МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. И. Капля, Е.В. Капля

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ - МОДЕЛИРОВАНИЕВ СРЕДЕ SCILABXCOS

Электронное учебное пособие

Волжский
2023

УДК 004.3(07)
ББК 31.2я73
К 203

Р е ц е н з е н т ы:
Волгоградский государственный аграрный университет,
доцент кафедры «Электроснабжение и энергетические системы»,
канд. тех. наук
Иванова О. А.
ООО Группа «Привод»,
начальник проектно-конструкторского отдела,
Задворский С. Н.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Капля, В.И.

Цифровые системы автоматизации и управления -моделирование в среде SCILABXCOS [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. И. Капля, Е. В. Капля; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. – Электрон. текстовые дан. (1 файл: 1,57 МБ). – Волжский, 2023. – Режим доступа: http://lib.volpi.ru. – Загл. с титул.экрана.

ISBN 978-5-9948-4800-5

Содержит сведения о принципах построения, структуре и моделях цифровых систем автоматизации и управления. Рассмотрены системы разностных и операторных уравнений для описания динамических свойств цифровых систем автоматизации и управления различных конфигураций с учетом периода дискретизации. Моделирование цифровых систем автоматизации и управления в среде ScilabXcos позволило показать возможности решения практических задач по расчету и анализу конкретных схем, включающих различные виды объектов управления и регуляторы.

Рекомендуется для использования в учебном процессе по техническим специальностям, в том числе по направлениям 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств» при изучении дисциплины «Цифровые системы автоматизации и управления» для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения.

Ил. 45, табл. 2, библиограф.: 21 назв.

ISBN 978-5-9948-4800-5

Содержание

Введение

Цифровые системы автоматизации и управления (ЦСАУ) – это вид оборудования, которое представляет собой совокупность взаимодействующих элементов автоматических систем управления, работа которых базируется на обработке дискретных измерительных сигналов и формировании управляющих сигналов.

Разработка ЦСАУ базируется на результатах моделирования динамических и статических процессов при воздействии на них возмущающих факторов. Модели ЦСАУ создаются на основе учета связей между непрерывными и дискретными функциями.

Модели ЦСАУ используются для расчета и синтеза передаточных функций, переходных и частотных характеристик [1-3].

Синтез алгоритмов автоматического управления ЦСАУ базируется на динамических моделях ЦСАУ.

Использование для моделирования ЦСАиУ среды ScilabXcos позволяет получать наглядные расчетные схемы и сокращать временные затраты на проведение математического моделирования различных вариантов конструкции ЦСАиУ [4-7]. Схемы и графики, выполненные в среде ScilabXcos и приведенные в пособии, имеют значения параметров, которые выбраны для иллюстрации одного из возможных вариантов протекания исследуемых процессов в ЦСАиУ. Размерность рассчитываемых величин, визуализируемых в виде графиков, учитывает длительность переходных процессов и должна масштабироваться для решения конкретных практических задач.

1. Дискретные сигналы и цифровые системы управления

Характер сигналов в системе как управляющих, так и содержащих необходимую для выработки управления информацию обычно рассматривают в качестве классификационного признака. Если эти сигналы изменяются только в дискретные моменты времени, т.е. являются дискретными, то системы автоматического управления (САУ) считают дискретной. Таким образом, понятие дискретной системы связано с понятием дискретного сигнала, т.е. сигнала, значения которого определены только в дискретные моменты времени t_i,: $i=1,2,...,n$, ...

Применение дискретных сигналов в автоматических системах вызвано разными причинами. Например, дискретизация сигнала, которая выполняется для защиты сигнала от помех при его передаче по каналу связи или для передачи нескольких сигналов по одному и тому же каналу.

Устройство, в котором осуществляется преобразование сигнала из непрерывной формы в последовательность импульсов, называется ***импульсным элементом***.

Основной причиной дискретизации сигналов в современных САУ является широкое использование вычислительной техники для обработки информации и формирования сигналов управления. Системы, использующие цифровую технику, называют ***цифровыми системами***. Такие системы базируются на аналого-цифровом преобразовании входных и выходных величин.

Аналого-цифровое преобразование (АЦП) – это последовательность двух преобразований: квантования (т.е. дискретизации) по времени и квантования по уровню. При квантовании по времени обычно предполагается, что период квантования постоянен.

Цифровой сигнал обрабатывается в цифровом вычислительном устройстве (ЦВУ). Структурная схема цифровой САУ, в которой ЦВУ (контроллер) обрабатывает сигнал ошибки, показана на рисунке 1.1. Система включает в себя непрерывную часть, в которую входят движители объекта управления и сам объект, а также цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), преобразующий вырабатываемые контроллером цифровые сигналы снова в аналоговую форму, необходимую для управления непрерывной частью системы.

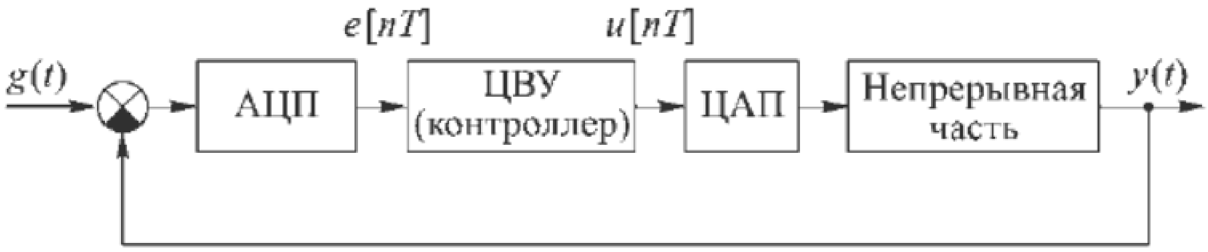


Рисунок 1.1

Эффектом дискретизации при математическом описании системы во многих случаях можно было бы пренебречь и рассматривать цифровую систему как непрерывную. Тем не менее для цифровых систем теория дискретных систем сохраняет актуальность.

Проблема заключается в том, что дискретность определяется не только возможностями АЦП, но и сложностью алгоритма выработки управляющего сигнала, который базируется на сложных математических соотношениях.

Время, затраченное на обработку сигналов или на выработку управляющих воздействий, и определяет период квантования по времени сигнала на выходе соответствующего устройства. Этот период времени может быть ***соизмерим с собственными постоянными времени для объекта управления***. Таким образом, пренебречь дискретностью сигнала уже нельзя, поскольку процессы в непрерывных и дискретных системах подчиняются различным закономерностям.

В большинстве случаев используемые контроллерами программы могут быть представлены в виде рекуррентных алгоритмов.

Текущее значение управляющего сигнала u[nT], вырабатываемого контроллером, определяется с учетом его предыдущих значений в моменты времени *t=n-j, j=1,2,...,k,* т.е. значений *u[(n-1)T], u[(n-2)T], ... , u[(n-k)T],* и зависит от значений сигнала, поступающего на вход контроллера g[nT] в моменты времени *t=n-i, i=1,2,...,m,* т.е. от значений *g[(n-l)T], ... , g[(n-m)T]).*

Таким образом, контроллер можно описать как преобразователь дискретного сигнала в соответствии с заданным алгоритмом. Преобразование сигнала, осуществляемое контроллером, можно представить в виде разностного уравнения:

u[nT]=f(u[(n-1)T], u[(n-2)T], ... , u[(n-k)T],g[nT], g[(n-1)T], ... , g[(n-m)T]),

в котором период Т квантования по времени определяется возможностями ЦВУ выполнять необходимые действия в реальном масштабе времени.

Обозначение *x[nT]* принято в теории дискретных систем для так называемых дискретных, или решетчатых, функций, которые обычно представляют собой последовательность значений соответствующей непрерывной функции: $x[nT]=x(t)|_{t=nT}$. Дискретная функция может рассматриваться и как самостоятельный математический объект.

Если перейти к относительному времени $\tau=t/T$, то непрерывной функции $x_T(\tau) = x(T\tau)$ соответствует дискретная функция $x_T[n]=x_T(\tau)|_{\tau=n}$.

Введем понятие смещенной дискретной функции. Полагаем $t=(n+\varepsilon)T$, где 0≤ε< 1. Тогда смещенная дискретная функция определяется равенством $x(t)|_{t=(n+\varepsilon)T} = x[(n+\varepsilon)T] = x[nT,\varepsilon T]$.

2. Дискретизация и квантование сигналов. Теорема Котельникова-Найквиста

Дискретизация – это процедура перехода от непрерывного представления функций к матричному (векторному) формату [8-10]. Процедура дискретизации для двух измерений иллюстрируется рисунком 2.1 и описывается следующей формулой:

$$x_D(i) = x_C(i \cdot \Delta t),$$

$$x_D(i_1, i_2) = x_C(i_1\Delta t_1, i_2\Delta t_2),$$

где $x_D(.)$ – значения дискретизированной функции (решетчатой функции), $x_C(.)$ – непрерывная функция ,i_1, i_2 – номера дискретов, Δt_1, Δt_2 – величины интервалов (шагов) дискретизации.

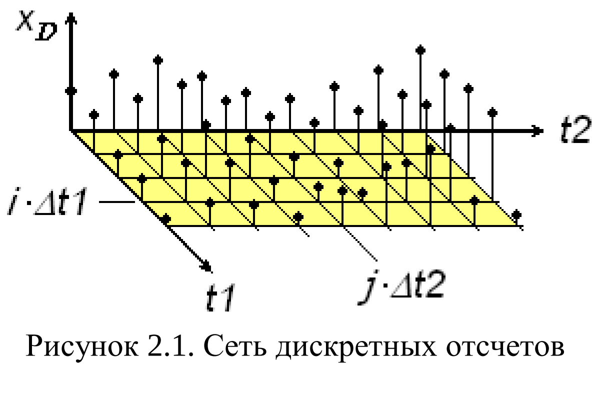


Рисунок 2.1. Сеть дискретных отсчетов

<u>Теорема Котельникова-Найквиста</u>: если непрерывный сигнал $x_C(t)$ имеет финитный (ограниченный по ширине) спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго большей удвоенной верхней частоты непрерывного сигнала: $f_D>2f_C$. Если сигнал двумерный (изображение), то требование теоремы Котельникова должно выполняться для каждой пространственной частоты.

Восстановление одномерного и двумерного непрерывного сигнала по дискретным отчетам выполняется по соответствующим формулам:

$$x_C(t) = \sum_i x_D(i) \frac{\sin[\pi(t - i\Delta t)/\Delta t]}{\pi(t - i\Delta t)/\Delta t},$$

$$x_C(t_1, t_2) = \sum_{i_1} \sum_{i_2} x_D(i_1, i_2) \frac{\sin[\pi(t_1 - i_1\Delta t_1)/\Delta t_1]}{\pi(t_1 - i_1\Delta t_1)/\Delta t_1} \cdot \frac{\sin[\pi(t_2 - i_2\Delta t_2)/\Delta t_2}{\pi(t_2 - i_2\Delta t)/\Delta t_2}.$$

Приведенное выражение является разложением непрерывного сигнала в ряд Котельникова. Теорема Котельникова дает возможность правильно выбрать величины интервалов дискретизации.

3. Схемы дискретных фильтров КИХ и БИХ

Частотные характеристики элементов автоматизации могут быть представлены в форме разностных уравнений. Частотная характеристика отображает избирательные фильтрующие свойства элемента, что позволяет его считать в определенном смысле фильтром, то есть устройством, свойства которого зависят от частоты входного синусоидального воздействия. Принято выделять два вида фильтров: КИХ – фильтры с *конечной импульсной характеристикой* и БИХ – фильтры с *бесконечной импульсной характеристикой.*

Схемы дискретных фильтров реализуются путем использования сумматоров, усилителей (умножителей), элементов задержки на один такт времени [11, 12]. Графическое обозначение перечисленных элементов приведено на рисунке 3.1:

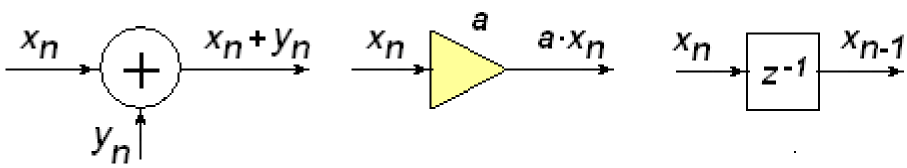


Рисунок 3.1.Обозначение сумматора, усилителя и элемента дискретной задержки

Дискретные КИХ и БИХ элементы реализуются в процессе рекурсивных вычислений, схемы которых приведены на рисунках 3.2 и 3.3.

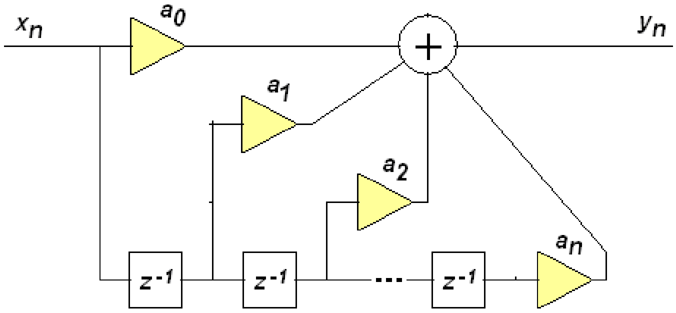


Рисунок 3.2. Схема КИХ фильтра

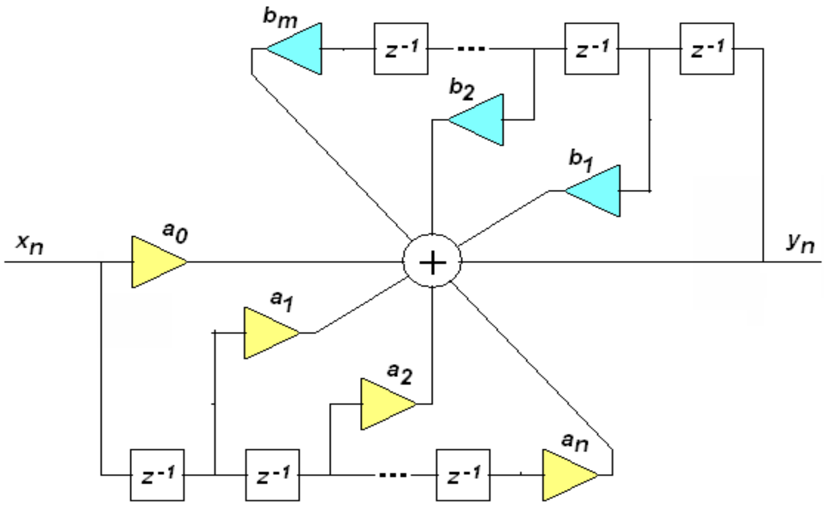


Рисунок 3.3. Схема БИХ фильтра

Схема КИХ фильтра образована цепочкой элементов задержки на один такт времени и ответвлениями с усилителями, выходные сигналы которых объединяются сумматором в единый выходной сигнал.

Схема БИХ фильтра содержит схему КИХ фильтра, которая дополнена цепочкой элементов задержки на один такт времени, ответвления с усилителями которой образуют петли обратных связей. Сигналы обратных связей также поступают в сумматор, формирующий единый выходной сигнал.

Схема КИХ элемента реализует разностное уравнение следующего вида:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)x(n-k).$$

Схема БИХ элемента реализует разностное уравнение следующего вида:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^{M-1} b(k)y(n-k).$$

Приведенные разностные уравнения соответствуют схемам на рисунках 3.4 и 3.5. Фильтры КИХ и БИХ являются рекурсивными системами, что и позволяет описывать их разностными уравнениями.

Инструментальным средством для моделирования процессов в цифровых дискретных системах является среда ScilabXcos [19-21]. Эта среда базируется на создании схем, которые структурно и внешне аналогичным схемам, приводимым в учебниках. Схема КИХ фильтра в среде ScilabXcos показана на рисунке 3.4. В схеме используется два источника временных сигналов: первый источник для управления дискретными элементами задержки с периодом 1 и второй источник для построения графиков с периодом 0.01. Единицы времени в системе условны, то есть для решения практических задач необходимо масштабировать временную шкалу. Реакция системы на конечный входной сигнал приведена на рисунке 3.5.

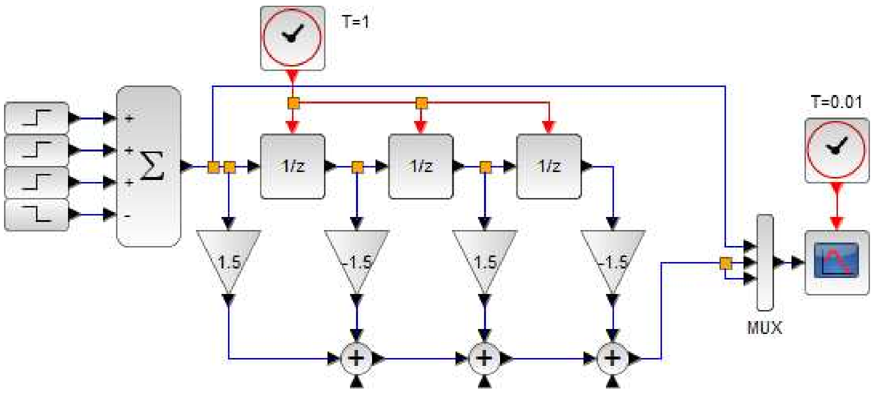


Рисунок 3.4. Схема КИХ элемента в среде ScilabXcos

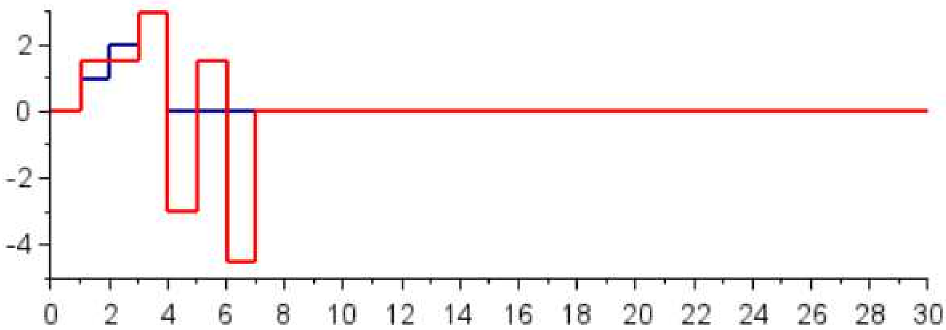


Рисунок 3.5. График сигналов КИХ

Графики на рисунке 3.5 являются демонстрацией конечного характера реакции системы на конечный входной сигнал. Входной сигнал формируется в сумматоре скачкообразных сигналов, которые формируются последовательно, с задержкой в 1 единицу времени. Последний скачкообразный сигнал имеет амплитуду, равную алгебраической сумме предыдущих скачков, что позволяет сформировать конечный во времени входной сигнал. Выходной сигнал имеет большую длительность, чем входной сигнал, что обусловлено присутствием в схеме элементов дискретной задержки.

Схема БИХ фильтра в среде ScilabXcos показана на рисунке 3.6. Реакция системы на конечный входной сигнал является бесконечной и приведена на рисунке 3.7.

