трубы

Для двухслойной составной трубы с радиусами $r_1 = 120$ мм;

$r_2 = 180$ мм; $R_1 \cong r_2$; $R_2 = 230$ мм, натягом $\delta = 0,28$ мм, нагруженной внутренним давлением $p_e = 200$ МПа; $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа (рис. 2.10) требуется:

1. Определить окружные σ_{θ} и радиальные σ_r нормальные напряжения, возникающие в составной трубе до и после приложения внутреннего давления, и построить их эпюры.

2. Определить эквивалентные напряжения по III-ей и IV-ой теориям прочности на внутренних и наружных поверхностях каждой трубы.

3. Сравнить работоспособность составной и однослойной труб при тех же размерах.

4. Найти оптимальную величину давления натяга p_{opt} из условия равнопрочности внутренней и наружной труб и величину допускаемого внутреннего давления $[p]$. Расчёт выполнить по III-ей теории прочности при заданном допускаемом напряжении $[\sigma]$.

5. Определить температурные напряжения в трубе при нагреве внутренней поверхности до T_1 , наружном до T_2 и линейном законе изменения температуры по толщине стенки.

6. Построить эпюры температурных напряжений и суммарную эпюру с учетом внутреннего давления и натяга.

7. Проверить прочность трубы по III-ей теории.

Принять: $[\sigma] = 600$ МПа; $T_1 = 300^\circ\text{C}$; $T_2 = 200^\circ\text{C}$; $\mu = 0,3$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$.

Решение:

1. Определяем граничное давление p между трубами от натяга δ :

$$p = \frac{\delta E (r_2^2 - r_1^2) (R_2^2 - r_2^2)}{4r_2^3 (R_2^2 - r_1^2)} = \frac{\delta E \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \left(1 - \frac{r_2^2}{R_2^2}\right)}{4r_2 \left(1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}\right)} =$$

$$= \frac{0,28 \cdot 2,2 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{120^2}{180^2}\right) \left(1 - \frac{180^2}{230^2}\right)}{4 \cdot 180 \left(1 - \frac{120^2}{230^2}\right)} = 25,3 \text{ МПа.}$$

Определяем окружные и радиальные нормальные напряжения в трубах от натяга (контактного давления p). Расчёт ведем для каждой трубы отдельно.

Для внутренней трубы давление p будет наружным:

$$\sigma_{r\theta}^{\delta} = -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 m \frac{r_1^2}{r^2}\right) = -\frac{p}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} \left(1 m \frac{r_1^2}{r^2}\right) = -45,5 \left(1 m \frac{r_1^2}{r^2}\right).$$

Численные значения напряжений будем вычислять в характерных точках труб (на внутренней и наружной поверхности). Точка 1 – на внутренней поверхности внутренней трубы, точка 2 – на наружной поверхности внутренней трубы. Аналогичные точки 3, 4 для наружной трубы (см. рис. 4.16).