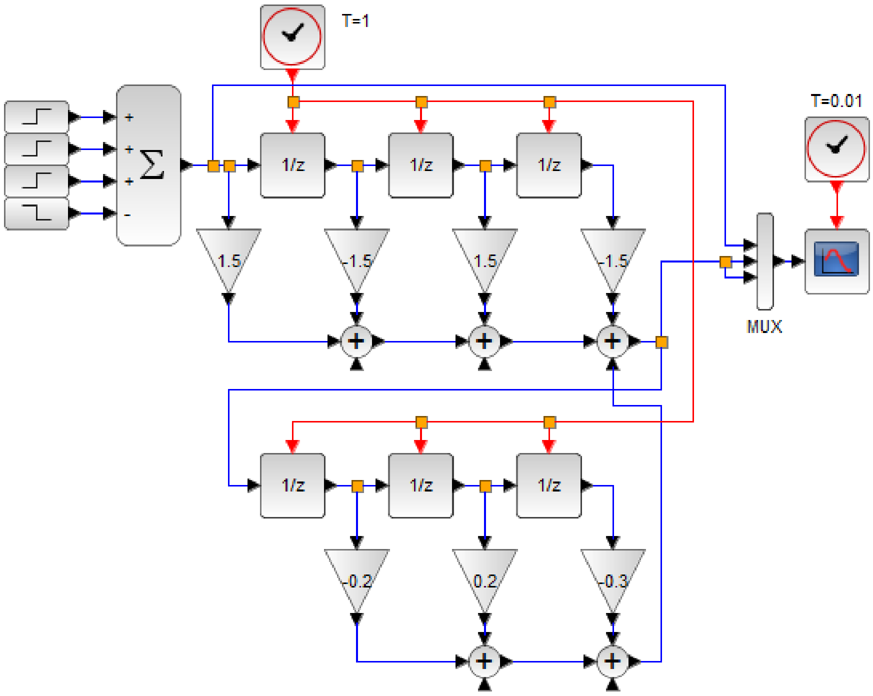


Рисунок 3.6. Схема КИХ элемента в среде ScilabXcos

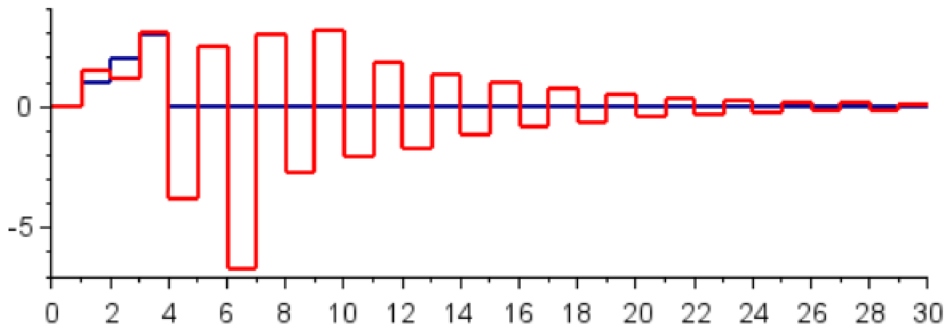


Рисунок 3.7. График сигналов БИХ

4. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье – это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов, связанных с анализом частот в дискретном (к примеру, оцифрованном аналоговом) сигнале [13-15]. Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную конечную функцию. Такие функции часто создаются путём дискретизации (выборки значений из непрерывных функций). Дискретные преобразования Фурье помогают решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свёртки. Существуют многомерные дискретные преобразования Фурье.

Дискретный спектр изображения X(i) представляет собой результат преобразования дискретизированного образа $x_D(i)$ с помощью дискретного преобразования Фурье по следующей формуле:

$$X(i) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cdot\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}i\cdot k\right), \quad (4.1)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Обратное дискретное преобразование Фурье позволяет по дискретному спектру построить дискретное изображение:

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=0}^{N-1} X(i)\cdot\exp\left(j\frac{2\pi}{N}i\cdot k\right). \quad (4.2)$$

Смысл обозначений приведенных в формулах (4.1) и (4.2):
N – количество значений сигнала, измеренных за период, а также количество компонент разложения;
x(k), k=0,1,...,N-1, – измеренные значения сигнала (в дискретных временных точках с номерами, которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными для обратного;
X(i), i=0,1,...,N-1, – N комплексных амплитуд синусоидальных сигналов, слагающих исходный сигнал; являются выходными данными для прямого преобразования и входными для обратного; поскольку амплитуды комплексные, то по ним можно вычислить одновременно и амплитуду, и фазу;
|X(i)|/N – вещественная амплитуда i-го синусоидального сигнала;
arg(X(i)) – фаза i-го синусоидального сигнала (аргумент комплексного числа);
i – индекс частоты. Частота i-го сигнала равна i/T, где T – период времени, в течение которого брались входные данные.

Дискретное преобразование Фурье обладает следующими свойствами:

- Линейность:

$$a\cdot x(k)+b\cdot y(k)\leftrightarrow a\cdot X(i)+b\cdot Y(i)$$

- Сдвиг по времени:

$$x(k-m)\leftrightarrow X(i)\cdot\exp((-2\pi j/N)\cdot i\cdot m)$$

- Периодичность:

$$X(i+r\cdot N)=X(i).$$

5. Различные типы дискретных систем

Система управления называется ***дискретной***, если она содержит дискретный элемент. Элемент называется дискретным, если его выходной сигнал ***квантован по времени или по уровню***. Говорят, что сигнал квантован по времени, если он представляет собой последовательность импульсов, и квантован по уровню, если он принимает дискретные значения, т.е. значения, кратные некоторой минимальной величине, называемой уровнем квантования или квантом.

Дискретные системы разделяются на ***импульсные, цифровые и релейные***.

Система управления называется ***импульсной***, если она содержит импульсный элемент (дискретный элемент), преобразующий непрерывный сигнал в импульсный, т.е. в последовательность импульсов. На выходе импульсного элемента сигнал квантован по времени.

Система управления называется ***цифровой***, если она содержит цифровое устройство. На выходе цифрового устройства сигнал квантован по уровню и по времени.

Система управления называется ***релейной***, если она содержит релейный элемент. Релейные системы управления являются существенно нелинейными. Они не подлежат обычной линеаризации и не рассматриваются.

Рассмотрим различные типы импульсных систем. Но для этого, прежде всего, остановимся на характеристике импульсов и импульсной модуляции.

Импульсом длительности $\boldsymbol{\tau_и}$ называется сигнал (физическая величина), который описывается функцией, не обращающейся в нуль только на некотором конечном интервале времени длительности $\tau_и$.

По форме различают прямоугольные, треугольные, синусоидальные (рис. 5.1) и другие. Они характеризуются шириной (длительностью) $\tau_и$ и амплитудой (высотой) $A_и$. Последовательность импульсов, помимо указанных параметров, еще характеризуется ***периодом следования импульсов*** $\boldsymbol{T}$ и ***относительной длительностью*** $\boldsymbol{\gamma = \tau_и/T}$ (рис. 5.2).

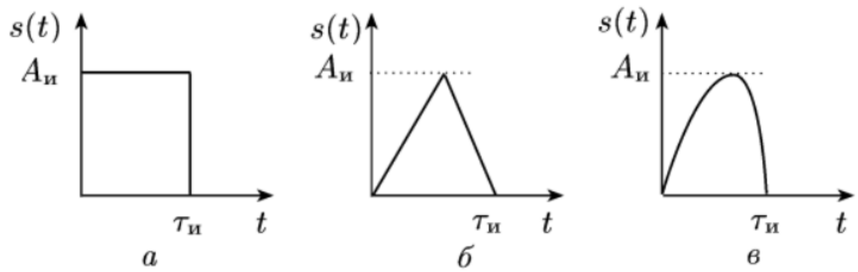


Рисунок 5.1. Формы импульса: а – прямоугольный импульс; б – треугольный импульс; в – синусоидальный импульс

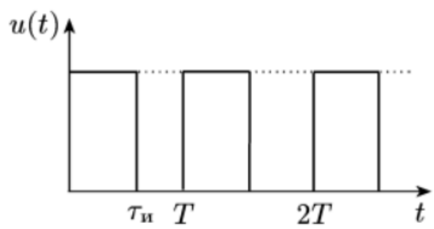


Рисунок 5.2. Последовательность импульсов

В импульсном элементе происходит модуляция, т.е. в соответствии с входным сигналом изменяется один из параметров последовательности импульсов на выходе. В зависимости от того, какой параметр изменяется, различают амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) и другие.

Импульсную систему управления, содержащую АИМ-элемент, называют АИМ-системой управления, а импульсную систему управления, содержащую ШИМ-элемент, называют ШИМ-системой управления.

6. Конечные разности

Линейные дискретные системы описываются линейными разностными уравнениями. Рассмотрим теорию решения таких уравнений [1, 2].

Пусть дана ***дискретная функция***, т.е. функция x(t), у которой аргумент принимает дискретные значения, кратные T: ***t = nT, n = 0,1,2,...***

Расширением понятия дискретной функции является ***смещенная дискретная функция***, которая определяется равенством:

$$x(t)|_{t=(n+\varepsilon)T} = x[(n+\varepsilon)T] = x[nT, \varepsilon T], \quad (6.1)$$

где $0 \le \varepsilon < 1$ – величина смещения отсчетов, рисунок 6.1.

Функция Δx(t), определяемая формулой

$$\Delta x[n, \varepsilon] = x[n+1, \varepsilon] - x[n, \varepsilon], \quad (6.2)$$

называется ***первой (конечной) нисходящей разностью***. Рекуррентно k-я (конечная) разность определяется следующим образом:

$$\Delta^k x[n, \varepsilon] = \Delta^{k-1} x[n+1, \varepsilon] - \Delta^{k-1} x[n, \varepsilon]$$

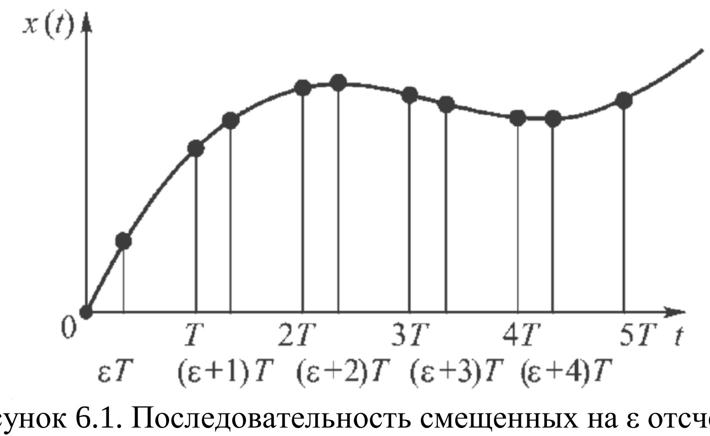


Рисунок 6.1. Последовательность смещенных на ε отсчетов

Восходящая конечная разность k-го порядка определяется следующими соотношениями:

$$\nabla x[n, \varepsilon] = x[n, \varepsilon] - x[n-1, \varepsilon]$$

$$\nabla^k x[n, \varepsilon] = \nabla^{k-1} x[n, \varepsilon] - \nabla^{k-1} x[n-1, \varepsilon]$$

Нисходящая и восходящая разности k-го порядка связаны равенством

$$\nabla^k x[n, \varepsilon] = \Delta^k x[n-k, \varepsilon]$$

Например:

Δ^2x(t) = Δx(t + T) – Δx(t)=x(t+2T)–x(t+T)–(x(t+T)–x(t))= x(t+2T)–2x(t+T)+x(t),

Используя формулу бинома Ньютона можно получить значение n-й конечной разности:

$$\Delta^k x[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m x[n+k-m,\varepsilon]. \qquad (6.3)$$

$$\nabla^k x[n,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m x[n-m,\varepsilon]. \qquad (6.4)$$

где$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$.

В свою очередь, значение дискретной функции x[n+k,ε] можно выразить через конечные разности:

$$x[n+k,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{k} C_k^m \Delta^m x[n,\varepsilon].$$

$$x[n-k,\varepsilon] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m \nabla^m x[n,\varepsilon].$$

Конечная сумма для дискретной функции x[n] определяется равенством:

$$y[n] = \sum_{m=n_0}^{n-1} x[m].$$

Найдем первую разность конечной суммы:

$$\Delta y[n] = \sum_{m=n_0}^{n} x[m] - \sum_{m=n_0}^{n-1} x[m] = x[n].$$

В свою очередь, конечная сумма первой разности

$$\sum_{m=n_0}^{n-1} \Delta x[m] = \sum_{m=n_0}^{n-1} (x[m+1] - x[m]) = x[n] - x[n_0].$$

Таким образом, *операции взятия конечной суммы и конечной разности взаимно обратны* (как операции дифференцирования и интегрирования непрерывных функций).

Определим первую ***разность произведения*** x[n]y[n]:

$$\Delta\{x[n]y[n]\} = x[n+1]y[n+1] - x[n+1]y[n] + x[n+1]y[n] - x[n]y[n] =$$
$$= x[n+1]\Delta y[n] + \Delta x[n]y[n].$$

Получим формулу ***суммирования по частям***:

$$\sum_{m=n_0}^{n-1} \Delta\{x[m]y[m]\} = \sum_{m=n_0}^{n-1} x[m+1]\Delta y[m] + \sum_{m=n_0}^{n-1} y[m]\Delta x[m] =$$
$$= x[n]y[n] - x[n_0]y[n_0] = x[m]y[m]\big|_{n_0}^{n},$$

или

$$\sum_{m=n_0}^{n-1} y[m]\Delta x[m] = x[m]y[m]\big|_{n_0}^{n} + \sum_{m=n_0}^{n-1} x[m+1]\Delta y[m]$$

7. Разностные уравнения

Соотношение, связывающее дискретную функцию x[n]и ее разности до порядка k, называется ***разностным уравнением***:

$$\Phi(n, x[n], \Delta x[n], \dots, \Delta^k x[n]) = 0. \quad (7.1)$$

Заменив разности $\Delta^i x[n]$ их значениями по формуле (6.3), разностное уравнение (7.1) можно привести к виду:

$$\Phi(n, x[n], x[n], \dots, x[n+k]) = 0.$$

Разрешив уравнение относительно x[n+k], можно привести его к виду:

$$x[n+k] = \mathrm{f}(n, x[n], x[n], \dots, x[n+k-1]). \quad (7.2)$$

Наряду с разностным уравнением можно рассматривать систему разностных уравнений с k неизвестными $x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]$ в нормальной форме Коши

$$\begin{cases} x_1[n+1] = f_1(n, x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]); \\ \dots \\ x_k[n+1] = f_k(n, x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]); \end{cases}$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}[n]), \quad (7.3)$$

где

$$\boldsymbol{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \dots \\ x_k[n] \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}[n]) = \begin{bmatrix} f_1(n, \boldsymbol{x}[n]) \\ \dots \\ f_k(n, \boldsymbol{x}[n]) \end{bmatrix}.$$

Если правая часть системы уравнений (7.3) не зависит явно от дискретного времени n, то система уравнений имеет вид:

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}[n]), \quad (7.4)$$

то система уравнений (7.4) называется ***автономной (стационарной)***.

От уравнения (7.2) можно перейти к системе уравнений (7.3). Обозначим

$$x[n] = x_1[n], x[n+1] = x_2[n], \dots, x[n+k-1] = x_k[n].$$

Тогда уравнение (7.2) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ \dots \\ x_{k-1}[n+1] = x_k[n]; \\ x_k[n+1] = f(n, x_1[n], x_2[n], \dots, x_k[n]).; \end{cases}$$

Совокупность k дискретных функций $x_1 = \xi_1[n], x_2 = \xi_2[n], \dots, x_k = \xi_k[n]$, которые при подстановке обращают каждое уравнение системы (7.3) в тождество, называется ***решением системы*** (7.3).

Важной задачей в теории разностных уравнений является задача Коши.

Задача Коши: требуется найти решение $x = \xi[n]$ системы (7.2), удовлетворяющее условиям

$$\boldsymbol{\xi}[n_0] = \boldsymbol{x}^0. \quad (7.5)$$

Условия (7.5) называются *начальными условиями*; значения n_0, $\mathbf{x}^0$ – *начальными значениями*.

Если правые части системы уравнений (7.3) определены, ограничены и однозначны при всех значениях аргументов, то существует, и притом единственное, решение системы (7.3), удовлетворяющее заданным начальным условиям (7.5). Это решение определяется последовательным вычислением.

Решение $x_i = \xi_i[n, c_1, \dots, c_k], i = 1,2, \dots, k$, зависящее от k произвольных постоянных $c_1, \dots, c_k$, называется ***общим решением***, если путем соответствующего выбора этих постоянных можно получить решение, удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям.

8. Линейные разностные уравнения и методы их решения

Уравнение

$$c_0\Delta^n y(t) + c_1\Delta^{n-1}y(t) + c_n y(t) = \varphi(t), \quad (c_0 \neq 0) \qquad (8.1)$$

называется (конечным) разностным уравнением n-го порядка, где y(t) – неизвестная дискретная функция.

Уравнение (8.1) всегда можно преобразовать к виду

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = \varphi(t), \quad (c_0 \neq 0) \qquad (8.2)$$

Если $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$, то уравнение (5.3) также называют (конечным) разностным уравнением n-го порядка.

Здесь всюду коэффициенты уравнения предполагаются вещественными и постоянными.

Уравнение

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = 0, \qquad (a_0 \neq 0) \quad (8.3)$$

которое получается из уравнения (8.2) приравниванием нулю правой части, называется ***однородным (конечным) разностным уравнением,*** соответствующим неоднородному разностному уравнению (8.2).

Существует три метода решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

- первый (классический) метод состоит в нахождении общего и частного решений;
- второй метод – рекуррентный;
- третий метод – метод z-преобразований.

Рекуррентный метод решения линейных разностных уравнений наиболее удобен для систем реального времени. Рекуррентное решение может быть получено непосредственно из разностного уравнения. Разрешим уравнение относительно координаты ***y*** в момент ***t+nT***:

$$y(t+nT) = \frac{1}{a_0}[\varphi(t) - a_1 y(t+(n-1)T) - \ldots - a_n y(t)].$$

Рекуррентное решение позволяет по известным прошлым значениям координат вычислить последующие значения: задавая n=0,1,2,…, мы можем последовательно получать точки решения.

Достоинство: простота получаемых решений.

Недостатки: не получаем решение в виде формулы.

9. Общее решение неоднородного разностного уравнения

Общее решение неоднородного разностного уравнения (8.2) имеет вид:

$$y(t)=y_B(t) + y_C(t),$$

где $y_B(t)$ – частное решение этого уравнения, определяющее вынужденное движение, и $y_C(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (5.1), определяющее свободное движение.

Решение однородного уравнения ищется в виде $\boldsymbol{y(t) = \lambda^t}$. Подставив это выражение в (5.1), получим

$$(a_0\lambda^{nT}+ a_1\lambda^{(n-1)T}+ ... + a_n)\,\lambda^t = 0.$$

Это равенство будет выполнено тождественно относительно t, если

$$a_0\lambda^{nT}+ a_1\,\lambda^{(n-1)T}+ ... + a_n = 0.$$

Положив $\lambda^T = z$, получим алгебраическое уравнение

$$a_0z^n+ a_1z^{n-1}+ ... + a_n = 0, \qquad (9.1)$$

которое называется <u>характеристическим уравнением</u>.

Таким образом, решением однородного разностного уравнения будет

$$y = \lambda_i^t = z_i^{t/T},$$

где z_i – корень характеристического уравнения (9.1).

Если все корни z_i (i = 1, 2,..., n) характеристического уравнения простые (т.е. различные), то ***общее решение однородного разностного уравнения*** имеет вид

$$y_C(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^{t/T}, \qquad (9.2)$$

где C_i – произвольные постоянные.

Если среди корней характеристического уравнения имеется кратный корень z_j кратности k_j, то ему в (9.2) соответствует слагаемое

$$\left(C_1^j + C_2^j\frac{t}{T}+\ldots+C_{k_j}^j\left(\frac{t}{T}\right)^{k_j-1}\right)z_i^{t/T}.$$

Если имеются простые комплексно-сопряженные корни $\boldsymbol{Z_{k,k+1}=\alpha\pm j\beta}$, то соответствующие им два слагаемых можно заменить выражением:

$$\rho^{\frac{t}{T}}\left(A\cos\frac{t}{T}\varphi + B\sin\frac{t}{T}\varphi\right),$$

где $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\varphi = arctg\,\frac{\beta}{\alpha}$, A, B – произвольные константы.

10. Определение z-преобразования

z-преобразованием, или преобразованием Лорана, называется соотношение:

$$X^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT]z^{-n}. \qquad (10.1)$$

ставящее в соответствие дискретной функции x[nT] функцию комплексного переменного X*(z). При этом x[nT] называют оригиналом, а X*(z) – изображением или z-изображением.

Оригинал и его изображение обозначают одноименными буквами: оригинал – строчной буквой, а изображение – ***прописной буквой со звездочкой***. z-преобразование также условно записывают в виде

$$X^*(z) = Z\{x[nT]\},$$

а обратному z-преобразованию сопоставляют формулу:

$$x[nT] = Z^{-1}\{X^*(z)\}.$$

Предполагается, что в z-преобразовании (10.1) дискретная функция обладает следующими свойствами:

А) существуют положительные числа M и q такие, что $|x[nT]|<Mq^n$ при любых $n\geq 0$;

Б) x[nT] = 0 при всех n< 0.

Свойство А) необходимо для существования области сходимости ряда в правой части (10.1), а свойство Б) используется при выводе некоторых свойств z-преобразования. Функции, удовлетворяющие указанным двум свойствам, называют ***функциями-оригиналами***.

z-преобразование от смещенной решетчатой функции x[(n+ε)T], т.е. соотношение

$$X^*(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x[(n+\varepsilon)T]z^{-n},$$

называют ***модифицированным z-преобразованием***. Это преобразование является более общим видом z-преобразования, отображающее идеальное запаздывание, кратное частоте дискретизации.

Модифицированное z-преобразование также записывают в виде:

$$X^*(z,\varepsilon) = Z\{x[(n + \varepsilon)T\}\} = Z^{\varepsilon}\{x[nT\}\}.$$

Функцию X*(z,ε) называют z-изображением ***смещенной решетчатой функции*** x[(n+ε)T] или модифицированным z-изображением решетчатой функции x[nT].

11. Основные свойства z-преобразования

Так как z-преобразование от x[nT] можно рассматривать как частный случай модифицированного z-преобразования при $\varepsilon=0$, то рассмотрим свойства модифицированного z-преобразования.

- ***Линейность***

Модифицированное z-преобразование от линейной комбинации дискретных функций равно линейной комбинации их модифицированных z-преобразований:

$$Z\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i[(n+\varepsilon)T]\right\} = \sum_{i=1}^{k} a_i Z\{x_i[(n+\varepsilon)T]\}.$$

Здесь a_i (i = 1, 2,..., k) – константы.

- ***Теорема запаздывания***

Модифицированное z-преобразование от функции с запаздывающим аргументом x[(n-m)T] определяется следующим образом:

$$Z^{\varepsilon}\{x[(n - m)T]\} = z^{-m}Z^{\varepsilon}\{x[nT\}\} = z^{-m}X^*(z,\varepsilon).$$

- ***Теорема опережения***

Модифицированное z-преобразование от функции с опережающим аргументом x[(n+m)T] определяется следующим образом:

$$Z^{\varepsilon}\{x[(n+m)T]\} = z^m\left[X^*(z,\varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} x[(k+\varepsilon)T]z^{-k}\right].$$

Если x[εT]=x[(1+ε)T]=...= x[(m-1+ε)T]=0 (начальные условия нулевые), то

$$Z^{\varepsilon}\{x[(n + m)T]\} = z^m X^*(z, \varepsilon).$$

Если ε=0, то формулы свойства имеют вид:

$$Z\{x[(n+1)T]\} = z[Z(z) - x[0]],$$

$$Z\{x[(n+m)T]\} = z^m[Z(z) - z^m x[0] - z^{m-1}x[1] - \ldots - zx[m-1]].$$

- ***Умножение оригинала на (n+ ε)T, то есть на аргумент***

z-преобразование от произведения $x[(n+m)T]\cdot(n+\varepsilon)T$ определяется следующим образом:

$$Z\{x[(n+\varepsilon)T]\cdot(n+\varepsilon)T\} = \varepsilon T X^*(z,\varepsilon) - zT\frac{dX^*(z)}{dz}$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$Z\{x[nT]\cdot nT\} = -zT\frac{dX^*(z)}{dz}.$$

- ***Умножение оригинала на $a^{-(n+\varepsilon)\alpha T}$***

z-преобразование от произведения $x[(n+m)T]\cdot a^{-(n+\varepsilon)\alpha T}$ определяется следующим образом:

$$Z\{x(n+\varepsilon)T\cdot a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}\} = a^{-\varepsilon\alpha T}\cdot X^*(a^{\alpha T}z,\varepsilon).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$Z\{x[nT]\cdot a^{-n\alpha T}\} = X^*(a^{\alpha T}z).$$

- ***Теорема о свертке***

Произведение изображений $X_1^*(z,\varepsilon)$ и $X_2^*(z,\varepsilon)$ равно z-преобразованию от свертки их оригиналов $x_1[(l+\varepsilon)T]$ и $x_2[(l+\varepsilon)T]$

$$X_1^*(z,\varepsilon)X_2^*(z,\varepsilon) = Z\left\{\sum_{k=0}^{l} x_1[(k+\varepsilon)T]x_2[(l-k+\varepsilon)T]\right\} =$$

$$= Z\left\{\sum_{k=0}^{l} x_2[(k+\varepsilon)T]x_1[(l-k+\varepsilon)T]\right\}.$$

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$X_1^*(z)X_2^*(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^{l} x_1[kT]x_2[(l-k)T]\right\} =$$

$$= Z\left\{\sum_{k=0}^{l} x_2[kT]x_1[(l-k)T]\right\}.$$

- ***Теоремы о граничных значениях***

Начальное значение решетчатой функции x[nT] по ее обычному и модифицированному z-изображению определяется следующим образом:

$$x[\varepsilon T] = lim_{z\to\infty} X^*(z,\varepsilon), \qquad x[0] = lim_{z\to\infty} X^*(z),$$

Предел $x(\infty) = \lim_{l\to\infty} x[lT]$при условии, что он существует, определяется следующим образом:

$$x[\infty] = lim_{z\to 1}(z-1)X^*(z,\varepsilon) = lim_{z\to 1}(z-1)X^*(z).$$

Таблица 11.1

№	*F(s)*	*f[lt]*	$F^*(z)$
1.	$\frac{1}{s}$	$1[lT]$	$\frac{z}{z-1}$
2.	$\frac{1}{s^2}$	lT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3.	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}(lT)^2$	$\frac{1}{2}\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^2}$
4.	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha lT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5.	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$lTe^{-\alpha lT}$	$\frac{Tze^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
6.	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$sin\beta lT$	$\frac{z\cdot sin\beta T}{z^2-2zcos\beta T+1}$
7.	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$cos\beta lT$	$\frac{z^2-zcos\beta T}{z^2-2zcos\beta T+1}$
8.	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}sin\beta lT$	$\frac{ze^{-\alpha T}sin\beta T}{z^2-2ze^{-\alpha T}cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$
9.	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT}cos\beta lT$	$\frac{z(z-e^{-\alpha T}cos\beta T)}{z^2-2ze^{-\alpha T}cos\beta T+e^{-2\alpha T}}$

12. Уравнения и передаточные функции дискретных систем

Если дискретная система задается разностным уравнением, то ее передаточные функции определяются аналогично передаточным функциям непрерывных систем. Отличие состоит только в том, что в случае дискретных систем вместо оператора дифференцирования p используется оператор смещения E, а вместо преобразования Лапласа – z-преобразование.

Пусть дискретная система управления описывается разностным уравнением

$$a_0y[(k+n)T] + a_1y[(k+n-1)T] + \cdots + a_ny[kT] =$$

$$= b_0 u[(k+m)T] + b_1 u[(k+m-1)T] + \ldots + b_m u[kT]$$

где *y[kT]* – выходная переменная, *u[kT]* – входная переменная, a_i ($i=1,2,\ldots,n$) и b_i($i=1,2,\ldots,m$) – константы.

Имеющее наименьший порядок отношение z-изображений (при ***нулевых начальных условиях***) выходной и входной переменных называется передаточной функцией в z-изображениях.

Для вычисления передаточной функции в z-изображениях системы управления применим к обеим частям этого уравнения z-преобразование. Используя свойство линейности z-преобразования, можем записать:

$$a_0 Z\{y[(k+n)T]\} + a_1 Z\{y[(k+n-1)T]\} + \cdots + a_n y[kT] y[kT] =$$
$$= b_0 Z\{u[(k+m)T]\} + b_1 Z\{u[(k+m-1)T]\} + \ldots + b_m Z\{u[kT]\}.$$

В соответствии с теоремой опережения при нулевых начальных условиях ($y[0]=y[T]=\ldots=y[(n-1)T]=0$, $u[0]=u[T]=\ldots=u[(m-1)T]=0$) имеем:

$$Z\{y[(k+i)T]\} = z^i Y^*(z), \quad Z\{u[(k+i)T]\} = z^i Y^*(z)$$

Поэтому

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) Y^*(z) = (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n) U^*(z)$$

Отсюда для передаточной функции в z-изображениях W*(z) получаем

$$W^*(z) = \frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Итак, если дискретная система управления задана разностным уравнением, то процесс вычисления передаточных функций ничем не отличается от процесса вычисления передаточных функций непрерывных систем.

Однако, как правило, приходится вычислять передаточные функции, когда известны характеристики дискретных элементов и передаточная функция непрерывной части. И в этом случае возникают особенности, которые делают вычисление передаточных функций дискретных систем более сложным.

13. Эквивалентная схема АИМ-системы

АИМ-система включает АИМ-элемент и непрерывную часть (рис. 13.1).

Для получения математического описания АИМ-системы управления АИМ-элемент представим в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного звена 1 и формирующего звена 2 (рис. 13.2, б).

Рисунок 13.1. Блок-схема АИМ-системы управления

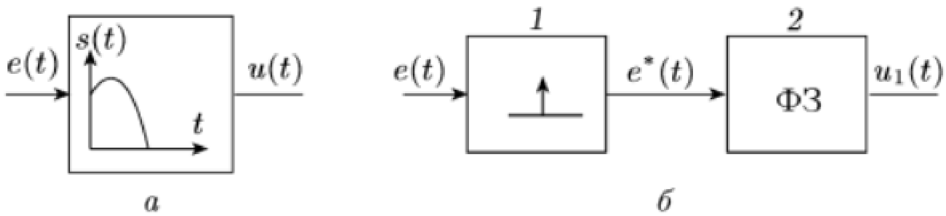


Рисунок 13.2. АИМ-элемент (а) и его эквивалентная схема (б)

Простейшее импульсное звено (звено 1 на рис. 13.2, б) представляет собой звено, которое преобразует входную функцию e(t) в обобщенную решетчатую функцию

$$e^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e(t)\delta(t - iT), \quad (13.1)$$

где T – период выходного сигнала АИМ-элемента.

В действительности элемента, преобразующего входной сигнал в последовательность модулированных δ-функций, естественно, не существует. Поэтому представление АИМ-элемента в виде указанной эквивалентной схемы следует рассматривать как математический прием.

Формирующее звено (ФЗ) формирует из обобщенной решетчатой функции e*(t) сигнал, тождественно равный выходному сигналу АИМ-элемента (условие эквивалентности).

В общем случае, когда длительность импульса $\tau_и = \gamma T$, весовая функция (см. рис. 6.1, а) имеет вид

$$w_Ф = s(t) = \begin{cases} A_И \text{при } t \in [0, \gamma T], \\ 0 \text{ при } t \notin [0, \gamma T], \end{cases}$$

а передаточная функция

$$W_Ф(s) = \int_0^{\infty} w_Ф(t) e^{-st} dt = \int_0^{\gamma T} A_И e^{-st} dt = \frac{A_И(1 - e^{-\gamma T})}{s}. \quad (13.2)$$

В частном случае, когда $A_И = 1$ и γ=1, формула (13.2) принимает вид для фиксатора нулевого порядка:

$$W_Ф(s) = \frac{1 - \exp(-Ts)}{s}. \quad (13.3)$$

Заменив в блок-схеме АИМ-системы управления импульсный элемент эквивалентной схемой, получим эквивалентную (расчетную) схему АИМ-системы (рис. 13.3, а). Формирующее звено объединяют с непрерывной частью в одно звено, которое называют приведенной непрерывной частью (ПНЧ) (рис. 13.3, б).

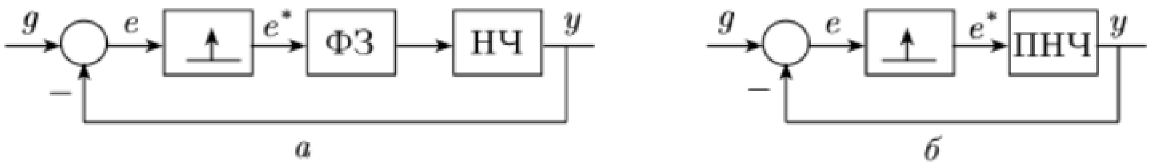


Рисунок 13.3. Эквивалентные схемы АИМ-системы

14. Дискретная модель АИМ-системы

Обозначив весовую функцию ПНЧ (приведенная непрерывная часть) через $w_п(t)$, имеем (см. рис. 13.3 б):

$$y(t) = \int_0^{\infty} w_\Pi(t-\tau)e^*(\tau)d\tau$$

Подставив сюда выражение для e*(t) из (13.1), после интегрирования получим

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_\Pi(t-iT)e[iT]. \quad (14.1)$$

Из этого уравнения следует, что выходная переменная y(t) зависит от $e[iT]$, т.е. от значений $e(t)$ в дискретные моменты времени $t = iT$. Для $e[iT]$ имеем:

$$e[iT] = g[iT]\text{-}y[iT]. \qquad (14.2)$$

В любой момент времени АИМ-система описывается уравнениями (14.1) и (14.2). В уравнение (6.34) входят непрерывные функции (функции с непрерывными аргументами) y(t) и w(t), а также дискретная функция e[iT]. В уравнение (6.35) входят только дискретные функции. Таким образом, АИМ-система представляет собой ***непрерывно-дискретную систему***. И то, что она описывается уравнениями, в которые входят дискретные и непрерывные функции, доставляет неудобство. От этого неудобства можно избавиться, если ограничиться исследованием АИМ-системы только в дискретные моменты времени t = lT.

Действительно, подставив в (14.1) $t=nT$, получим

$$y[nT] = \sum_{i=0}^{\infty} w_n[(n-i)T]e[iT]. \quad (14.3)$$

или, учитывая, что $w_n[(n—i)T]=0$ при $n—i<0$,

$$y[nT] = \sum_{i=0}^{l} w_n[(n-i)T]e[iT]. \quad (14.4)$$

Уравнения (14.3) и (14.4) описывают процессы в АИМ-системе в дискретные моменты времени и представляют собой ее ***дискретную модель***.

По дискретной модели при необходимости можно определить значения выходной переменной y(t) не только в моменты времени $t—nT$, но и в произвольные моменты $t=(n+\varepsilon)T$ $(0<\varepsilon<1,\ n=0,1,2,...)$.

Произведя z-преобразование, из уравнений (14.3) и (14.4), получим

$$E^*(z) = G^*(z) - Y^*(z), \qquad (14.5)$$

$$Y^*(z) = W_n^*(z)E^*(z), \qquad (14.6)$$

где

$$W_n^*(z) = Z\{w_n[nT]\}. \qquad (14.7)$$

Уравнение (14.6) получено с использованием теоремы о свертке.

Из уравнения (14.6) имеем $W_n*(z)=Y*(z)/E*(z)$, т.е. $W_n*(z)$ есть передаточная функция (в z-изображениях) прямой цепи с входом *e[nT]* и выходом *y[nT]*.

На основании уравнений (14.5), (14.6) можно построить структурную схему дискретной модели АИМ-системы (рис. 14.1).

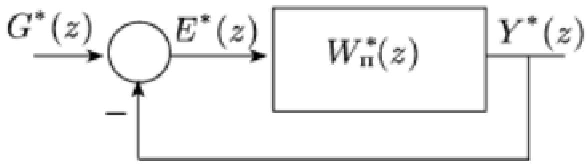


Рисунок 14.1. Дискретная модель АИМ-системы

Передаточная функция замкнутой дискретной системы по этой структурной схеме определяется так же, как и в случае непрерывных систем. Так, например, передаточная функция относительно входа G*(z) и выхода Y*(z) имеет вид

$$W_{yg}*(z)=W_n*(z)/(1+ W_n*(z)),$$

а относительно входа G*(z) и выхода E*(z)

$$W_{eg}*(z)= 1/(1+ W_n*(z)),$$

Основная особенность расчета АИМ-системы состоит в вычислении передаточной функции $W_n*(z)$ по известной передаточной функции ПНЧ $W_n(s)$, равной произведению передаточных функций формирующего звена и непрерывной части.

Согласно формуле (14.7), $W_n*(z)$ есть z-изображение весовой функции ПНЧ $w_n[kT]$. Весовую функцию $w_n[kT]$ можно получить путем дискретизации по времени непрерывной весовой функции $w_n(t)$, которая получается из передаточной функции $W_n(s)$.

Зная связь между изображением Лапласа непрерывной функции и z-изображением соответствующей решетчатой функции (см. табл. 6.1), можно непосредственно по $W_n(s)$ определить $W_n*(z)$.

Введем в рассмотрение оператор Z_T, который каждой функции X*(s)=L{x(t)} ставит в соответствие функцию X*(z) = Z{x[nT]}:

$$X*(z) = Z_T\{X(s)\}.$$

Оператор Z_T соответствует трем последовательным операциям:

- обратному преобразованию Лапласа,
- квантованию по времени и
- z-преобразованию.

Так как все три указанные операции являются линейными, то оператор Z_T является линейным. Используя этот оператор, передаточную функцию $W_n*(z)$ можно определить следующим образом:

$$W_n*(z) = Z_T\{W_n(s)\}. \qquad (14.8)$$

Далее также будем использовать оператор Z_T^{ε}, который функции $X(s)=L\{x(t)\}$ ставит в соответствие модифицированное z-изображение $X^*(z,\varepsilon)=Z\{x[(l+\varepsilon)T]\}$:

$$X^*(z,\varepsilon) = Z_T^{\varepsilon}\{X(s)\}. \qquad (14.9)$$

В приведенных формулах индекс T соответствует периоду дискретизации. Звёздочка * обозначает то, что это образ z-преобразования. Отсутствие звёздочки соответствует образу преобразования Лапласа.

15. Вычисление Z_T -изображения и Z_T^{ε} -изображения

Для получения дискретной модели по эквивалентной схеме АИМ-системы необходимо определить дискретную передаточную функцию $W_n^*(z)$, для чего в соответствии с формулой (14.8) нужно произвести Z_T-преобразование передаточной ПНЧ.
По аналогии с z-преобразованием в Z_T-преобразовании

$$X^*(z) = Z_T\{X(s)\}$$

и в Z_T^{ε} -преобразовании

$$X^*(z,\varepsilon) = Z_T^{\varepsilon}\{X(s)\}$$

$X(s)$ будем называть оригиналом, $X^*(z)$ – Z_T-изображением и $X^*(z,\varepsilon)$ – изображением или модифицированным Z_T-изображением.

Z_T-изображение и Z_T^{ε}-изображение от основных функций можно найти соответственно в таблице 11.1.

Вычисление Z_T-изображения и Z_T^{ε}-изображения от дробно-рациональной функции.

Пусть оригинал имеет вид

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

где B(s) и A(s) – полиномы от s степени m и n соответственно, причем m<n. Если все полюсы s_i (i=1,2,...,n) данной функции (т. е. корни уравнения A(s)=0) различны, то

$$X^*(z) = Z_T\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}\frac{z}{z-\exp(s_iT)}, \qquad (6.41)$$

$$X^*(z,\varepsilon) = Z_T^{\varepsilon}\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n}\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}\exp(\varepsilon\cdot s_iT)\frac{z}{z-\exp(s_iT)}, \qquad (6.42)$$

где $A'(s_i) = \left.\dfrac{dA(s)}{ds}\right|_{s=s_i}$

16. Цифровые системы управления

В связи с развитием микроэлектроники и микропроцессоров цифровые вычислительные устройства находят все большее применение при разработке управляющих устройств. Поэтому в настоящее время цифровые системы управления широко распространены.

Если цифровое устройство оперирует с числовым представлением со значительным количеством разрядов, то квантованием по уровню можно пренебречь. И системы управления с такими цифровыми устройствами можно рассматривать как АИМ-системы.

Цифровая система управления (ЦСУ) включает объект управления (ОУ), чувствительные элементы (ЧЭ), аналого-цифровой преобразователь (АЦП), цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) (рис. 16.1).

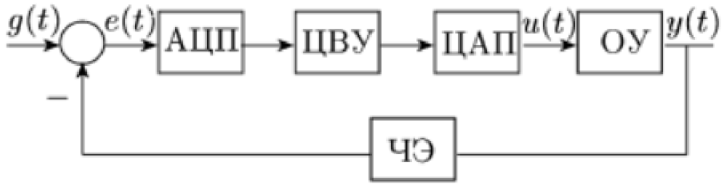


Рисунок 16.1. Функциональная схема ЦСУ

АЦП преобразует аналоговый сигнал в цифрой, а ЦАП – цифровой сигнал в аналоговый. ЦВУ выполняет все необходимые вычисления в соответствии с заданным алгоритмом управления.

Если пренебречь квантованием по уровню, цифровую систему управления можно представить в виде блок-схемы (рис. 16.2), состоящей из прерывателя, дискретного фильтра (ДФ), фиксатора нулевого порядка (ФНП) и непрерывной части (НЧ).

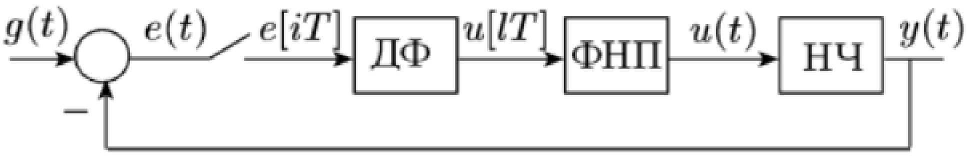


Рисунок 16.2. Блок-схема ЦСУ

Прерыватель является моделью АЦП и преобразует непрерывный сигнал e(t) в дискретный сигнал e[nT]. В дальнейшем прерыватель в явном виде на схеме не будем указывать, принимая, что он входит в состав ДФ.