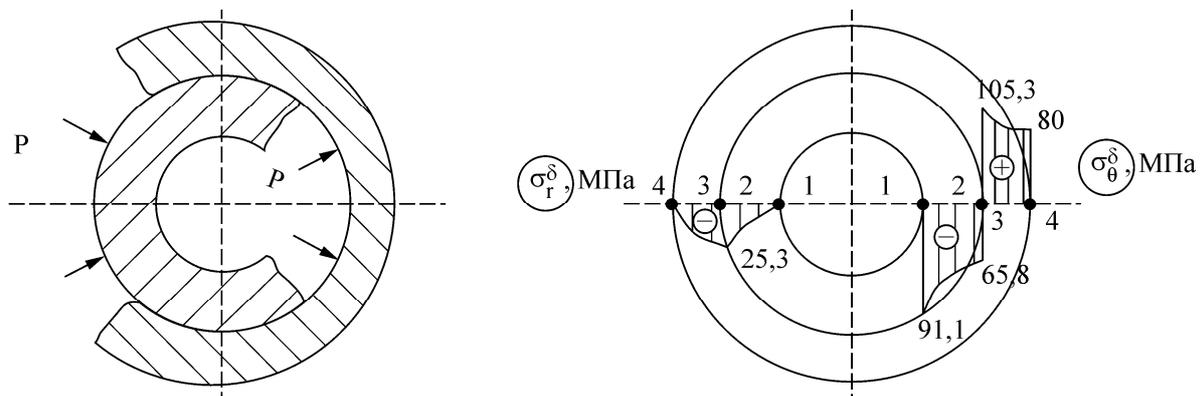


Рис. 4.16. Эпюры напряжений от натяга

В точке 1 при $r = r_1$:

$$\sigma_r^\delta = 0; \quad \sigma_\theta^\delta = -\frac{2pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -\frac{2p}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} = -\frac{2 \cdot 25,3}{1 - \frac{120^2}{180^2}} = -91,1 \text{ МПа}.$$

В точке 2 при $r = r_2$:

$$\sigma_r^\delta = -p = -25,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\theta^\delta = -\frac{p}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = -\frac{25,3}{1 - \frac{120^2}{180^2}} \left(1 + \frac{120^2}{180^2} \right) = -65,8 \text{ МПа}.$$

Для наружной трубы давление p будет внутренним, поэтому:

$$\sigma_\theta^\delta = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = \frac{p}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = 40 \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right)$$

В точке 3 при $R = R_1$:

$$\sigma_r^\delta = -p;$$

$$\sigma_\theta^\delta = \frac{p}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} \left(1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = \frac{25,3}{\frac{230^2}{180^2} - 1} \left(1 + \frac{230^2}{180^2} \right) = 105,3 \text{ МПа}$$

В точке 4 при $R = R_2$:

$$\sigma_r^\delta = 0; \quad \sigma_\theta^\delta = \frac{2p}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - 1} = \frac{2 \cdot 25,3}{\frac{230^2}{180^2} - 1} = 80 \text{ МПа}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры σ_θ^δ , σ_r^δ (см. рис. 2.11).

Вычислим напряжения в тех же точках от действия только внутреннего давления $p_в$, рассматривая трубу как цельную, $p_в = 200$ МПа.

$$\sigma_{\theta}^{p_в} = \frac{P_в r_1^2}{R_2^2 - r_1^2} \left(1 + \mu \frac{R_2^2}{r^2} \right) = \frac{P_в}{\frac{R_2^2}{r_1^2} - 1} \left(1 + \mu \frac{R_2^2}{r^2} \right) = 74,8 \left(1 + \mu \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

В точке 1 при $r = r_1$:

$$\sigma_r^{p_в} = -p_в = -200 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\theta}^{p_в} = \frac{P_в}{\frac{R_2^2}{r_1^2} - 1} \left(1 + \frac{R_2^2}{r_1^2} \right) = \frac{200}{\frac{230^2}{120^2} - 1} \left(1 + \frac{230^2}{120^2} \right) = 350 \text{ МПа}$$

В точках 2 и 3 при $r = r_2 = R_1$ напряжения будут равными по величине:

$$\sigma_r^{p_в} = \frac{P_в}{\frac{R_2^2}{r_2^2} - 1} \left(1 + \mu \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) = \frac{200}{\frac{230^2}{180^2} - 1} \left(1 + \mu \frac{230^2}{180^2} \right) = 74,8 (1 + \mu, 633)$$

$$\sigma_r^{p_в} = -47,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\theta}^{p_в} = 197 \text{ МПа}$$

В точке 4 при $r = R_2$:

$$\sigma_r^{p_в} = 0;$$

$$\sigma_{\theta}^{p_в} = \frac{2 \cdot 200}{\frac{230^2}{120^2} - 1} = 149,6 \text{ МПа}$$

По результатам вычислений строим эпюры (рис. 4.17)