Дискретный фильтр представляет собой модель ЦВУ и характеризуется дискретной передаточной функцией – передаточной функцией регулятора.

В качестве ЦАП чаще всего используется фиксатор нулевого порядка – элемент, который запоминает входной дискретный сигнал на один период – до прихода следующего дискретного сигнала. Таким образом, он преобразует входной сигнал, представляющий решетчатую функцию, в ступенчатый сигнал.

Фиксатор нулевого порядка (Zero-OrderHold) можно рассматривать как АИМ-элемент, вырабатывающий прямоугольные импульсы длительности T (относительная длительность $\gamma = 1$) и с амплитудой $A_И = 1$. В XCos данную функцию выполняет блок S/H (SAMPHOLD_m) из палитры SignalProcessing (рис. 16.3).

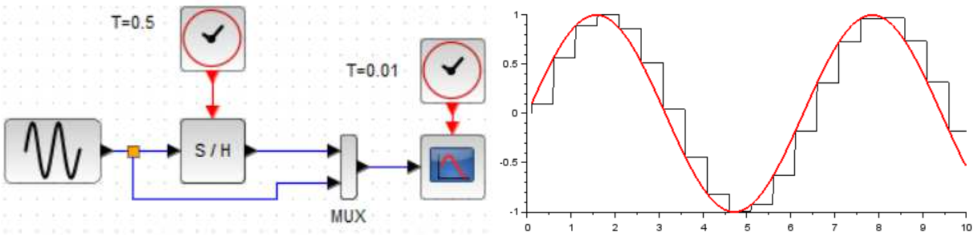


Рисунок 16.3. Реализация ФНП в среде XCosв виде блока S/H

Представив ФНП в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного элемента и формирующего звена, получим эквивалентную схему цифровой системы управления (рис. 16.4).

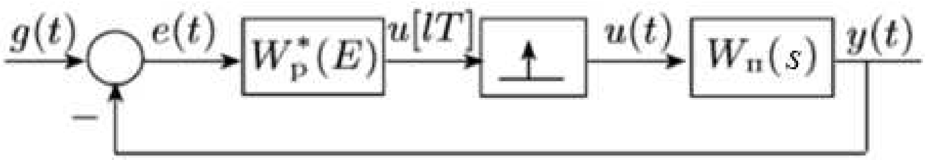


Рисунок 16.4. Эквивалентная структурная схема ЦСУ

На этой схеме W_{P}*(E) – (приведенная) передаточная функция (в операторной форме) дискретного фильтра (регулятора), $W_{п}$(p) – (приведенная) передаточная функция ПНЧ(=$W_{Ф}(s)\cdot W_{H}(s)$).

Передаточная функция (в изображениях Лапласа) формирующего звена (Zero-OrderHold) (см. (6.33)) имеет вид

$$W_{\Phi}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (16.1)$$

Поэтому передаточная функция (в изображениях Лапласа) ПНЧ есть

$$W_{\Pi}(s) = W_{\Phi}(s) W_{H}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} W_{H}(s).$$

Сравнение результатов работы блока S/H и его аналога в виде передаточной функции (16.1) приведено на рисунке 16.5. Полученные графики позволяют увидеть, что передаточная функция сдвигает сигнал вправо так, что он проходит по центру дискретного сигнала, который сформирован блоком S/H.

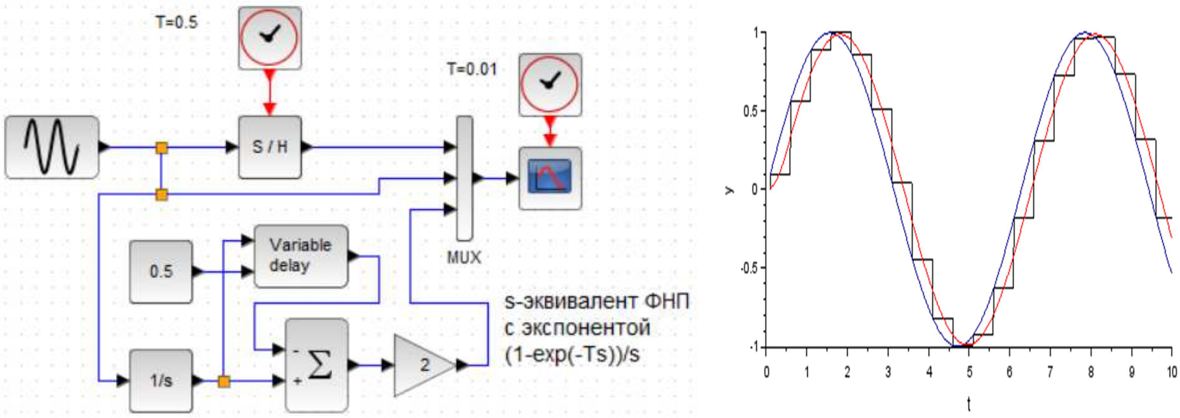


Рисунок 16.5. Реализация ФНП в среде XCos

Дискретная передаточная функция ПНЧ имеет вид:

$$W_{\Pi}^{*}(z) = Z_T\{W_{\Pi}(s)\} = Z_T\left\{\frac{W_H(s)}{s}\right\} - Z_T\left\{e^{-sT}\frac{W_H(s)}{s}\right\}.$$

Применение свойств z-преобразования позволяет упростить полученную выше формулу:

$$W_{\Pi}^{*}(z) = Z_T\{W_{\Pi}(s)\} = (1 - z^{-1})Z_T\left\{\frac{W_H(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z}Z_T\left\{\frac{W_H(s)}{s}\right\}. \quad (16.2)$$

Используя эту передаточную функцию, можно построить структурную схему дискретной модели цифровой системы управления (рис. 16.6).

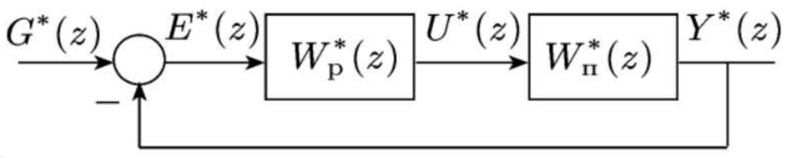


Рисунок 16.6. Дискретная модель ЦСУ

По этой структурной схеме передаточные функции замкнутой системы определяются по известным из теории непрерывных систем правилам. Передаточные функции относительно входа G*(z) и выходов Y*(z) и E*(z) равны

$$W_{xg}^{*}(z) = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}, W_{eg}^{*}(z) = \frac{1}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}.$$

17. Вычисление передаточных функций дискретных систем в общем случае

Выше мы рассмотрели вычисление передаточных функций дискретных систем, когда их эквивалентная схема за простейшим импульсным звеном содержит одно непрерывное звено – приведенную непрерывную часть.

Однако может потребоваться вычисление передаточных функций, эквивалентная схема которых имеет более общий вид (рис. 17.1).

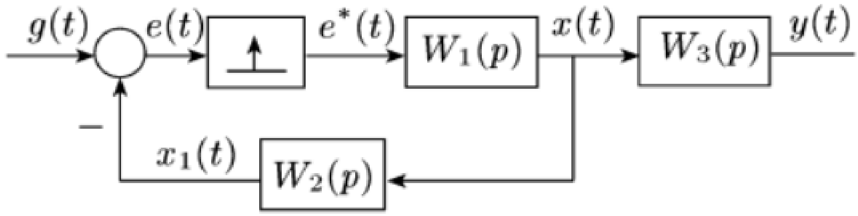


Рисунок 17.1. Обобщенная эквивалентная схема дискретной системы

Найдем передаточные функции $W^*_{xg}(z)$ и $W^*_{eg}(z)$. Используя полученную выше зависимость между входом простейшего импульсного звена и выходом следующего за ним *приведенного* непрерывного звена (ПНЧ) в дискретные моменты времени, можем записать

$X^*(z) = Z_T\{W_1(s)\}E^*(z)$,

$X_1^*(z) = Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z)$,

$E^*(z)=G^*(z)-X_1^*(z)$.

Исключим из этой системы $X_1^*(z)$:

$X^*(z) = Z_T\{W_1(s)\}E^*(z)$,

$E^*(z)=G^*(z)- Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z)$.

Из второго уравнения, а также исключив из двух уравнений $E^*(z)$, получим соответственно

$$W^*_{eg}(z) = \frac{E^*(z)}{G^*(z)} = \frac{1}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} \quad (17.1)$$

$$W^*_{xg}(z) = \frac{X^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} (17.2).$$

Теперь найдем передаточную функцию относительно выхода $Y^*(z)$. Для этого заменим в полученной выше системе из двух уравнений первое уравнение уравнением для $Y^*(z)$:

$Y^*(z) = Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}E^*(z)$,

$E^*(z)=G^*(z)- Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z)$.

Исключив из этой системы уравнений $E^*(z)$, получим

$$W^*_{yg}(z) = \frac{Y^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}. \quad (17.3)$$

Из полученных формул (17.1)-(17.3) вытекает следующее правило: ***передаточная функция относительно входа g(t) и какого-либо выхода равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (а при положительной обратной связи – минус) передаточная функция разомкнутой системы.***

Это правило совпадает с правилом вычисления передаточных функций одноконтурной непрерывной системы. Только следует иметь в виду, что при вычислении передаточной функции прямой цепи и передаточной функции разомкнутой системы непрерывные звенья, расположенные за простейшим импульсным звеном, нужно рассматривать как одно объединенное звено. *Нельзя находить Z_T-преобразования от передаточных функций отдельных звеньев, а затем полученные результаты перемножать.*

18. Характеристическое уравнение и основное условие устойчивости

Если внешние воздействия φ(t) заданы, уравнения дискретной системы управления можно записать в виде

$$a_0 y(t+nT) + a_1 y(t+(n-1)T) + \ldots + a_n y(t) = \varphi(t), \quad (18.1)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_2 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (18.2)$$

Если задана передаточная функция системы управления, то при определении характеристического полинома нужно исходить из следующих положений:

- по определению передаточной функции в операторной форме ее знаменатель есть собственный оператор;
- знаменатель передаточной функции в z-изображениях совпадает с характеристическим полиномом (при условии, что передаточная функция в операторной форме не содержит одинаковые нули и полюса).

Общее решение неоднородного разностного уравнения имеет вид:

$$y(t) = y_B(t) + y_C(t),$$

где $y_B(t)$ – частное решение этого уравнения и $y_C(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Линейная дискретная система управления называется ***устойчивой***, если общее решение однородного разностного уравнения при t→∞ стремится к нулю:

$$\lim_{t\to\infty} y_C[nT] = 0. \quad (18.3)$$

Если все корни z_i (i=1,2,..., n) характеристического уравнения ***простые*** (т.е. различные), то общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y_C(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^{t/T}, \qquad (18.4)$$

где Ci – произвольные постоянные.

Если среди корней характеристического уравнения имеется ***кратный корень*** z_j кратности k_j, то ему в (7.4) соответствует слагаемое

$$\left(C_1^j + C_2^j \frac{t}{T} + \cdots + C_{k_i}^j \left(\frac{t}{T}\right)^{k_j-1}\right) z_j^{t/T}.$$

Из (18.4) и последнего выражения следует, что условие (18.3) будет выполнено в том и только том случае, когда $|z_i| < 1$ при всех i=1,2,..., n.

Основное условие устойчивости: *для того чтобы линейная дискретная система управления была устойчива,* ***необходимо и достаточно****, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по* *модулю меньше единицы или, что то же, находились внутри единичного круга на z-плоскости корней.*

19. Необходимое условие устойчивости ЦСУ

Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_0$$

были по модулю меньше единицы ($|z_i| < 1$, $i = 1,2,...,n$) необходимо, чтобы при $a_0>0$ выполнялись неравенства

$$Q^*(1) > 0, \quad (-1)^n Q^*(-1) > 0. \quad (19.1)$$

Чтобы доказать это утверждение, разложим полином Q*(z) на элементарные множители:

$$Q^*(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n). \quad (19.2)$$

Если корень z_i является вещественным и по модулю меньше единицы, то множитель $(z–z_i)$ при $z = 1$ и множитель $(-l)(z-z_i)$ при $z=-1$ будут положительными. Если корень z_i является комплексным, т.е. $z_i=\alpha_i + j\beta_i$ (α_i,β_i – вещественные числа), то существует комплексно-сопряженный корень $z_i=\alpha_i-j\beta_i$. Произведение

$$(z - z_i)(z - z_{i+1}) = (z - \alpha_i)^2 + j\beta_i^2$$

при z=1 и произведение

$$(-1)(z - z_i)(-1)(z - z_{i+1}) = (z - \alpha_i)^2 + \beta_i^2$$

при z=-1 будут положительными. Следовательно, из G.6) следует, что если все корни характеристического полинома по модулю меньше единицы, то будут выполняться неравенства (19.1).

20. Исследование устойчивости, основанное на преобразовании единичного круга в левую полуплоскость

Критерии Гурвица, Льенара-Шипара и другие критерии устойчивости непрерывных систем позволяют судить, находятся все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости или нет [1]. Поэтому их нельзя непосредственно использовать для исследования устойчивости дискретных систем. Однако, очевидно, ими можно воспользоваться, если произвести преобразование переменной характеристического уравнения, при котором единичный круг преобразуется в левую полуплоскость.

Утверждение 20.1. При преобразовании

$$v = \frac{z-1}{z+1}, \quad (20.1)$$

внутренность единичного круга на z-плоскости преобразуется в левую полуплоскость, его внешность – в правую полуплоскость и окружность (единичного радиуса) – в мнимую ось на v-плоскости.

Разрешим равенство (20.1) относительно z и подставим полученное выражение в характеристическое уравнение (18.1):

$$G^*(v) = (1-v)^n Q^*\left(\frac{1+v}{1-v}\right) =$$
$$= a_0(1+v)^n + a_1(1+v)^{n-1}(1-v) + \cdots a_n(1-v)^n = 0. \quad (20.2)$$

Представим преобразованное характеристическое уравнение в стандартной форме

$$G^*(z) = c_0z^n + c_1z^{n-1} + ... + c_n = 0. \quad (20.3)$$
$$Q^*(z) = a_0z^n + a_2z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \quad (20.4)$$

Выражения для коэффициентов этого уравнения через коэффициенты исходного характеристического уравнения получим, если в (20.2) раскроем скобки и произведем приведение подобных членов, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в (20.2) и (20.3).

При n = 1,2,3 коэффициенты преобразованного уравнения выражаются через коэффициенты исходного уравнения следующим образом:

n = 1: $c_0 = a_0 - a_1$, $c_1 = a_0 + a_1$;

n = 2: $c_0 = a_0 - a_1 + a_2$, $c_1 = 2(a_0 - a_2)$, $c_2 = a_0 + a_1 + a_2$;

n = 3: $c_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$, $c_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2$,

$c_2 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2$, $c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

В силу утверждения 20.1, если корни исходного характеристического уравнения располагаются внутри единичного круга, то корни преобразованного характеристического уравнения (20.1) располагаются в левой полуплоскости.

Для того чтобы дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни преобразованного характеристического уравнения располагались в левой полуплоскости (имели отрицательную вещественную часть).

21. Критерий устойчивости Джури

Составим таблицу Джури, которая содержит (n+1) строку и столько же столбцов (n – порядок характеристического уравнения). При этом заполненные клетки имеют треугольную форму: нулевая строка содержит (n+1) заполненных клеток, а все последующие строки имеют на единицу меньше заполненных клеток, чем предыдущая строка (табл. 21.1).

Характеристический полином: $Q*(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$

Таблица 21.1

$d_{00} = a_0$	$d_{01} = a_1$	…	$d_{0,n-1}$	$d_{0,n} = a_n$
d_{10}	d_{11}	…	$d_{1,n-1}$	
…	…	…	…	…
$d_{n-1,0}$	$d_{n-1,1}$	…		
$d_{,n0}$		…		

Клетки **нулевой строки** заполняются коэффициентами характеристического уравнения в порядке возрастания нижних индексов: $d_{0k}=a_k$ ($k = 0,1,...,n$).

Элементы **первой строки** d_{1k} ($k = 0,1,...,n - 1$) вычисляются следующим образом. Выписываются элементы нулевой строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов двух выписанных строк: $\alpha_1 = d_{0n}/d_{00} = a_n/a_0$. Алгоритм описанных вычислений имеет вид:

$$
\begin{array}{rccccc}
- & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \quad \alpha_1 = a_n/a_0 \\
\hline
 & d_{10} = a_0 - \alpha_1 a_n & d_{11} = a_1 - \alpha_1 a_{n-1} & \cdots & d_{1,n-1} = a_{n-1} - \alpha_1 a_1 &
\end{array}
$$

Последняя разность обращается в нуль, и она отбрасывается. Поэтому 1-я строка содержит ***n*** элементов – на один элемент меньше, чем нулевая строка.

Элементы всех последующих строк определяются аналогично элементам 1-й строки. Так, например, для вычисления k-й строки выписываются элементы (k-1)-й строки и под ним же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов выписанных двух строк $\alpha_k = d_{k-1,n-k+1}/d_{k-1,0}$.

Последняя разность, обращающаяся в нуль, отбрасывается. Формула для вычисления i-го элемента k-й строки ($k = 1, 2, ... , n$) имеет вид

$$\boldsymbol{d_{ki} = d_{k-1,i} - \alpha_k d_{k-1,n-k-i+1}, \; k = 1, 2, ... , n, \; i = 0, 1, ... , n - k.}$$

22. Критерий Джури (E.I.Jury)

Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома

$$Q*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

находились внутри единичного круга, ***необходимо и достаточно***, чтобы при $a_0 > 0$ все элементы нулевого столбца таблицы Джури были положительны: $d_{0i} > 0$, $i = 1, 2, ... , n$.

Если все элементы нулевого столбца, кроме последнего, положительны: $d_{0i}>0$, $i=1,2,…,n-1$, то положительность последнего элемента, т.е. условие $d_{0n} > 0$, эквивалентно необходимому условию устойчивости (7.1). Поэтому если необходимое условие выполняется, то последний элемент d_{0n} можно не вычислять.

23. Показатели качества в переходном режиме

Качество дискретных систем управления определяется так же, как и качество непрерывных систем, и для его оценки можно использовать все ранее введенные показатели качества в переходном и установившемся режимах или их аналоги.

Показатели качества в переходном режиме делятся на прямые и косвенные. Прямыми показателями качества называются числовые показатели, которые определяются по переходной характеристике. Показатели качества, определяемые не по переходной характеристике, называются косвенными.

Среди прямых показателей наиболее часто используются ***время регулирования и перерегулирование***. Напомним: временем регулирования t_p называется минимальное время, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения h(∞) не превышает заданной величины Δ (рис. 8.1). Обычно принимают Δ =(0.02 — 0,1)h(∞).

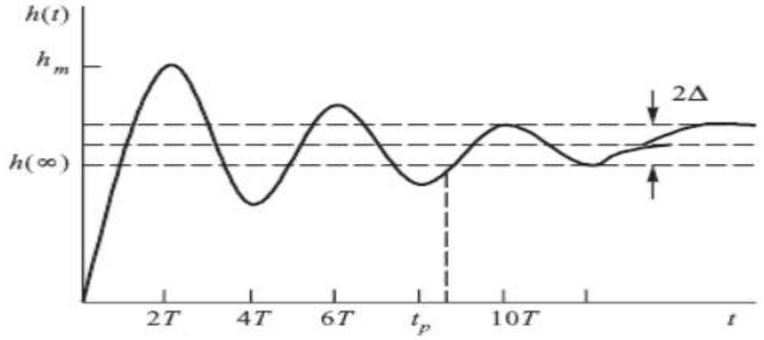


Рисунок 8.1. Переходная характеристика

Перерегулированием **σ** называют максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в процентах к установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\%.$$

Для графического определения прямых показателей качества необходимо иметь переходную характеристику. Ее можно построить по дискретной переходной функции h[nT], соединяя дискретные точки плавной кривой.

Рассмотрим вычисление переходной функции. По определению ***переходная функция h[nT] есть функция, которая описывает реакцию системы на единичное воздействие g[lT] = 1[nT] при нулевых начальных условиях***. И так как z-изображение от единичной решетчатой функции имеет вид G*(z) = Z{1[nT]} = z/(z − 1), z-изображение переходной функции равно

$$H^*(z) = W^*_{yg}(z)G^*(z) = W^*_{yg}(z)\frac{z}{z-1},$$

где $W_{yg}^*(z)$ – передаточная функция относительно входа g[nT] и выхода y[nT].

Пусть изображение переходной функции имеет вид

$$H^*(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}. \quad (m \le n)$$

По определению z-преобразования

$$H^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[nT] z^{-1}.$$

Поэтому значения переходной функции h[nT] можно найти, разложив H*(z) в ряд Лорана путем деления числителя B*(z) на знаменатель A*(z) по правилу деления многочленов. При этом в многочленах B*(z) и A*(z) слагаемые должны располагаться в порядке убывания степени z.

Примечание: **Ряд Лорана в конечной точке** $z_0 \in C$ – функциональный ряд по целым степеням (z- z_0) над полем комплексных чисел: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, где *переменная* $z \in C \backslash \{z_0 \in C\}$, а *коэффициенты* $c_n \in C$ для $n \in Z$.)

Пример моделирования переходных процессов в дискретных системах приведен на рисунке 23.1.

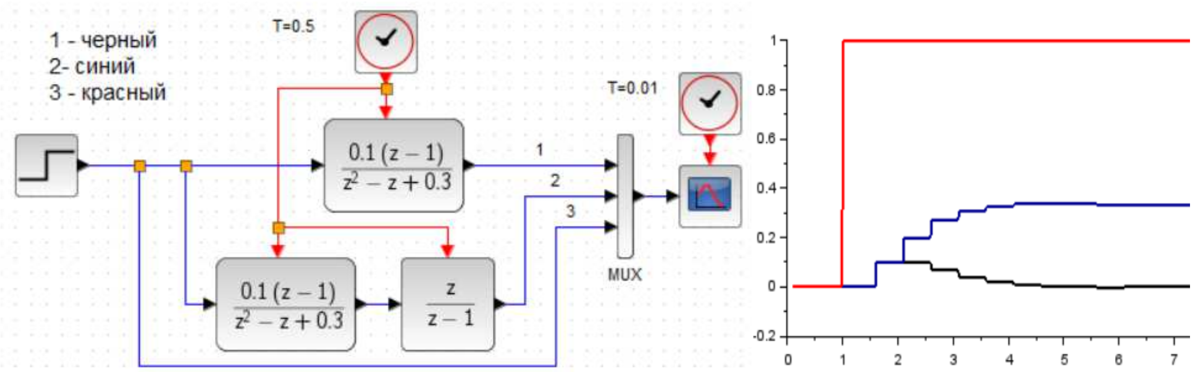


Рисунок 23.1. Переходные характеристики дискретных систем

24. Косвенные показатели качества ЦСУ в переходном режиме

Как и в случае непрерывных систем, для оценки качества дискретных систем используются следующие *косвенные показатели качества: корневые, частотные и суммарные* (*аналог интегральных*).

Корневым показателем качества является степень устойчивости η*, которая определяется следующим образом:

$$\eta^* = \min_v \{-\ln |z_v|\}$$

где z_v – корни характеристического уравнения. Степень устойчивости является косвенной мерой быстродействия системы.

Суммарной квадратической ошибкой называется ряд:

$$J_{20}^* = \sum_{l=0}^{\infty} e_{\Pi}^2[nT], e_{\Pi}[nT] = e[nT] - e_{\infty}[nT],$$

здесь e_n[lT] – переходная составляющая ошибки, e[nT] – ошибка и e_∞[nT] – установившаяся ошибка (вынужденная составляющая ошибки).

Частотные показатели – запас устойчивости по амплитуде и запас устойчивости по фазе – определяются точно так же, как и в случае непрерывных систем. Но в случае дискретных систем указанные показатели можно определить как по частотным, так и по псевдочастотным характеристикам. Однако псевдочастотные характеристики не находят широкого применения.

Возможны линейные дискретные системы, в которых переходный процесс заканчивается за конечное число шагов, т.е. существует такое положительное число l_0, что

$$h[lT] = h[l_0T] = h[\infty] \quad \forall l \geq l_0. \quad (24.1)$$

Если выполняется условие (241), то переходный ***процесс называется оптимальным***, а система, в которой происходит такой процесс, называется оптимальной (по переходному процессу) системой.

Условие оптимальности системы (по переходному процессу). Переходя к оригиналам, из равенства

$$Y^*(z) = W^*_{yg}(z)G^*(z)$$

по теореме о свертке получим:

$$h[lT] = \sum_{k=0}^{l} w_{yg}[kT]g[(l-k)T]. \quad (24.2)$$

По определению переходной функции при $g[lT] = l[IT]$ из (24.2) имеем:

$$h[lT] = \sum_{k=0}^{l} w_{yg}[kT]. \quad (24.3)$$

Отсюда следует, что система будет оптимальной по переходному процессу, т.е. будет выполнено условие (24.1), если

$$w_{yg}[kT] = 0 \text{ при } k > l_0. \quad (24.4)$$

При выполнении этого условия передаточная функция, связанная с весовой функцией z-преобразованием, принимает вид:

$$W^*_{yg}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{yg}[kT]z^{-k} = \sum_{k=0}^{l_0} w_{yg}[kT]z^{-k}. \quad (24.5)$$

В общем случае передаточная функция W*g(z) представляет собой отношение полиномов:

$$W^*_{yg}(z) = \frac{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n}(m \leq n), \quad (24.6)$$

и она при разложении в ряд Лорана примет вид (24.5), если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0. \quad (24.7)$$

Действительно, в этом случае имеем:

$$W^*_{yg}(z) = \frac{b_0}{a_0}z^{m-n} + \frac{b_1}{a_0}z^{m-n-1} + \ldots + \frac{b_m}{a_0}z^{-n}.$$

Таким образом, система (8.9) является оптимальной (переходный процесс в ней заканчивается за конечное число шагов), если выполняется условие (24.7).

Пример. Замкнутая дискретная система состоит из фиксатора нулевого порядка и непрерывной части с передаточной функцией $W_H(s)=k/(2s+1)$, период T=0.1. Определить параметр k, при котором переходный процесс будет оптимальным.

Решение. При фиксаторе нулевого порядка передаточная функция формирующего звена имеет вид$W_{\Phi}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$. Поэтому передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W_{\Pi}(s) = W_{\Phi}(s)W_{H}(s) = \frac{k(1-e^{-Ts})}{s(2s+1)},$$

и передаточная функция разомкнутой дискретной модели равна

$$W_{\Pi}^{*}(z) = Z_T\{W_{\Pi}(s)\} = \frac{k(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(2s+1)}\right\} = \frac{0.05k}{z-0.95}.$$

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_{yg}^{*}(z) = \frac{W_{\Pi}^{*}(z)}{1+W_{\Pi}^{*}(z)} = \frac{0.05k}{z-0.95+0.05k}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (24.7) для оптимального k получаем $k = \frac{0.95}{0.05} = 19.$

Численная проверка результата проведена путем моделирования системы в среде Xcos. Использовано 3 варианта значений коэффициента k. Вариант k=19 (синий график) соответствует оптимальному переходному процессу по времени, но видно наличие статической ошибки.

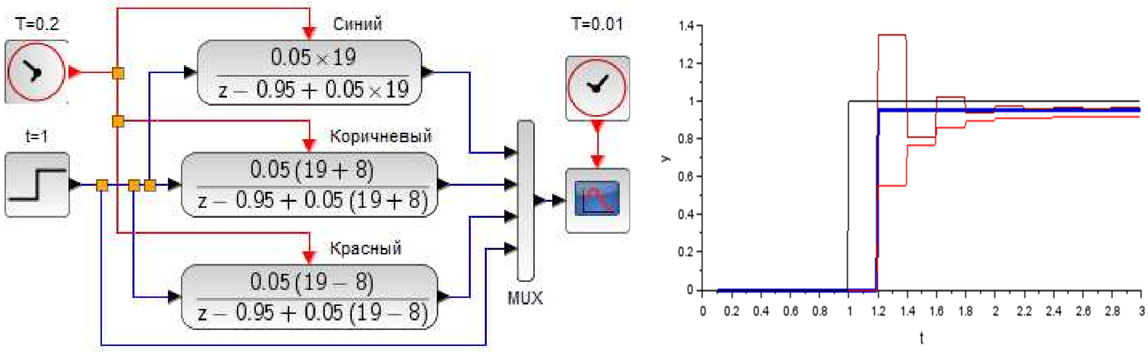


Рисунок 24.1. Модель примера в Xcos и графики результатов моделирования

25. Показатели качества ЦСУ в установившемся режиме. Коэффициенты ошибки

Наиболее полной характеристикой качества в установившемся режиме является установившаяся ошибка $e_{\infty}[nT]$. Ее можно найти по z-изображению E*(z) на основе теоремы о граничных значениях:

$$e_{\infty}[nT] = \lim_{z\to 1}(z-1)E^{*}(z)$$

Другим показателем качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибки, которые определяются ниже.

Переходя к оригиналам, из равенства

$$E^{*}(z) = W_{eg}^{*}(z)G^{*}(z)$$

по теореме о свертке получим

$$e[nT]=\sum_{k=0}^{n}w_{eg}[(n-k)T]g[kT].$$

Процесс считается установившимся в текущий момент времени, если входное воздействие начало действовать при t_0=-∞. Поэтому, положив в предыдущей формуле начальное k=-∞, получим

$$e_\infty[nT]=\sum_{k=0}^{n}w_{eg}[(n-k)T]g[kT].$$

или, положив *n*-*k*=*i*, получим

$$e_\infty[nT]=\sum_{i=0}^{\infty}w_{eg}[iT]g[(n-i)T]. \qquad (25.1)$$

Разложим функцию *g(t — τ)* в ряд Тейлора в окрестности точки t:

$$g(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{g^{(k)}(t)}{k!}\tau^k,\quad g^{(k)}(t)=\frac{d^kg(t)}{dt^k}.$$

Произведем дискретизацию по времени, для чего в полученном разложении положим *t — nT* и*τ=iT:*

$$g[(n-i)T]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{g^{(k)}[nT]}{k!}(iT)^k.$$

Подставим это выражение в (25.1) и поменяем порядок суммирования. Тогда получим:

$$e_\infty[nT]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sum_{i=0}^{\infty}w_{eg}[iT](iT)^k\frac{g^{(k)}[nT]}{k!},$$

или

$$e_\infty[nT]=\sum_{k=0}^{\infty}C_kg^{(k)}[nT]$$

где

$$C_k=(-1)^k\sum_{i=0}^{\infty}\frac{w_{eg}[iT](iT)^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Коэффициенты ошибки C_k характеризуют качество системы в установившемся режиме и называются коэффициентами ошибки. При этом C_0 называют ***коэффициентом позиционной ошибки***, C_1 – ***коэффициентом скоростной ошибки*** и C_2 – ***коэффициентом ошибки по ускорению***.

26. Статические и астатические системы

Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю. Статическая ошибка – это установившаяся ошибка при постоянных внешних воздействиях.

Система является астатической и обладает астатизмом r-го порядка, если первые r коэффициентов равны нулю, а (r+1)-й коэффициент ошибки отличен от нуля:

$$C_0=C_1=...=C_{r-1}=0,\ C_r\neq 0$$

Для астатической системы с астатизмом r-го порядка первые r+1 коэффициентов можно определить по формуле

$$C_k = \left.\frac{T^k W_{eg}^*(z)}{(z-1)^k}\right|_{z=1}, \quad k=0,1,2,\dots,r.$$

Этой формулой можно пользоваться при вычислении до первого отличного от нуля коэффициента ошибки.

Дискретная система будет астатической, если передаточная функция дискретного фильтра (регулятора) включает множитель 1/(z-1) или непрерывная часть содержит интегрирующее звено.

Порядок астатизма системы равен сумме числа интегрирующих звеньев в непрерывной части и показателю степени z-1 в знаменателе дискретного фильтра.

27. Синтез дискретных систем. Типовые законы управления

Как и в непрерывном случае, возможны две различные постановки задачи синтеза дискретных систем управления:

1) синтез параметров при фиксированной структуре;
2) синтез управляющего устройства при произвольной структуре.

В данной главе предполагается, что регулятор реализуется с помощью цифровых устройств и эквивалентная структурная схема включает дискретный фильтр (регулятор), реализующий требуемый закон управления (рис. 27.1).

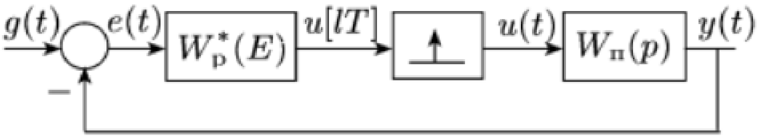


Рисунок 27.1. Эквивалентная схема системы управления с дискретным регулятором

Типовые законы управления в дискретном случае определяются следующим образом.

Пропорциональный закон, или П-закон (П-регулятор):

$$u[nT]=k_П e[nT], \quad W_P{*}(z)=k_П,$$

Пропорционально-суммарный закон (аналог ПИ-закона), или ПС-закон (ПС-регулятор):

$$u[nT]=(k_П+k_C/(1-E^{-1}))e[nT], \quad W_P{*}(z)= k_П+k_C\cdot z/(z-1),$$

где E^{-1} – обратный оператор сдвига: $E^{-1}e[nT] = e[(n-1)T]$.

Пропорционально-разностный закон (аналог ПД-закона), или ПР-закон (ПР-регулятор):

$$u[nT]=(k_П+k_P(1-E^{-1}))e[nT], \quad W_P{*}(z)= k_П+k_P\cdot(z-1)/z,$$

Пропорционально-суммарно-разностный закон (аналог ПИД-закона), или ПСР-закон (ПСР-регулятор):

$$u[nT]=(k_П+ k_C/(1-E^{-1})+k_P(1-E^{-1}))e[nT],$$
$$W_P{*}(z)=k_П+ k_C\cdot z/(z-1)+k_P\cdot(z-1)/z,$$

28. Метод полиномиальных уравнений

Рассматривается задача синтеза при произвольной (нефиксированной) структуре в следующей постановке. Задана передаточная функция приведенной НЧ $W_П(s)$ и соответственно известна дискретная передаточная функция неизменяемой части

$$W_П^*(z) = Z_T\{W_П(s)\} = P^*(z)/Q^*(z).$$

Из заданных требований к качеству синтезируемой системы получена желаемая передаточная функция $W_Ж^*(z)$. Требуется синтезировать регулятор, при котором передаточная функция $W_{yg}^*(z)$ синтезированной системы (рис. 27.1) равна желаемой:

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_P^*(z)W_П^*(z)}{1+W_P^*(z)W_П^*(z)} = W_Ж^*(z). \quad (28.1)$$

Разрешив это тождество относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_P^*(z) = \frac{1}{W_П^*(z)}\cdot\frac{W_Ж^*(z)}{1-W_Ж^*(z)}. \quad (28.2)$$

При синтезе регулятора нужно позаботиться о том, чтобы он был физически осуществим и синтезированная система была грубой.

Условие физической осуществимости регулятора, состоящее в том, что следствие не может предшествовать причине, будет выполнено, если степень числителя его передаточной функции не превышает степень ее знаменателя.

Условие грубости будет нарушено, если передаточная функция неизменяемой части содержит нули или полюса вне единичного круга, и они входят в передаточную функцию регулятора. В этом случае при вычислении передаточной функции разомкнутой системы указанные нули и полюсы сокращаются, если регулятор реализуется точно в соответствии с (28.2). Однако при малом изменении параметров регулятора указанные нули и полюсы могут не сократиться. Тогда разомкнутая система становится неустойчивой, что может привести к неустойчивости и замкнутой системы.

И это условие накладывает определенные ограничения на выбор желаемой передаточной функции, что в общем случае исключает возможность задания желаемой передаточной функции произвольно. Поэтому обычно задаются желаемым характеристическим полиномом синтезируемой системы.

Разложим числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых содержит нули внутри единичной окружности, другой – на и вне единичной окружности:

$$W_{\Pi}^{*}(z)=\frac{P^{*}(z)}{Q^{*}(z)}=\frac{P_{\text{В}}^{*}(z)P_{\text{Н}}^{*}(z)}{Q_{\text{В}}^{*}(z)Q_{\text{Н}}^{*}(z)}.$$

Здесь $P_{\text{В}}{*}(z)$, $Q_{\text{В}}{*}(z)$ – полиномы, нули которых расположены внутри единичной окружности; $P_{\text{Н}}{*}(z)$, $Q_{\text{Н}}{*}(z)$ – полиномы, нули которых расположены на и вне единичной окружности.

Подставим полученное выражение для $W_{\Pi}{*}(z)$ в (28.2):

$$W_{P}^{*}(z)=\frac{Q_{\text{В}}^{*}(z)Q_{\text{Н}}^{*}(z)}{P_{\text{В}}^{*}(z)P_{\text{Н}}^{*}(z)}\cdot\frac{W_{\text{Ж}}^{*}(z)}{1-W_{\text{Ж}}^{*}(z)}. \quad (28.3)$$

Как отмечалось, для того чтобы синтезированная система была грубой, передаточная функция регулятора (28.3) не должна содержать полиномы $P_{\text{Н}}{*}(z)$ и $Q_{\text{Н}}{*}(z)$, содержащие нули вне единичной окружности.

Но, как это следует из (28.3), для этого нужно, чтобы $W_{\text{Ж}}^{*}(z)$ включало полином $P_{\text{Н}}{*}(z)$, а $1\text{-}W_{\text{Ж}}^{*}(z)$ – полином $Q_{\text{Н}}{*}(z)$, т.е. желаемая передаточная функция должна удовлетворять соотношениям

$$W_{\text{Ж}}^{*}(z)=\frac{P_{\text{Н}}^{*}(z)M^{*}(z)}{G^{*}(z)}, \quad (28.4а)$$

$$1-W_{\text{Ж}}^{*}(z)=\frac{Q_{\text{Н}}^{*}(z)N^{*}(z)(z-1)^{r}}{G^{*}(z)}, \quad (28.4б)$$

где показатель степени r множителя $(z\text{-}1)^{r}$ определяется требуемым порядком астатизма, $M{*}(z)$ и $N{*}(z)$ – неопределенные полиномы, которые определяются после исключения $W_{\text{Ж}}^{*}(z)$ в (28.4) из полиномов уравнения

$$P_{\text{Н}}{*}(z)M{*}(z) + Q_{\text{Н}}{*}(z)N{*}(z)(z-1)^{r} = G{*}(z).$$

Здесь $G^{*}(z)$ – желаемый характеристический полином (знаменатель желаемой передаточной функции).

Подставив (28.4) в (28.3), находим искомую передаточную функцию регулятора:

$$W_{\text{P}}^{*}(z)=\frac{Q_{\text{В}}^{*}(z)M^{*}(z)}{P_{\text{В}}^{*}(z)N^{*}(z)(z-1)^{r}}. \quad (28.5)$$

Обозначим степень произвольного полинома $R_{i}{*}(z)$ через n_{Ri}. Тогда ***условие физической осуществимости*** можно записать в виде (28.1)

$$n_{Q_B}+n_M\le n_{P_B}+n_N+r. \quad (28.6)$$

Полиномиальное уравнение (28.2) разрешимо, если число неизвестных (коэффициентов полиномов $M{*}(z)$ и $N{*}(z)$) не меньше числа уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в уравнении (28.2). И так как число неизвестных равно $(n_{M}+1)+(n_{N}+1)$, а число уравнений $n_{G}+1$, ***условие разрешимости полиномиального уравнения*** принимает вид

$$n_M+n_N+1\ge n_G. \quad (28.7)$$

В (28.4) степени полиномов числителя и знаменателя равны. Степень желаемого характеристического полинома n_G должна удовлетворять соотношению

$$n_G = n_{Q_H} + n_N + r,$$

откуда

$$n_N = n_G - n_{Q_H} - r. \quad (28.8)$$

Объединяя ***условие физической осуществимости*** (28.6) и ***условие разрешимости*** (28.7), с учетом (28.8) получим

$$n_{Q_H} + r - 1 \le n_M \le n_{P_B} + n_G - n_Q, \quad (28.9)$$

где $n_Q = n_{Q_B} + n_{Q_H}$ – степень знаменателя передаточной функции неизменяемой части.

Таким образом, условия физической осуществимости регулятора и разрешимости полиномиального уравнения будут выполнены, если степени полиномов M*(z) и N*(z) удовлетворяют соотношениям (28.8) и (28.9).

Из условия (28.9) получаем, что степень характеристического полинома синтезируемой системы должна удовлетворять неравенству

$$n_G \ge n_{Q_H} + r + n_Q - 1 - n_{P_B}. \quad (28.9)$$

Хотя вначале мы предполагали, что желаемая передаточная функция известна, в действительности она не может быть выбрана заранее (28.4).

Порядок синтеза системы управления ***методом полиномиальных уравнений*** можно сформулировать следующим образом.