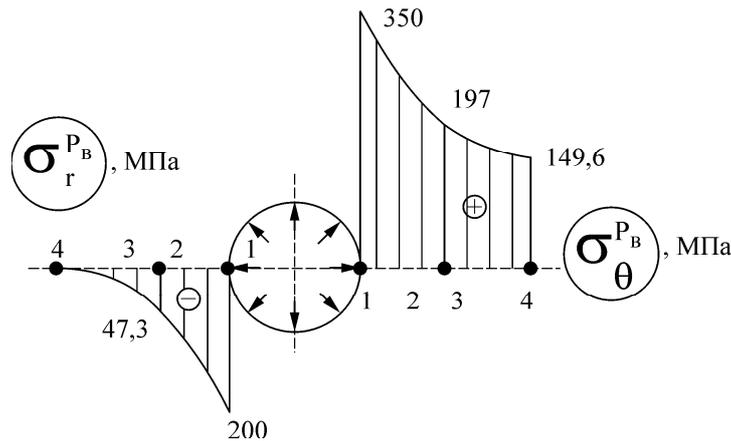


Рис. 4.17. Эпюры напряжений от внутреннего давления $p_в$ в цельной трубе

Результирующие напряжения в составной трубе после приложения внутреннего давления получим, суммируя:

$$\sigma_r = \sigma_r^\delta + \sigma_r^{p6};$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^\delta + \sigma_\theta^{p6}.$$

В точке 1: $\sigma_r = 0 - 200 = -200$ МПа ; $\sigma_\theta = -91,1 + 350 = 258,9$ МПа ;

В точке 2: $\sigma_r = -25,3 - 47,3 = -72,6$ МПа ;
 $\sigma_\theta = -65,8 + 197 = 131,2$ МПа ;

В точке 3: $\sigma_r = -25,3 - 47,3 = -72,6$ МПа ;
 $\sigma_\theta = 105,3 + 197 = 302,3$ МПа ;

В точке 4: $\sigma_r = 0$; $\sigma_\theta = 80 + 149,6 = 229,6$ МПа .

По этим значениям строим эпюры результирующих напряжений (рис. 4.18).

2. Определяем эквивалентные напряжения:

Главные напряжения: $\sigma_1 = \sigma_\theta$; $\sigma_3 = \sigma_r$; $\sigma_2 = 0$.

По III-ей теории прочности: $\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3$.

В точках 1: $\sigma_{\text{экв III}} = 258,9 + 200 = 458,9$ МПа ;

2: $\sigma_{\text{экв III}} = 131,2 + 72,6 = 203,8$ МПа ;

3: $\sigma_{\text{экв III}} = 302,3 + 72,6 = 374,9$ МПа ;

4: $\sigma_{\text{экв III}} = 229,6 + 0 = 229,6$ МПа .

$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{max}} = 458,9$ МПа — в точке 1.

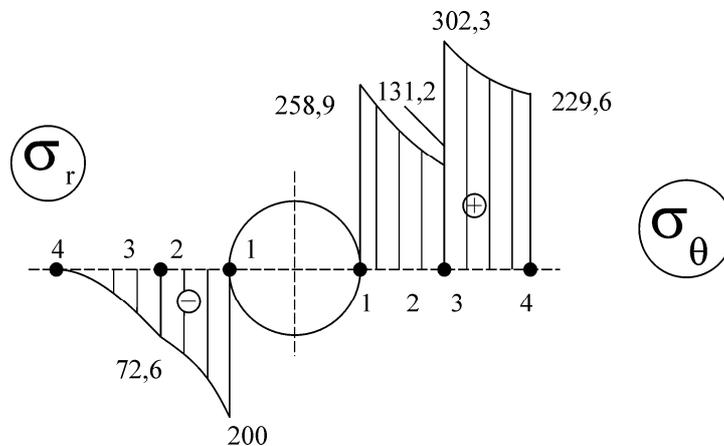


Рис. 4.18. Результирующие эпюры напряжений при действии натяга и внутреннего давления

По IV-ой теории прочности: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3}$.