1. Разложить полиномы числителя и знаменателя передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых имеет нули внутри единичной окружности, другой – на и вне единичной окружности. Если указанные полиномы не имеют нулей на и вне единичной окружности, то положить P_H*(z)=1 и Q_H*(z)=1; если они не имеют нулей внутри единичной окружности, то приравнять P_B(z) и Q_B*(z) постоянному множителю этих полиномов.
2. Исходя из требований к качеству синтезируемой системы в переходном режиме и порядку астатизма, выбрать характеристический полином синтезируемой системы G*(z) и число r. Степень полинома G*(z) должна удовлетворять условию (28.10).
3. Из соотношений (28.8)–(28.9) определить степени неопределенных полиномов M*(z) и N*(z) и записать их с неизвестными коэффициентами.
4. Подставить полученные неопределенные полиномы в полиномиальное уравнение (28.2) и определить их коэффициенты.
5. Подставить найденные полиномы M*(z) и N*(z) в формулу для передаточной функции регулятора (28.5).

Для того чтобы синтезируемый регулятор был более простым, степени полиномов G*(z), M*(z) и N*(z) должны быть как можно меньшими.

29. Синтез дискретной системы по непрерывной модели

Дискретный регулятор можно конструировать, используя методы синтеза непрерывных систем. Для этого сначала нужно с помощью указанных методов определить передаточную функцию $W_p(s)$ аналогового (непрерывного) регулятора, а затем аппроксимировать $W_p(s)$ дискретной передаточной функцией $W_P{}^*(z)$. При этом, учитывая, что дискретизация по времени с периодом T вводит запаздывание T/2 (см. (6.60)), следует проводить синтез для объекта с передаточной функцией $e^{\sim Ts/2}W_o(s)$, где $W_o(s)$ – передаточная функция исходного объекта. При синтезе передаточную функцию введенного звена чистого запаздывания можно аппроксимировать одним из следующих способов:

$$e^{-Ts/2} \cong 1 - \frac{T}{2}s, \quad e^{-\frac{Ts}{2}} \cong \frac{1}{1+\left(\frac{T}{2}\right)s}, \quad e^{-\frac{Ts}{2}} \cong \frac{1-(T/4)s}{1+(T/4)s}.$$

При получении дискретной передаточной функции $W_P{}^*(z)$ можно воспользоваться аппроксимацией производной конечными разностями (метод Эйлера): прямой

$$pe(t) \cong \frac{e(t+T)-e(t)}{T} = \frac{E-1}{T}e(t)$$

или обратной

$$pe(t) \cong \frac{e(t)-e(t-T)}{T} = \frac{1-E^{-1}}{T}e(t) = \frac{E-1}{TE}E(t)$$

На основе этих равенств при методе Эйлера s заменяется на (z-1)/T или (z-1)/Tz.

Другой метод аппроксимации – метод трапеции, или метод Тустена (Tustin), состоит в том, что s заменяется на $\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$

Такая замена получается следующим образом.

Интеграл $u(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau$ положив $t = lT$, можно представить в виде

$$u[lT] = \int_0^{lT} e(\tau)d\tau = \int_0^{(l-1)T} e(\tau)d\tau + \int_{(l-1)T}^{lT} e(\tau)d\tau =$$

$$= u[(l-1)T] + \int_{(l-1)T}^{lT} e(\tau)d\tau$$

Последний интеграл представляет площадь под кривой e = e(t) на отрезке *[(l-1)T,lT]* (рис. 29.1).

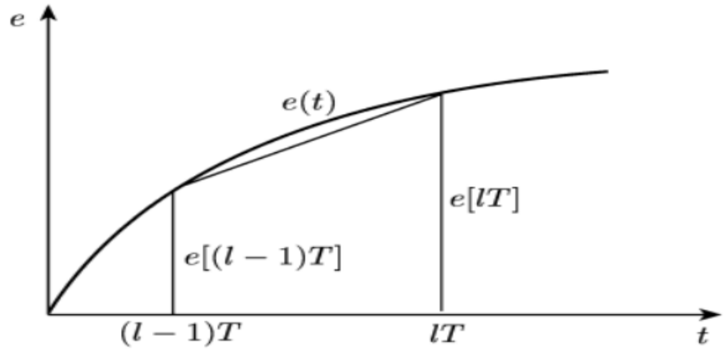


Рисунок 29.1. Аппроксимация методом трапеций

Заменив эту площадь площадью трапеции, получаемой при аппроксимации кривой e=e(t) отрезком прямой на указанном отрезке, находим:

$$u(nT) = u((n-1)T) + \frac{e[(n-1)T + e(nT)}{2}T$$

Это соотношение получено из равенства:

$$u(t) = \int\limits_0^t e(\tau)d\,\tau, \text{или}\, u(t) = \frac{1}{T}e(t).$$

При аппроксимации аналоговой передаточной функции дискретной передаточной функцией методом трапеции переменная s заменяется на $\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$.

30. Цифровой ПИД-регулятор: расчет коэффициентов дискретного регулятора по коэффициентам непрерывного регулятора, схема дискретного регулятора на основе элементов задержки

Дискретный характер сигналов необходимо учитывать при расчете регуляторов, осуществляющих алгоритмы автоматического управления различными объектами [3]. ПИД-регуляторы являются распространенными элементами автоматизированных систем.

Расчет коэффициентов цифрового ПИД-регулятора целесообразно осуществить на основе методов расчета непрерывных регуляторов. Уравнение непрерывного ПИД-регулятора:

$$u(t) = k_{\text{П}}e(t) + k_{\text{И}}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + k_{\text{Д}}\frac{de(t)}{dt},$$

где e(t) – рассогласование выходного сигнала системы с входным заданием, u(t) – выходной сигнал регулятора.

Предполагается, что коэффициенты $k_{\text{П}}$, $k_{\text{И}}$ и $k_{\text{Д}}$ непрерывного регулятора известны.

Дискретная форма уравнения ПИД регулятора, полученная заменой операции интегрирования на численное интегрирование (суммирование) методом прямоугольников, имеет вид:

$$u(n)=k_{\text{П}}e(n)+k_{\text{И}}T\sum_{m=0}^{n-1}e(m)+\frac{k_{\text{Д}}}{T}[e(n)-e(n-1)],\quad (30.1)$$

Получить разностное уравнение для ПИД-регулятора можно путем использования формулы, полученной сдвигом на один такт формулы (30.1):

$$u(n-1)=k_{\text{П}}e(n-1)+k_{\text{И}}T\sum_{m=0}^{n-2}e(m)+\frac{k_{\text{Д}}}{T}[e(n-1)-e(n-2)].\quad (30.2)$$

После вычитания формулы (30.2) из формулы (30.1) получим рекуррентное уравнение:

$$u(n)-u(n-1)=k_{\text{П}}\big(e(n)-e(n-1)\big)+k_{\text{И}}T(e(n-1)-e(n-2))+$$
$$+\frac{k_{\text{Д}}}{T}[e(n)-2e(n-1)+e(n-2)],$$

Сгруппируем элементы уравнения в порядке номеров отсчетов сигнала рассогласования:

$$u(n)=u(n-1)+\left(k_{\text{П}}+\frac{k_{\text{Д}}}{T}\right)e(n)+\left(k_{\text{И}}T-k_{\text{П}}-2\frac{k_{\text{Д}}}{T}\right)e(n-1)+$$
$$+\left(\frac{k_{\text{Д}}}{T}-k_{\text{И}}T\right)e(n-2),$$

или

$$(n)=u(n-1)+d_0e(n)+d_1e(n-1)+d_2e(n-2),\quad (30.3)$$

где

$$d_0=k_{\text{П}}+\frac{k_{\text{Д}}}{T};\quad d_1=k_{\text{И}}T-k_{\text{П}}-2\frac{k_{\text{Д}}}{T};\quad d_2=\frac{k_{\text{Д}}}{T}-k_{\text{И}}T.\quad (30.4)$$

Дискретная форма уравнения ПИД регулятора, полученная заменой операции интегрирования на численное интегрирование методом трапеций имеет вид:

$$u(n)=k_{\text{П}}e(n)+k_{\text{И}}T\left(\frac{e(0)}{2}+\sum_{m=0}^{n-1}e(m)+\frac{e(n)}{2}\right)+\frac{k_{\text{Д}}}{T}[e(n)-e(n-1)].$$

Рекуррентная форма

$$(n)=u(n-1)+g_0e(n)+g_1e(n-1)+g_2e(n-2),\quad (30.5)$$

где

$$g_0=k_{\text{П}}+\frac{k_{\text{Д}}}{T}+\frac{k_{\text{И}}T}{2};\quad g_1=\frac{k_{\text{И}}T}{2}-k_{\text{П}}-2\frac{k_{\text{Д}}}{T};\quad g_2=\frac{k_{\text{Д}}}{T}.\quad (30.6)$$

Если известны параметры непрерывного ПИД-регулятора, параметры дискретного ПИД-регулятора могут быть рассчитаны по полученным выше формулам.

Схема дискретного регулятора на основе элементов задержки, усилителей и сумматоров показана на рисунке 30.1.

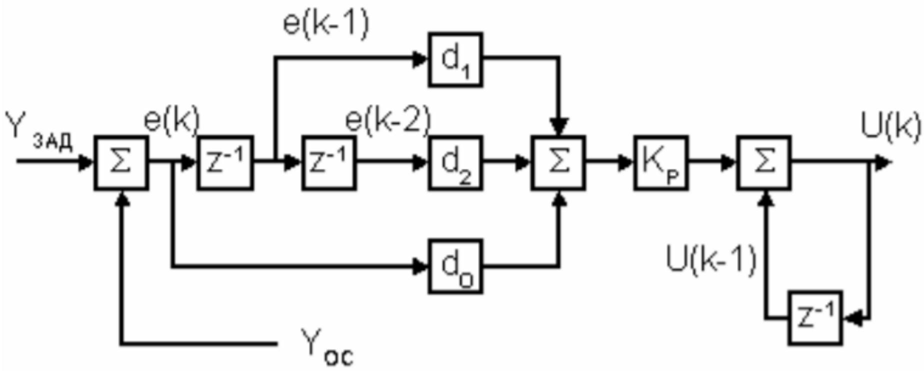


Рисунок 30.1. Структурная схема скоростного ПИД-регулятора

31. Цифровой ПИД-регулятор: схема на основе z-образов интегральных и дифференциальных звеньев

Непрерывный ПИД-регулятор состоит из пропорционального, интегрального и дифференциального модулей, сигналы которых суммируются. Структурная схема непрерывного ПИД-регулятора приведена на рисунке 31.1.

Получить цифровой ПИД-регулятор из непрерывного ПИД-регулятора можно путем применения z-образов интегральных и дифференциальных звеньев [4], как показано на рисунке 31.2.

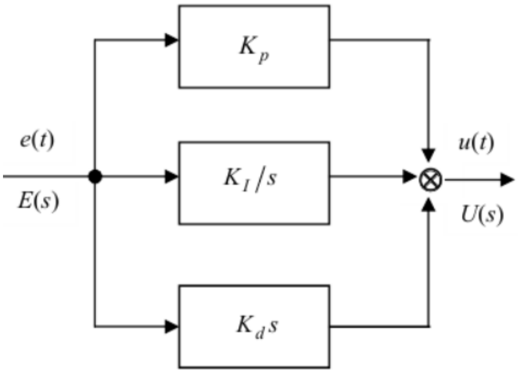


Рисунок 31.1. Структура ПИД-регулятора

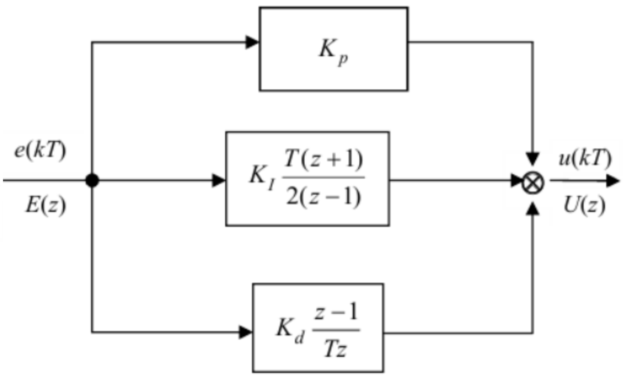


Рисунок 31.2. Структура цифрового ПИД-регулятора

Предполагается, что коэффициенты $k_П$, $k_И$ и $k_И$ непрерывного регулятора известны.

Пропорциональное управление в цифровом ПИД-регуляторе по-прежнему реализуется умножением сигнала ошибки на постоянный коэффициент K_p, а интегрирование и дифференцирование осуществляется численными методами. Например, интегрирование по методу трапеций дает передаточную функцию соответствующей составляющей:

$$\frac{K_I T(z+1)}{2(z-1)}$$

Производную в момент времени t=T можно приближенно заменить первой разностью:

$$\left.\frac{de}{dt}\right|_{t=T} \approx \frac{e(kT)-e[(k-1)T]}{T}$$

Применение z-преобразования к правой части последнего уравнения дает (с учетом постоянного коэффициента K_d):

$$\frac{K_d(z-1)}{Tx}.$$

С учетом вышеизложенного структурная схема цифрового ПИД-регулятора принимает вид, приведенный на рисунке 31.2.

Собственно синтез ПИД-регулятора заключается в определении коэффициентов K_p, K_I и K_d по заданным критериям качества.

32. Метод пространства состояний

Метод пространства состояний, применяемый для исследования непрерывных систем, с успехом может быть использован и для цифровых систем [2,4]. Если непрерывная система описывается в пространстве состояний системой дифференциальных уравнений первого порядка (нормальная форма Коши), то цифровая система только с дискретными элементами – системой разностных уравнений первого порядка. В общем случае цифровая система может содержать как цифровые, так и аналоговые элементы, поэтому уравнения состояния включают одновременно дифференциальные и разностные уравнения первого порядка.

Метод пространства состояний имеет определенные преимущества перед классическим частотным методом:

- удобство решения задач на ЦВМ;
- унификация описания цифровых систем с различными типами квантования;
- единообразие описания одномерных и многомерных систем;
- возможность применения к некоторым типам нелинейных и нестационарных систем.

В общем случае состояние системы можно представить как минимальную информацию о ней, необходимую для определения (при известной входной функции) ее выхода, а также ее состояния в будущем.

Уравнения динамики систем, содержащих только цифровые элементы

Уравнения динамики систем, содержащие только цифровые элементы и полученные на основе методов пространства состояний, имеет вид:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}[n]\boldsymbol{u}[n];\\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}[n]\boldsymbol{u}[n],\end{cases} \qquad (32.1)$$

Значения этих элементов могут меняться только в дискретные моменты времени nT $(n=0,1,2,\ldots)$. В приведенных уравнениях: $\boldsymbol{x}[n]$ – вектор состояний системы, $\boldsymbol{y}[n]$ – вектор выходных сигналов, $\boldsymbol{u}[n]$ – вектор входных (управляющих) сигналов, ***A****[n]* – матрица системы, ***B****[n]* – матрица управления, ***C****[n]* – матрица выхода, ***D****[n]* – матрица прямой связи.

Общая структурная схема **цифровой** системы, соответствующая уравнениям (32.1), представлена на рисунке 32.1.

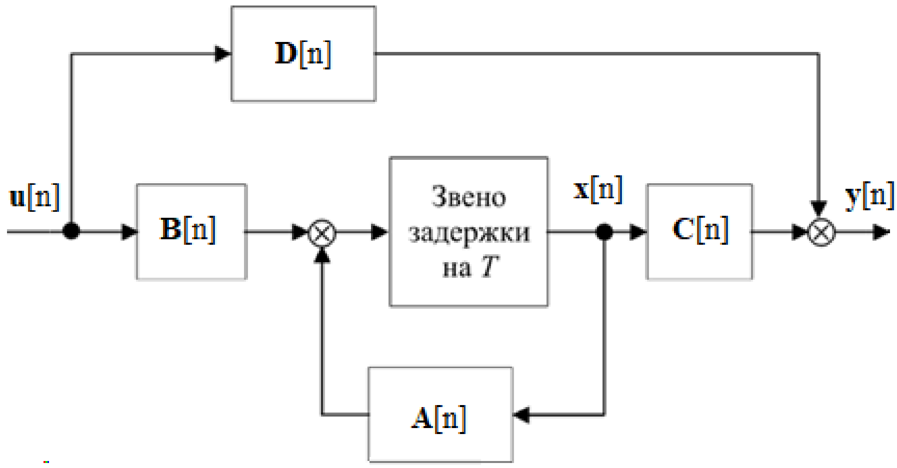


Рисунок 32.1. Структурная схема цифровой системы в пространстве состояний

33. Общее решение уравнений состояния для цифровой системы

Для систем с постоянными параметрами часто удобнее пользоваться для решения уравнений (32.1) методом z-преобразования. Применим z-преобразование к правым и левым частям этих уравнений и разрешим их относительно *X(z)* и *Y(z)*:

$$\begin{cases} X(z) = (zE - A)^{-1} z \cdot x(0) + (zE - A)^{-1} \cdot B \cdot U(z); \\ Y(z) = C(zE - A)^{-1} z \cdot x(0) + [C(zE - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(z), \end{cases}$$

где E – единичная матрица.

Вычислив обратное z-преобразование от выражений (32.2), определим вектор состояний $\boldsymbol{x}[n]$ и выходной вектор $\boldsymbol{y}[n]$.

34. Основные понятия метода пространства состояний

В настоящее время в теории автоматического управления широкое распространение получил метод исследования и проектирования автоматических систем, основанный на понятиях пространства состояний [2]. Для непрерывных автоматических систем метод пространства состояний изложен в работе [1]. Рассмотрим применение этого метода для дискретных систем.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, полностью характеризующие состояние автоматической системы и однозначно описывающие поведение системы при заданных входных воздействиях $u_1[n], u_2[n], \ldots, u_r[n]$, называются координатами состояния.

В общем случае имеем следующие уравнения состояния дискретных автоматических систем в векторном виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}[n], \boldsymbol{u}[n]); \\ \boldsymbol{y}[n] = \varphi(n, \boldsymbol{x}[n], \boldsymbol{u}[n], \end{cases} \qquad (34.1)$$

где **x**[n] – k-мерный вектор состояния; **u**[n] – r-мерный вектор управления (вектор входа); **y**[n] – m-мерный вектор выхода.

Для ***линейных дискретных*** автоматических систем уравнения состояния принимают вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}[n]\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}[n]\boldsymbol{u}[n], \end{cases} \qquad (34.2)$$

где $\boldsymbol{A}[n]$ – матрица системы размера $k \times k$; $\boldsymbol{B}[n]$ – матрица входа размера $k \times r$; $\boldsymbol{C}[n]$ – матрица выхода размера $m \times k$; $\boldsymbol{D}[n]$ – матрица связи между входом и выходом размера m×r.

Для ***стационарных линейных дискретных*** автоматических систем матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, C и D постоянны, а уравнения состояния имеют вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases} \qquad (34.3)$$

При переходе к новым переменным состояния с помощью линейного невырожденного преобразования переменных

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}, \qquad (34.4)$$

где $\boldsymbol{T}$ – матрица преобразования ($\det\mathbf{T} \neq 0$), уравнения состояния для новых переменных **z** примут вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}[n+1] = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}[n] + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases} \qquad (34.5)$$

Если преобразование (35.4) приводит матрицу **A** к жордановой форме, т.е. $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{J}$ жорданова форма матрицы **A**, то система (34.5) называется ***канонической формой Жордана***.

35. Определение уравнений состояния для систем с одним входом и одним выходом по разностному уравнению

Для линейных стационарных дискретных автоматических систем ***с одним входом и одним выходом*** вектор входа **u**[n] и вектор выхода **y**[n] являются скалярными величинами. Поэтому уравнения состояния (34.3) для таких систем имеют вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}u[n]; \\ y[n] = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}[n] + du[n], \end{cases} \qquad (35.1)$$

где **b**–вектор-столбец размера $k \times l$; **c**–вектор-строка размера $l \times k$; d–скаляр.

Рассмотрим определение уравнений состояния по разностному уравнению дискретной системы. При этом возможны два случая.

Случай 1. Пусть динамика линейной стационарной системы описывается линейным разностным уравнением

$$y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \ldots + a_k y[n] = b_0 u[n], \quad (35.2)$$

где $y[n]$– процесс на выходе системы; $u[n]$– входное воздействие.

Введем переменные состояния x_1, x_2, ... , x_k с помощью равенств

$$\boldsymbol{y[n+i] = x_{i+1}[n],\quad i = 0, 1, \dots, k-1.}\qquad (35.3)$$

Переменные состояния – это просто внутренние переменные в системе, привязанные к входам элементов задержки, как показано на рисунке 34.1. Элемент $x_k[n+1]$ соответствует выходу сумматора.

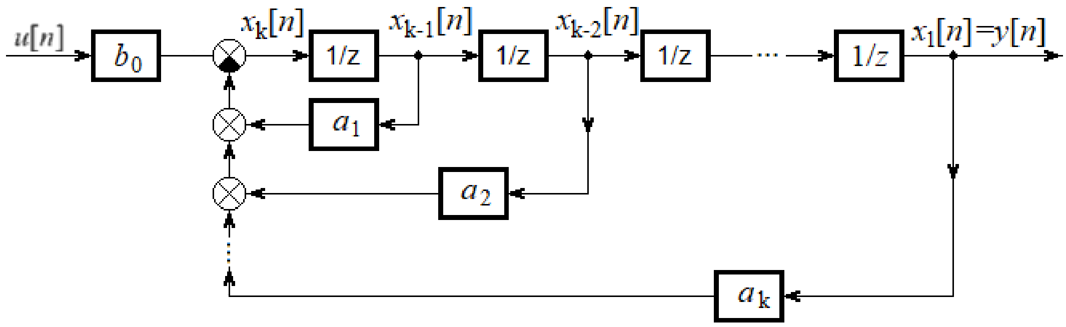


Рисунок 34.1

Тогда уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] \\ x_2[n+1] = x_3[n] \\ \qquad \dots \\ x_{k-1}[n+1] = x_k[n] \\ x_k[n+1] = -a_k x_1[n] - a_{k-1}x_2[n] - \dots - a_1 x_k[n] + b_0 u[n] \\ y[n] = x_1[n] \end{cases} \qquad (35.4)$$

Структурная схема системы, описываемой уравнениями (35.4), приведена на рисунке 34.1.

Если записать уравнения (35.4) в векторно-матричном виде (35.1), то в этих уравнениях:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix};\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix};$$

$$c = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0];\quad d = 0.$$

Случай 2. Пусть динамика линейной стационарной системы описывается линейным разностным уравнением

$$y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \dots + a_k y[n] =$$
$$= b_0 u[n+r] + b_1 u[n+r-1] + \dots + b_r u[n], \qquad (35.5)$$

причем $k>r$. Выберем переменные состояния следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_{i+1}[n] = y[n+i],\quad i = 0, 1, \dots, k-1;} \\ \boldsymbol{x_{i+1}[n] + \sum_{m=0}^{i-(k-r)} \beta_{i-m} u[n+m] = y[n+i],\quad i = k-r, \dots, k-1.} \end{cases} \qquad \mathbf{(35.6)}$$

Тогда для значений $i = 1, 2, \dots, k–r–1$

$$x_i[n+1] = x_{i+1}[n],$$

а для значений $i = k–r, \dots , k– 1$

$$x_i[n+1] + \sum_{m=0}^{i-1-(k-r)} \beta_{i-1-m} u[n+1+m] = x_{i+1}[n] + \sum_{m=0}^{i-(k-r)} \beta_{i-m} u[n+m]$$

Учитывая, что

$$\sum_{m=0}^{i-1-(k-r)} \beta_{i-1-m} u[n+1+m] = \sum_{m'=1}^{i-(k-r)} \beta_{i-m'} u[n+m']$$

где m' = m+1, получим

$$x_i[n+1] = x_{i+1}[n] + \beta_i u[n], \quad i = k-r, \dots, k-1. \quad (35.7)$$

Из последнего равенства системы (35.6) и уравнения (35.5), полагая n=n+1, имеем:

$$y[n+k] = x_k[n+1] + \sum_{m=0}^{r-1} \beta_{k-1-m} u[n+1+m] =$$

$$= x_k[n+1] + \sum_{m'=1}^{r} \beta_{k-m'} u[n+m'] =$$

$$= -\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} y[n+i] + \sum_{j=0}^{r} b_{r-j} u[n+j]$$

Учитывая равенства (35.6), получим

$$x_k[n+1] = -\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} x_{i+1}[n] + \sum_{j=0}^{r} b_{r-j} u[n+j] -$$

$$-\sum_{m'=1}^{r} \beta_{k-m'} u[n+m'] - \sum_{i=k-r}^{k-1} a_{k-i} \sum_{m=0}^{r-(k-r)} \beta_{i-m} u[n+m]$$

Изменив порядок суммирования в двойной сумме, найдем

$$x_k[n+1] = -\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} x_{i+1}[n] + \sum_{j=0}^{r} b_{r-j} u[n+j] -$$

$$-\sum_{m'=1}^{r} \beta_{k-m'} u[n+m'] - \sum_{m=0}^{r-1} \left(\sum_{i=m+(k-r)}^{k-1} a_{k-i} \beta_{i-m} \right) u[n+m],$$

Выберем значения β_j таким образом, чтобы коэффициенты при u[n+m], m=1,2,... ,r, равнялись нулю. Получим

$$\beta_{k-r} = b_0,$$

$$\beta_{k-i} = b_{r-i} - \sum_{j=k-r+i}^{k-1} a_{k-j} \beta_{j-i}, \quad i = 1, \dots, r-1,$$

$$\beta_k = b_r - \sum_{j=k-r}^{k-1} a_{k-j} \beta_j,$$

или, объединив эти равенства,

$$\beta_{k-i} = b_{r-i} - \sum_{j=k-r+i}^{k-1} a_{k-j}\beta_{j-i}, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (35.8)$$

С учетом изложенного уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ x_2[n+1] = x_3[n] \\ \dots \\ x_{k-r-1}[n+1] = x_{k-r}[n]; \\ x_{k-r}[n+1] = x_{k-r+1}[n] + \beta_{k-r}u[n]; \\ x_{k-r+1}[n+1] = x_{k-r+2}[n] + \beta_{k-r+1}u[n]; \\ \dots \\ x_{k-1}[n+1] = x_k[n] + \beta_{k-1}u[n]; \\ x_k[n+1] = -a_k x_1[n] - a_{k-1}x_2[n] - \dots - a_1 x_k[n] + \beta_k u[n]; \\ y[n] = x_1[n]. \end{cases} \quad (35.9)$$

Структурная схема системы, описываемой уравнениями (35.9), приведена на рисунке 35.2.

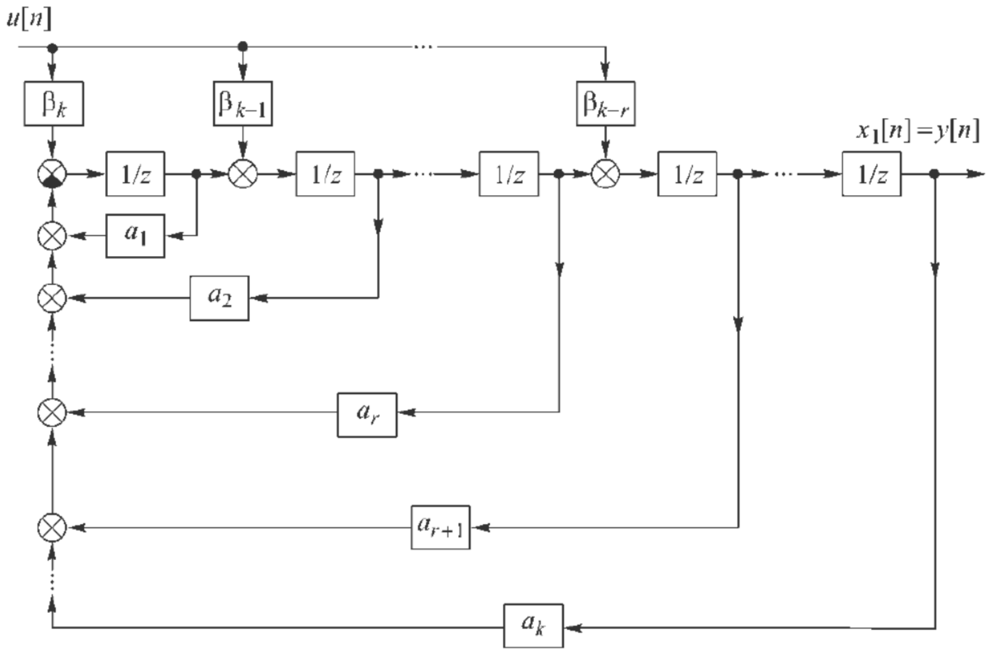


Рисунок 35.2

При записи уравнений состояния в векторном виде (35.1) матрица A и векторы b и c определяются равенствами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \beta_{k-r} \\ \dots \\ \beta_k \end{bmatrix};$$

$$c = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]; \quad d = 0.$$

36. Определение уравнений состояния для систем с одним входом и одним выходом по передаточной функции

Рассмотрим три способа определения уравнений состояния дискретной автоматической системы с одним входом и одним выходом по передаточной функции системы.

Первый способ. Пусть разностное уравнение дискретной автоматической системы имеет вид (35.5):

$$y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \cdots + a_k y[n] = \\ = b_0 u[n+r] + b_1 u[n+r-1] + \ldots + b_r u[n],$$

где y[n] – процесс на выходе системы; u[n] – входное воздействие; k>r.

В общем случае коэффициенты $b_j=b_j(\varepsilon)$, $j = 0,1, \ldots, r$, т.е. могут зависеть от относительного смещения ε.

Тогда передаточная функция дискретной системы

$$W^*(z,\varepsilon) = \frac{B(z,\varepsilon)}{A(z)} = \frac{Y^*(z,\varepsilon)}{U^*(z)}, \quad (36.1)$$

где $A(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k$, $B(z,\varepsilon)=b_0(\varepsilon)z^r+b_1(\varepsilon)z^{r-1}+\ldots+b_r(\varepsilon)$ – многочлены степени соответственно k и r, причем $k>r$; $U^*(z)$ и $Y^*(z,\varepsilon)$ – изображения входного сигнала и процесса на выходе системы.

Из равенства (36.1) следует, что

$$A(z)Y^*(z,\varepsilon) = B(z,\varepsilon)U^*(z), \quad (36.2)$$

Введем в рассмотрение функцию x[n], удовлетворяющую уравнению (35.2) при $b_0=1$:

$$x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \ldots + a_k x[n] = u[n],$$

или в изображениях

$$A(z)X^*(z) = U^*(z). \quad (36.3)$$

Выберем переменные состояния следующим образом:

$$x_{i+1}[n] = x[n+i], \quad i = 0,1,\ldots,k-1$$

Тогда уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] \\ x_2[n+1] = x_3[n] \\ \qquad \cdots \\ x_{k-1}[n+1] = x_k[n] \\ x_k[n+1] = -a_k x_1[n] - a_{k-1}x_2[n] - \ldots - a_1 x_k[n] + u[n] \end{cases} \quad (36.4)$$

Из равенств (36.2) и (36.3) следует, что

$$Y^*(z,\varepsilon) = B(z,\varepsilon)X^*(z)$$

Переходя к оригиналам и принимая во внимание обозначения (36.4), получаем следующее выражение для выходного сигнала:

$$y[n,\varepsilon] = b_r(\varepsilon)x_1[n] + b_{r-1}(\varepsilon)x_2[n] + \ldots + b_0(\varepsilon)x_{r+1}[n], \quad (36.5)$$

Структурная схема системы, описываемой уравнениями (36.4) и (36.5), изображена на рисунке 36.1.

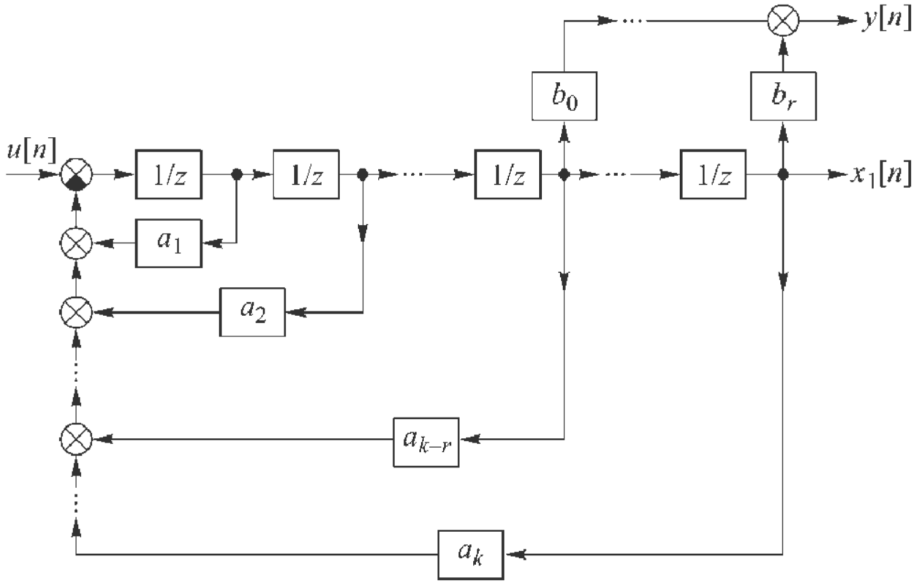


Рисунок 36.1

Если записать уравнения состояния (36.5) в векторном виде (35.1), то

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$c=[b_r \quad b_{r-1} \quad \dots \quad b_0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]; \quad d=0.$$

Такая форма уравнений состояния носит название ***канонической формы управляемости***.

Второй способ (параллельное соединение). Полагаем по-прежнему, что дискретная автоматическая система описывается разностным уравнением (5.10) и ее передаточная функция имеет вид

$$W^*(z,\varepsilon)=\frac{B(z,\varepsilon)}{A(z)}=\frac{Y^*(z,\varepsilon)}{U^*(z)},$$

где $A(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k$, $B(z,\varepsilon)=b_0(\varepsilon)z^r+ b_1(\varepsilon)z^{r-1}+\ldots+b_r(\varepsilon)$ – многочлены степени соответственно k и r, причем $k > r$.

Обозначим через $z_1,z_2,\ldots,z_l$ нули многочлена A(z), а через $r_1,r_2,\ldots,r_l$ их кратности, причем $r_1+\ldots+r_l=k$. Тогда

$$A(z)=(z-z_1)^{r_1}\ldots(z-z_l)^{r_l}.$$

Представим передаточную функцию $W^*(z,\varepsilon)$ в виде

$$W^*(z,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{c_{ij}}{(z-z_i)^{r_j-j+1}}+d, \qquad (36.6)$$

где $d=\begin{cases}0, \text{если } k>r; \\ b_0, \text{если } k=r.\end{cases}$

Коэффициенты c_{ij} определяют по формуле

$$c_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left[W^*(z)(z-z_i)^{r_i}\right],\ \ i=1,2,\dots,j;\, j=1,2,\dots,n. \quad (36.7)$$

Из равенства (36.6) следует, что

$$Y^*(z,\varepsilon)=\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{c_{ij}}{(z-z_i)^{r_j-j+1}}+d\right)U^*(z) \quad (36.8)$$

Обозначим:

$$Y_i^*(z,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{r_i}\frac{c_{ij}}{(z-z_i)^{r_j-j+1}}U^*(z),\ \ i=1,2,\dots,l.$$

Тогда равенство (36.8) можно записать так:

$$Y^*(z,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}Y_i^*(z,\varepsilon)+dU^*(z).$$

Определение уравнений состояния поясним на примере первого слагаемого во внешней сумме (36.8)

$$Y_1^*(z)=\sum_{j=1}^{r_1}\frac{c_{1j}}{(z-z_1)^{r_j-j+1}}U^*(z),$$

Используя Z-изображения, введем переменные состояния с помощью следующих равенств:

$$X_1^*(z)=\frac{X_2^*(z)}{z-z_1}=\frac{U^*(z)}{(z-z_1)^{r_1}};\quad X_2^*(z)=\frac{X_3^*(z)}{z-z_1}=\frac{U^*(z)}{(z-z_1)^{r_1-1}};\ \dots; \quad (36.9)$$

$$X_{r_1-1}^*(z)=\frac{X_{r_1}^*(z)}{z-z_1}=\frac{U^*(z)}{(z-z_1)^2};\quad X_1^*(z)=\frac{U^*(z)}{z-z_1}.$$

Перейдем в равенствах (36.9) от изображений к оригиналам:

$$\begin{cases} x_1[n+1]=z_1x_1[n]+x_2[n];\\ x_2[n+1]=z_1x_2[n]+x_3[n];\\ \qquad\qquad\dots\\ x_{r_1-1}[n+1]=z_1x_{r_1-1}[n]+x_{r_1}[n];\\ x_{r_1}[n+1]=z_1x_{r_1}[n]+u[n]. \end{cases}$$

Запишем эти уравнения в векторной форме:

$$\boldsymbol{x}'^{[n+1]}=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}'^{[n]}+\boldsymbol{b}_1u[n],$$

где

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix} z_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & z_1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_1 \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ 1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{x}'[n]=\begin{bmatrix}x_1[n]\\ x_2[n]\\ \dots\\ x_{r_1}[n]\end{bmatrix}$$

Выполнив аналогичные действия с остальными слагаемыми внешней суммы (36.8), окончательно получим:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[n+1]=\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}[n]+\boldsymbol{b}u[n];\\ y[n]=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}[n]+du[n],\end{cases} \quad (36.10)$$

Здесь $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \boldsymbol{K}_l \end{bmatrix}$ – жорданова матрица, где $\boldsymbol{K_i}$ – клетка Жордана размера $r_i \times r_i$, соответствующая характеристическому числу z_i,

$$\boldsymbol{K}_i = \begin{bmatrix} z_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_i \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [c_{11} \quad c_{12} \quad \dots \quad c_{1r_1} \quad c_{21} \quad \dots \quad c_{ln}].$$

Полученная форма уравнений состояния системы представляет собой каноническую форму Жордана.

Структурная схема системы, описываемая уравнениями (36.10), для случая простых нулей многочлена A(z) приведена на рисунке 36.2, а для случая кратных нулей – на рисунке 36.3. Эта схема поясняет название способа – параллельное соединение.

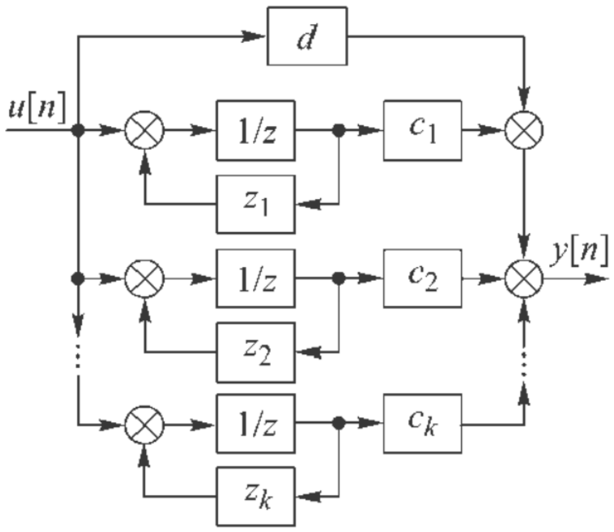
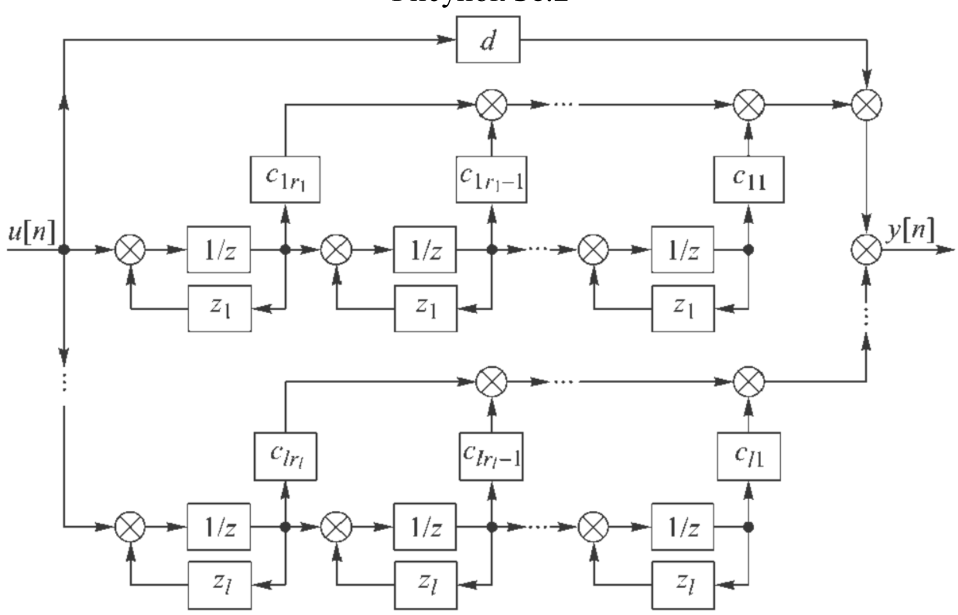


Рисунок 36.2



б

Рисунок 36.3

Третий способ (последовательное соединение). Полагаем, что дискретная автоматическая система описывается разностным уравнением (35.5) и ее передаточная функция имеет вид

$$W^*(z,\varepsilon)=\frac{B(z,\varepsilon)}{A(z)}=\frac{Y^*(z,\varepsilon)}{U^*(z)},$$

где $A(z)=z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k$, $B(z,\varepsilon)=b_0(\varepsilon)z^r+\ b_1(\varepsilon)z^{r-1}\ +\ldots+b_r(\varepsilon)$ – многочлены степени соответственно k и r, причем $k > r$.