В точке 1: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{258,9^2 + 200^2 + 200 \cdot 258,9} = 398,5$ МПа;

2: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{131,2^2 + 72,6^2 + 131,2 \cdot 72,6} = 178,7$ МПа;

3: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{302,3^2 + 72,6^2 + 302,3 \cdot 72,6} = 344,2$ МПа;

$$4: \sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{229,6^2 + 0 - 229,6 \cdot 0} = 229,6 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{max}} = 398,5 \text{ МПа} \text{ — в точке 1.}$$

В точке 2: $\sigma_r = -25,3 - 47,3 = -72,6 \text{ МПа}$; $\sigma_\theta = -65,8 + 197 = 131,2 \text{ МПа}$;

В точке 3: $\sigma_r = -25,3 - 47,3 = -72,6 \text{ МПа}$; $\sigma_\theta = 105,3 + 197 = 302,3 \text{ МПа}$;

В точке 4: $\sigma_r = 0$; $\sigma_\theta = 80 + 149,6 = 229,6 \text{ МПа}$.

По этим значениям строим эпюры результирующих напряжений (рис. 4.19).

2. Определяем эквивалентные напряжения:

Главные напряжения: $\sigma_1 = \sigma_\theta$; $\sigma_3 = \sigma_r$; $\sigma_2 = 0$.

По III-ей теории прочности: $\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3$.

В точках 1: $\sigma_{\text{экв III}} = 258,9 + 200 = 458,9 \text{ МПа}$;

2: $\sigma_{\text{экв III}} = 131,2 + 72,6 = 203,8 \text{ МПа}$;

3: $\sigma_{\text{экв III}} = 302,3 + 72,6 = 374,9 \text{ МПа}$;

4: $\sigma_{\text{экв III}} = 229,6 + 0 = 229,6 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{max}} = 458,9 \text{ МПа} \text{ — в точке 1.}$$

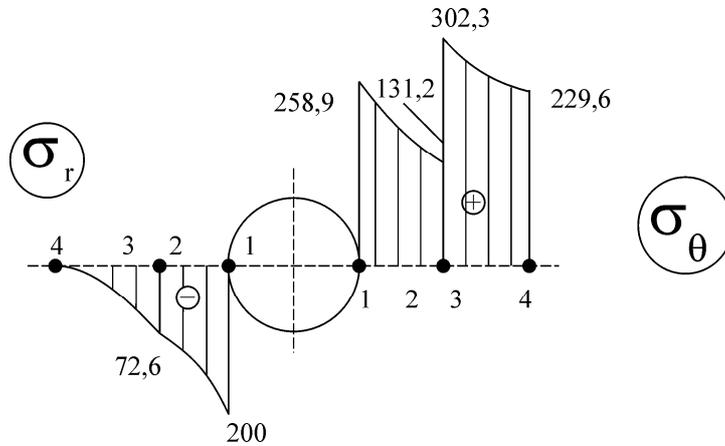


Рис. 4.19. Результирующие эпюры напряжений при действии натяга и внутреннего давления

По IV-ой теории прочности: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3}$.

В точке 1: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{258,9^2 + 200^2 + 200 \cdot 258,9} = 398,5 \text{ МПа}$;

2: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{131,2^2 + 72,6^2 + 131,2 \cdot 72,6} = 178,7 \text{ МПа}$;

3: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{302,3^2 + 72,6^2 + 302,3 \cdot 72,6} = 344,2 \text{ МПа}$;

4: $\sigma_{\text{экв IV}} = \sqrt{229,6^2 + 0 - 229,6 \cdot 0} = 229,6 \text{ МПа}$.

$$\sigma_{\text{экв IV}}^{\text{max}} = 398,5 \text{ МПа} \text{ — в точке 1.}$$

3. Для сравнения работоспособности составной и цельной труб вычислим $\sigma_{\text{экв III}}^{\text{II}}$ для цельной трубы в точке 1 (опасной):

$$\sigma_{\text{экв III}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 350 - (-200) = 550 \text{ МПа} .$$

В составной трубе выше было получено $\sigma_{\text{экв III}} = 458,9 \text{ МПа}$, то есть в составной трубе при том же давлении p_e напряжения будут меньше на

$$\frac{550 - 458,9}{550} 100\% = 16,6\% .$$

4. Для определения оптимального натяга выразим напряжения в опасных точках внутренней и наружной труб (т. 1 и т. 3) через давления p_v и p в общем виде.

В точке 1: $\sigma_r = -p_e ;$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{R_2^2 + r_1^2}{R_2^2 - r_1^2} p_e - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p = \frac{1 + \frac{r_1^2}{R_2^2}}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} p_e - \frac{2}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} p = \\ &= \frac{1 + \frac{120^2}{230^2}}{1 - \frac{120^2}{230^2}} p_e - \frac{2}{1 - \frac{120^2}{180^2}} p = 1,75 p_e - 3,6 p \end{aligned} ;$$

В точке 3: $\sigma_r = \frac{r_1^2}{R_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) p_e - p = -0,237 p_e - p$

$$\sigma_{\theta} = \frac{r_1^2}{R_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r_2^2} \right) p_e + \frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} p = 0,985 p_e + 4,16 p$$

Приравняем эквивалентные напряжения по III-ей теории прочности в т. 1 и т. 3

$(\sigma_{\text{экв III}})_{m.1} = (\sigma_{\text{экв III}})_{m.3}$ – это условие равнопрочности двух труб – внутренней и наружной.

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta} - \sigma_r)_{m.1} &= (\sigma_{\theta} - \sigma_r)_{m.3} ; \\ 1,75 p_e - 3,6 p + p_e &= 0,985 p_e + 4,16 p + 0,237 p_e + p ; \\ 1,528 p_e &= 8,76 p ; \\ p_e &= 5,73 p . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Оптимальная величина давления натяга p_{opt} определяется условием прочности $(\sigma_{\text{экв III}})_{m.1} = [\sigma]$: $1,75 p_e - 3,6 p + p_e = [\sigma]$, подставляем сюда (4.16)

$$1,75 \times 5,73 p - 3,6 p + 5,73 p = [\sigma]; \quad 12,16 p = 600 ;$$

$$p_{opt} = 49,35 \text{ МПа.}$$

Допускаемое внутреннее давление

$$[p_6] = 5,73 p_{opt} = 5,73 \cdot 49,35 = 283 \text{ МПа.}$$

Оптимальная величина натяга

$$\delta_{opt} = \frac{2r_2}{E} \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{R_2^2 + r_2^2}{R_2^2 - r_2^2} \right) p_{opt} = 0,55 \text{ мм.}$$

5. Определяем температурные напряжения в точках 1, 2, 3, 4.

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 300 - 200 = 100^\circ \text{C}$$

В точке 1 при $r = r_1$:

$$\sigma_r^T = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^T &= \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(R_2^3 - r_1^3)}{R_2^2 - r_1^2} \right] = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \times \\ &\times \left[3r_1 - \frac{2R_2 \left(1 - \frac{r_1^3}{R_2^3} \right)}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} \right] = \frac{2,2 \cdot 10^5 \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot 100}{3(1-0,3)(230-120)} \left[3 \cdot 120 - \frac{2 \cdot 230 \left(1 - \frac{120^3}{230^3} \right)}{1 - \frac{120^2}{230^2}} \right] = \\ &= 1,19 \left(360 - \frac{394,7}{0,728} \right) = -217 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

В точках 2 и 3 при $r = r_2$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^T &= \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \left[r_2 - \frac{r_1^3}{r_2^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{R_2^3 - r_1^3}{R_2^2 - r_1^2} \right] = \\ &= \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \left[r_2 - \frac{r_1^3}{r_2^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{R_2 \left(1 - \frac{r_1^3}{R_2^3} \right)}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} \right] = \\ &= 1,19 \left[180 - \frac{120^3}{180^2} - \left(1 - \frac{120^2}{180^2} \right) \frac{230 \left(1 - \frac{120^3}{230^3} \right)}{1 - \frac{120^2}{230^2}} \right] = -28,1 \text{ МПа;} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta}^T = \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \left[2r_2 + \frac{r_1^3}{r_2^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \frac{R_2 \left(1 - \frac{r_1^3}{R_2^3}\right)}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} \right] = 26,9 \text{ МПа} .$$

В точке 4 при $r = R_2$: $\sigma_r^T = 0$;

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^T &= \frac{E\alpha\Delta T}{3(1-\mu)(R_2 - r_1)} \left[3R_2 - \frac{2(R_2^3 - r_1^3)}{R_2^2 - r_1^2} \right] = 1,19 \left[3R_2 - \frac{2R_2 \left(1 - \frac{r_1^3}{R_2^3}\right)}{1 - \frac{r_1^2}{R_2^2}} \right] = \\ &= 1,19 \left[3 \cdot 230 - \frac{2 \cdot 230 \left(1 - \frac{120^3}{230^3}\right)}{1 - \frac{120^2}{230^2}} \right] = 177,3 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

6. Эпюры температурных напряжений показаны на рис. 4.20, а на рис. 4.21 суммарные: $\sigma_{r\Sigma} = \sigma_r + \sigma_r^T$; $\sigma_{\theta\Sigma} = \sigma_{\theta} + \sigma_{\theta}^T$.

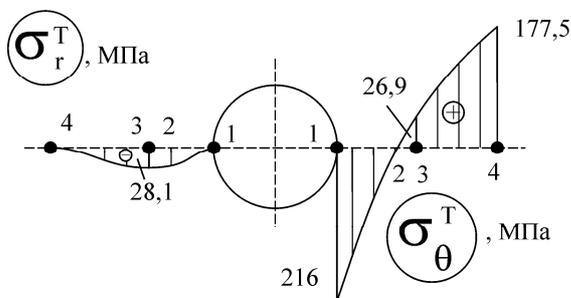


Рис. 4.20. Эпюры температурных напряжений

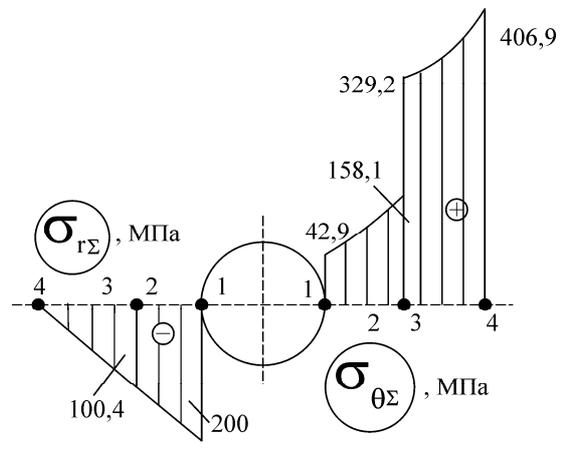


Рис. 4.21. Эпюры суммарных напряжений

7. Опасной будет точка 3. Проверяем прочность для нее при $\sigma_{\theta} = 329,2 \text{ МПа}$; $\sigma_r = -100,4 \text{ МПа}$:

$$\sigma_{\text{экв III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 329,2 + 100,4 = 429,6 \text{ МПа} < 600 \text{ МПа} .$$

Условие прочности выполняется. Недонапряжение составляет:

$$\frac{600 - 429,6}{600} \cdot 100\% = 28\%$$

4.14. Задание и варианты к расчётной работе «Расчет составной трубы»

Для двухслойной составной трубы с заданными радиусами r_1 ; r_2 ; $R_1 \cong r_2$; R_2 , натягом δ нагруженной внутренним давлением $p_в$ (рис. 4.22) требуется:

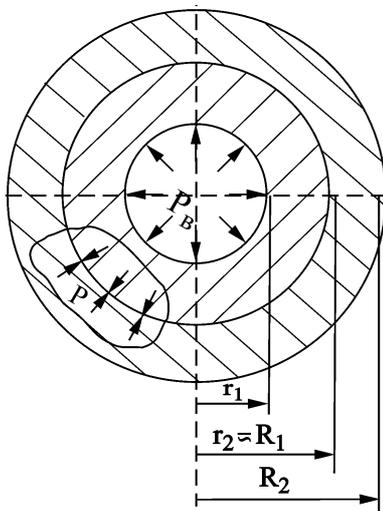


Рис 4.22. Нагружение трубы

1. Определить окружные σ_θ и радиальные σ_r нормальные напряжения, возникающие в составной трубе до и после приложения внутреннего давления, и построить их эпюры.

2. Определить эквивалентные напряжения по III-ей и IV-ой теориям прочности на внутренних и наружных поверхностях каждой трубы.

3. Сравнить работоспособность составной и однослойной труб при тех же размерах.

4. Найти оптимальную величину давления натяга p_{opt} из условия равнопрочности внутренней и наружной труб и величину допускаемого внутреннего давления $[p]$. Расчёт выполнить по III-ей теории прочности при заданном допускаемом напряжении $[\sigma]$.

5. Определить температурные напряжения в трубе при нагреве внутренней поверхности до T_1 , наружной до T_2 и линейном законе изменения температуры по толщине стенки.

6. Построить эпюры температурных напряжений и суммарную эпюру с учетом внутреннего давления и натяга.

7. Проверить прочность трубы по III-ей теории.

Принять: $\mu = 0,3$; $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$; $E = 2 \times 10^5$ МПа.

Численные данные выбираются из таблицы 4.1 в соответствии с вариантом.

Таблица 4.1

Номер варианта	Радиусы труб, мм			Натяг δ , мм	Давление, p_b , МПа	Допускаемое напряжение $[\sigma]$, МПа	Температура, °С	
	r_1	$r_2 \cong R_1$	R_2				T_1	T_2
1	100	130	150	0,10	180	500	250	300
2	60	90	110	0,08	190	550	100	350
3	80	100	120	0,06	200	600	150	400
4	60	80	100	0,04	210	650	50	450
5	80	110	130	0,20	220	700	0	250
6	60	85	115	0,12	230	500	200	100
7	60	95	130	0,21	240	550	300	150
8	100	140	160	0,15	250	600	350	50
9	100	150	170	0,25	260	650	400	0
10	80	120	150	0,24	270	700	450	100
11	80	100	120	0,15	280	500	250	300
12	160	210	230	0,26	180	550	250	350
13	110	210	250	0,21	190	600	100	400
14	120	140	170	0,24	200	650	150	450
15	130	160	190	0,25	210	700	50	250
16	140	190	220	0,26	220	500	0	100
17	130	180	210	0,12	230	550	100	150
18	160	200	220	0,15	240	600	300	50
19	150	180	230	0,20	250	650	350	0
20	150	210	230	0,21	260	700	400	100
21	140	190	220	0,24	270	600	450	150
22	170	210	230	0,25	280	650	250	200
23	160	200	230	0,23	220	700	0	250

4.15. Контрольные вопросы по теме «Теория пластичности»

1. Что такое условие пластичности?
2. Запишите условие пластичности для одноосного растяжения, чистого сдвига.
3. Перечислите требования, предъявляемые к критериям пластичности.
4. Какие пределы текучести Вы знаете? Какова между ними связь по условию пластичности Треска, Мизеса?
5. Сформулируйте условие пластичности Треска – Сен-Венана для объемного напряженного состояния.
6. Что собой представляет геометрическая интерпретация условия пластичности Треска – Сен-Венана?
7. Запишите условие пластичности Треска – Сен-Венана для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
8. Опишите кривую текучести для плоского напряженного состояния в главных осях по условию пластичности Треска – Сен-Венана.
9. Запишите условие Мизеса для объемного напряженного состояния в произвольных осях.

10. Почему условие пластичности Мизеса часто называют энергетическим?
11. Запишите энергетическое условие пластичности для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
12. При каких напряженных состояниях энергетическое условие пластичности и условие пластичности Треска – Сен-Венана совпадают? Когда между ними наибольшая разница?
13. Дайте геометрическую интерпретацию условия пластичности Мизеса в главных осях для объемного напряженного и плоского напряженного состояний.
14. Какая связь между σ_T и τ_T по энергетическому условию пластичности?
15. Насколько значительно влияние среднего главного нормального напряжения σ_2 на наступление пластического состояния?
16. Как проверяют условия пластичности?
17. Как получить линейную форму записи энергетического условия пластичности?
18. Как выглядит график изменения коэффициента Луде в зависимости от показателя вида напряженного состояния?
19. Почему в результате обработки давлением поликристаллические металлы становятся анизотропными материалами?
20. Опишите природу деформационной анизотропии.
21. Что представляют собой коэффициенты μ_{ij} в пластической области. Как они взаимосвязаны между собой для несжимаемых тел?
22. Что такое начальный и текущий пределы текучести? Укажите критерий нагружения и разгрузки при одноосном растяжении.
23. Что такое поверхность нагружения? Что она представляет собой для случая изотропного упрочнения, если следовать условиям пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса?
24. Какие берут параметры в качестве меры упрочнения?
25. Опишите трансляционное упрочнение.
26. Чем объясняется расширение и смещение поверхности нагружения в процессе деформаций?
27. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о простом нагружении.
28. При какой схеме упрочнения металла качественно описывается эффект Баушингера?
29. В чем состоит гипотеза «единой кривой»?
30. Почему отсутствует однозначная связь между пластическими деформациями и напряжениями?
31. Дайте определение постулата Друкера для упрочняющейся и неупрочняющейся пластической среды в случае линейного и объемного напряженных состояний.
32. Сформулируйте ассоциированный закон течения.

33. Как направлен вектор $d\varepsilon_{ij}^n$ к поверхности нагружения?
34. Докажите выпуклость поверхностей текучести и нагружения.
35. Назовите основные гипотезы теории течения.
36. Как получить связь между напряженным и деформированным состояниями в теории течения?
37. Запишите физические уравнения теории Сен-Венана –Леви – Мизеса.
38. Основные предпосылки теории малых упругопластических деформаций.
39. В каких случаях расчеты напряженно-деформированного состояния по различным теориям пластичности совпадают?
40. Перечислите основные уравнения теории малых упругопластических деформаций, теории пластического течения.

Список рекомендуемой литературы

1. Шинкин В.Н. Механика сплошных сред для металлургов: учебник. Электронный каталог. Москва. МИСиС, 2014
2. Каргин В.Р. Механика сплошных сред. Ч. 1: учеб. пособие / В.Р. Каргин, Б.В. Каргин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2015. – 76 с.
3. Каргин В. Р. Механика сплошных сред. Часть 2: учеб. пособие / В.Р. Каргин, Б.В. Каргин. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 80 с.
4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.- М.: Высшая школа, 1968.- 537с.
5. Варданян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А. А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М.: Изд. ассоциации строительных вузов, 1995.- 568с.
6. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
7. Багмутов, В.П. Прикладная теория упругости [Электронный ресурс] Сборник "Учебные пособия". Выпуск 3. [Электронный ресурс] / В.П. Багмутов, В.Н. Тышкевич. - Волгоград: ВолгГТУ, 2015.
8. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. – 288 с.
9. Саргсян, А. Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов учебник для вузов. 2-е изд., испр. и доп. / А. Е. Саргсян. - Москва: Высшая школа, 2000. - 286с.
10. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформированного тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики Т.1./ А.П. Филин. - Москва: Наука, 1975. - 832 с.

Электронное учебное издание

Владимир Николаевич **Тышкевич**
Сергей Васильевич **Орлов**

**ЗАДАНИЯ
И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
ПО МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

Учебно-методическое пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2022 г. Поз. № 43.

Подписано к использованию 14.06.2022. Формат 60x84 1/16.

Гарнитура Times. Усл. печ. л. 9,2.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.