Обозначим через $z_1,z_2,\ldots,z_k$ нули многочлена A(z), а через $\tilde{z}_1,\tilde{z}_2,\ldots,\tilde{z}_r$ нули многочлена $B(z,\varepsilon)$. Тогда передаточная функция может быть записана в виде

$$W^*(z,\varepsilon)=\frac{Y^*(z,\varepsilon)}{U^*(z)}=\frac{b_0(z-\tilde{z}_1)(z-\tilde{z}_2)\ldots(z-\tilde{z}_r)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_k)}.$$

Введем следующее обозначение:

$$W_j^*(z,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{z-\tilde{z}_j}{z-z_j},\ \ j=1,2,\ldots,r;\\[2mm] \dfrac{1}{z-z_j},\ \ j=r+1,\ldots k.\end{cases}$$

Уравнения состояния будем определять в изображениях с помощью равенств

$$\begin{cases}X_1^*(z)=b_0(z-z_1)^{-1}U^*(z);\\ X_2^*(z)=(z-z_2)^{-1}E_1^*(z),\ \ E_1^*(z)=b_0U^*(z)+(z_1-\tilde{z}_1)X_1^*(z);\\ X_3^*(z)=(z-z_3)^{-1}E_2^*(z),\ \ E_2^*(z)=E_1^*(z)+(z_2-\tilde{z}_2)X_2^*(z);\\ \ldots\\ X_r^*(z)=(z-z_r)^{-1}E_{r-1}^*(z),\ \ E_{r-1}^*(z)=E_{r-2}^*(z)+(z_{r-1}-\tilde{z}_{r-1})X_{r-1}^*(z);\\ X_{r+1}^*(z)=(z-z_{r+1})^{-1}E_r^*(z),\ \ E_r^*(z)=E_{r-1}^*(z)+(z_r-\tilde{z}_r)X_r^*(z);\\ X_{r+2}^*(z)=(z-z_{r+2})^{-1}X_{r+1}^*(z);\\ \ldots\\ X_k^*(z)=(z-z_k)^{-1}X_{k-1}^*(z).\end{cases}\quad(36.11)$$

Перейдя от изображений к оригиналам, получим

$$\begin{cases}x_1[n+1]=z_1x_1[n]+b_0u[n];\\ x_2[n+1]=z_2x_2[n]+(z_1-\tilde{z}_1)x_1[n]+b_0u[n];\\ x_3[n+1]=z_3x_3[n]+(z_2-\tilde{z}_2)x_2[n]+(z_1-\tilde{z}_1)x_1[n]+b_0u[n];\\ \ldots\\ x_{r+1}[n+1]=z_{r+1}x_{r+1}[n]+(z_r-\tilde{z}_r)x_r[n]+\cdots+(z_1-\tilde{z}_1)x_1[n]+b_0u[n];\\ x_{r+2}[n+1]=z_{r+2}x_{r+2}[n]+x_{r+1}[n];\\ \ldots\\ x_k[n+1]=z_kx_k[n]+x_{k-1}[n];\\ y[n]=x_k[n].\end{cases}\quad(36.12)$$

Структурная схема системы, описываемой уравнениями (36.12), представлена на рисунке 36.4. Эта схема поясняет название способа – последовательное соединение.

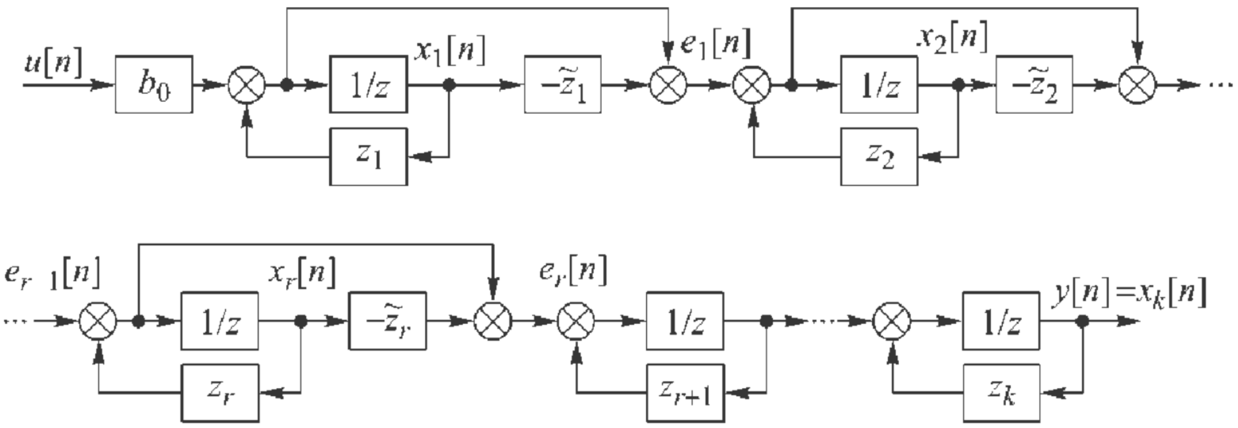


Рисунок 36.4

Если записать уравнения состояния (36.12) в векторном виде (35.1), то это уравнение будет иметь вид:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ z_1-\tilde z_1 & z_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_1-\tilde z_1 & z_2-\tilde z_2 & \dots & z_r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ z_1-\tilde z_1 & z_2-\tilde z_2 & \dots & z_r-\tilde z_r & z_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & z_{r+2} & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & z_k \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_0\\ b_0\\ \dots\\ b_0\\ 0\\ \dots\\ 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{c}=[0\quad 0\quad \dots\quad 0\quad 1];\quad d=0.$$

Пример 36.1. Линейная автоматическая система описывается разностным уравнением:

$$x[n+2]+2x[n+1]+x[n]=u[n+1]+2u[n].$$

Определить уравнения состояния этой системы по разностному уравнению и по передаточной функции.

1. *Получим уравнения состояния*, используя приведенное в условии примера разностное уравнение. Для рассматриваемого уравнения a_1= 2, a_2= 1, b_0=1, b_1=2. Тогда, учитывая равенства (35.8), имеем β_1= b_0=1; β_2=2–2=0. Уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} x_1[n+1]=x_2[n]+u[n];\\ x_2[n+1]=-x_1[n]-2x_2[n]; \qquad (36.13)\\ y[n]=x_1[n]. \end{cases}$$

Если записать уравнения (36.13) в векторной форме, то в уравнениях (35.1) следует положить:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{c}=[1\quad 0];\quad d=0.$$

2. *Определим теперь уравнения состояния системы по передаточной функции* тремя рассмотренными ранее способами.

Первый способ. Передаточная функция системы имеет вид:

$$\boldsymbol{W}^*(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2}.$$

Тогда A(z) $=z^2+2z+1$; B(z)=z+2.

В соответствии с формулами (36.4) и (36.5) имеем следующие уравнения состояния:

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] - 2x_2[n] + u[n]; \quad (36.14) \\ y[n] = 2x_1[n] + x_2[n]. \end{cases}$$

В векторной форме записи (35.1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [2 \quad 1]; \quad d = 0.$$

Второй способ. Определим нули многочлена A(z) $=z^2+2z+1$;1; имеем $z_1=z_2=-1$.

Найдем коэффициенты c_{11} и c_{12} в разложении

$$\boldsymbol{W}^*(z) = \frac{c_{11}}{(z+1)^2} + \frac{c_{12}}{z+1}$$

По формуле (36.11) получим

$$c_{11} = \lim_{z\to-1} W^*(z)(z+1)^2 = 1; \;\; c_{12} = \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz}[W^*(z)(z+1)^2] = 1.$$

В соответствии с равенствами (36.10) уравнения состояния имеют вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = -x_1[n] + x_2[n]; \\ x_2[n+1] = -x_2[n] + u[n]; \quad (36.15) \\ y[n] = x_1[n] + x_2[n]. \end{cases}$$

В векторной форме записи (5.6)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 1]; \quad d = 0.$$

Третий способ. Передаточная функция системы

$$W^*(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2} = \frac{Y^*(z,\varepsilon)}{U^*(z)}.$$

Переменные состояния в Z-изображениях определим в соответствии с равенствами (36.11):

$$X_1^*(z) = \frac{1}{z+1} U^*(z); \quad X_2^*(z) = \frac{1}{z+1} E_1^*(z),$$

где $E_1^*(z) = \frac{z+2}{z+1} U^*(z) = X_1^*(z) + U^*(z)$.

Перейдя от Z-изображений к оригиналам, получим

$$\begin{cases} x_1[n+1] = -x_1[n] + u[n]; \\ x_2[n+1] = x_1[n] - x_2[n] + u[n]; \quad (36.16) \\ y[n] = x_2[n]. \end{cases}$$

В векторной форме записи (35.1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [0 \quad 1]; \quad d = 0.$$

Схема модели линейной системы в среде ScilabXcos приведена на рисунке 36.5. В качестве сигнала управления *u[n]* на входе системы была выбрана сумма последовательности единичных скачков: один положительный и два отрицательных скача. Таким образом, третий скачек установил отрицательный единичный уровень управляющего сигнала.

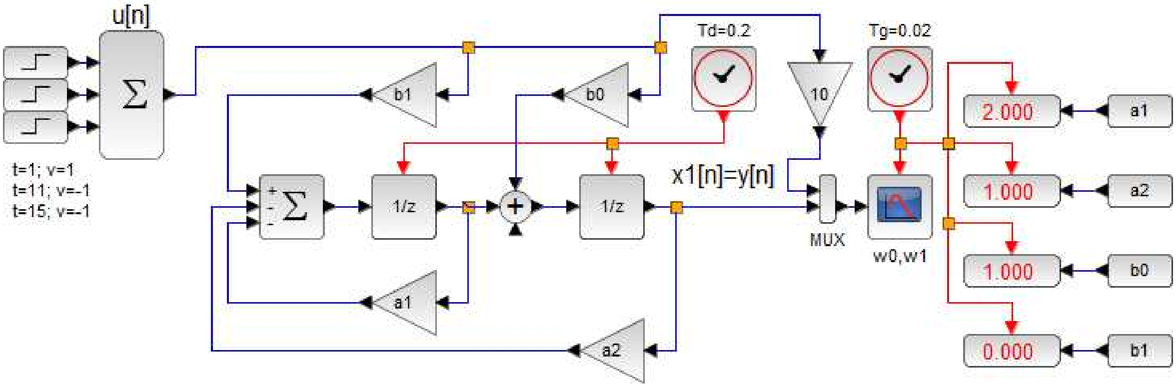


Рисунок 36.5

Графики результатов моделирования приведены на рисунке 36.6. Полученные сигналы имеют вид модулированных колебаний, базовая частота которых равна частота дискретизации. На графике величина управляющего сигнала увеличена в 10 раз. Как видно из графиков, установление нулевого уровня управляющего сигнала фиксирует амплитуду выходного сигнала *y[n]*, а ненулевые значения управляющего сигнала обуславливают линейное изменение амплитуды выходного сигнала.

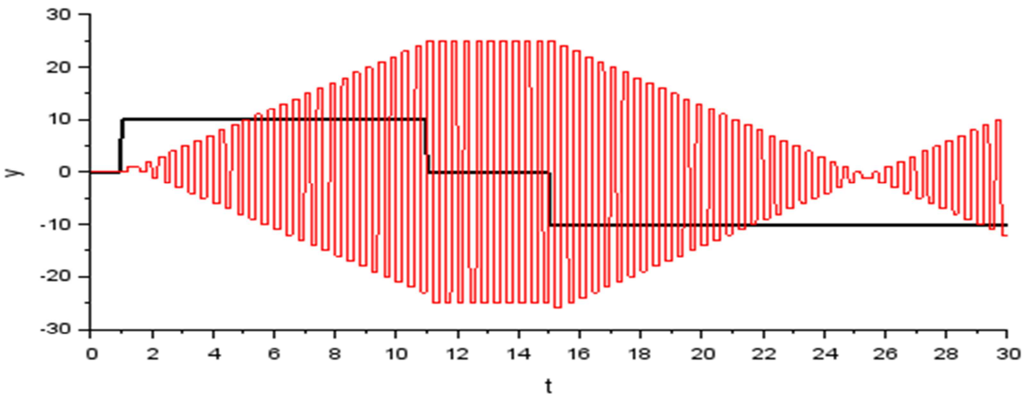


Рисунок 36.6

Пример 36.2. Уравнение, описывающее дискретную автоматическую систему, имеет вид:

$$x[n+2]-2x[n+1]+x[n]=u[n+1]-u[n].$$

Определить уравнения состояния этой системы.

1. Сначала получим уравнения состояния, используя приведенное в условии примера разностное уравнение. Для рассматриваемого уравнения $a_1=-2$, $a_2=1$, $b_0=1$, $b_1=-1$. Тогда, учитывая равенства (35.8), имеем $\beta_1=b_0=1$; $\beta_2=b_1-a_1\beta_1=1$.

Уравнения состояния примут вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] + u[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] + 2x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = x_1[n]. \end{cases} \qquad (36.17)$$

В векторной форме записи (35.1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0]; \quad d = 0.$$

2. Определим теперь уравнения состояния по передаточной функции автоматической системы двумя способами.

Первый способ. Передаточная функция системы

$$\boldsymbol{W}^*(z) = \frac{z-1}{(z-1)^2}.$$

Тогда $A(z) = z^2 – 2z + 1$; $B(z) = z – 1$.

В соответствии с формулами (36.4) и (36.5) имеем следующие уравнения состояния:

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] + 2x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = -x_1[n] + x_2[n]. \end{cases} \qquad (36.18)$$

В векторной форме записи (35.1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [-1 \quad 1]; \quad d = 0.$$

Второй способ. Определим нули многочлена $A(z) = z^2 + 2z + 1;1$; имеем $z_1 = z_2 = –1$.

Найдем коэффициенты c_{11} и c_{12} в разложении

$$\boldsymbol{W}^*(z) = \frac{c_{11}}{(z-1)^2} + \frac{c_{12}}{z-1}$$

По формуле (36.7) получим

$$c_{11} = \lim_{z \to -1} W^*(z)(z-1)^2 = 0; \;\; c_{12} = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz}[W^*(z)(z-1)^2] = 1.$$

В соответствии с равенствами (36.10) уравнения состояния имеют вид

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_1[n] + x_2[n]; \\ x_2[n+1] = x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = x_2[n]. \end{cases} \qquad (36.19)$$

В векторной форме записи (35.18)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [0 \quad 1]; \quad d = 0.$$

37. Управляемость линейных дискретных систем. Критерии управляемости

Рассмотрим линейную дискретную автоматическую систему, уравнения состояния которой имеют вид (34.2):

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}[n]\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}[n]\boldsymbol{u}[n], \end{cases}$$

Линейная дискретная автоматическая система, описываемая уравнениями (5.2), называется ***полностью управляемой***, если для любого начального момента времени n_0 существует управление u[n], $n=n_0$, $n_0+1,..., N-1$, которое за конечное время $N-n_0$ переводит произвольное начальное состояние системы $x[n_0]$ в заданное конечное состояние x[N].

Стационарная линейная дискретная автоматическая система, описываемая уравнениями (34.3):

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases}$$

будет полностью управляемой, если существует управление u[n], $n=n_0$, $n_0+1,...,N-1$, которое переводит произвольное начальное состояние системы $x[n_0]$ в начало координат, т.е. существует такое конечное N, что x[N]=0.

Необходимые и достаточные условия полной управляемости линейной дискретной системы, описываемой уравнениями (34.2), определяются следующей теоремой.

Теорема 37.1. Для полной управляемости линейной дискретной системы, описываемой уравнениями (34.2), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$Q = \left[Q_{n_0}, Q_{n_0+1}, \dots, Q_{N-1}\right],$$

где $\boldsymbol{Q}_m=\boldsymbol{X}[N,m+1]\boldsymbol{B}[m]$, $m=n_0,n_0+1,...,N-1$, был равен k, т.е. совпадал с порядком системы (34.2). Здесь $\boldsymbol{X}[n,n_0]$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\boldsymbol{x}[n+1]=\boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{x}[n]$.

Доказательство. По формуле Коши имеем

$$\boldsymbol{x}[N] = \boldsymbol{X}[N, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \sum_{m=n_0}^{N-1} \boldsymbol{X}[N, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m],$$

или

$$\boldsymbol{x}[N] - \boldsymbol{X}[N, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] = \sum_{m=n_0}^{N-1} \boldsymbol{X}[N, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m], \quad (37.1)$$

Равенство (37.1) можно рассматривать как систему из k линейных алгебраических уравнений относительно $(N-n_0)r$ неизвестных $\mathbf{u}$[n], $m=n_0,n_0+1,...,N-1$. Основная матрица этой системы – матрица **Q** – имеет размер $k\times(N-n_0)r$; расширенная матрица системы $\left[\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{X}}[N, n_0]\right]$, где столбец $\widetilde{\boldsymbol{X}}[N, n_0] = \boldsymbol{x}[N] - \boldsymbol{X}[N, n_0]\boldsymbol{x}[n_0]$, имеет размер $k\times[(N-n_0)(r+1)]$.

Докажем ***достаточность*** условий теоремы. Пусть ранг матрицы **Q** равен k. Тогда и расширенная матрица системы $\left[\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{X}}[N, n_0]\right]$ имеет ранг k. Согласно теореме Кронекера-Капелли, система линейных алгебраических уравнений (37.1) совместна, т.е. существует управление $\mathbf{u}$[n], $n=n_0,n_0+1,...,N-1$, которое переводит начальное состояние $\boldsymbol{x}[n_0]$ системы (34.2) в конечное состояние $\mathbf{x}$[N]. Отметим, что это управление не является единственным. Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условий теоремы докажем способом от противного. Пусть система (37.2) полностью управляема, а *rang(**Q**)=l<k*. Тогда существуют такие начальные и конечные состояния, что ранг расширенной матрицы $\left[\boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{X}}[N,n_0]\right]$ равен *l+1*.

Ранги расширенной матрицы и основной матрицы системы не совпадают, поэтому в силу теоремы Кронекера - Капелли система линейных алгебраических уравнений (37.1) несовместна, т.е. не существует управление **u**[n], $n=n_0,n_0+1,...,N-1$, которое переводит произвольное начальное состояние $\boldsymbol{x}[n_0]$ системы (34.2) в конечное состояние $\boldsymbol{x}[N]$. Система (34.2) не будет полностью управляемой. Полученное противоречие возникло, когда мы предположили, что *rang(**Q**)=l<k*. Таким образом, *rang(**Q**)=k*. Необходимость условий теоремы доказана.

Управляемость линейной стационарной системы, динамика которой описывается уравнениями (34.3):

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[n+1]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n]+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n];\\ \boldsymbol{y}[n]=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n]+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n],\end{cases}$$

не зависит от начального значения n_0 и определяется следующей теоремой.

Теорема 37.2. *Для полной управляемости стационарной дискретной системы, описываемой уравнениями (34.3), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости*

$$\boldsymbol{K_y}=[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB}\ \dots\ \boldsymbol{A^{k-1}B}]$$

был равен k.

Доказательство. Для стационарной системы фундаментальная матрица решений однородной системы $\boldsymbol{X}[n,n_0]=\boldsymbol{X}[n-n_0]=\boldsymbol{A}^{n-n_0}$**.** Тогда матрица $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{A}^{N-n_0-1}\boldsymbol{B}\ \dots\ \boldsymbol{AB}\ \dots\ \boldsymbol{B}]$**.** Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\dots\boldsymbol{A}^{N-n_0-1}\boldsymbol{B}]=$$
$$=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\dots\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}\dots\boldsymbol{A}^{N-n_0-1}\boldsymbol{B}]$$

полученную из матрицы **Q** с помощью перемены мест ее столбцов. Ранги матриц $\boldsymbol{Q}$ и $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ совпадают.

Запишем характеристическое уравнение матрицы **A**:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\lambda^k+\alpha_1\lambda^{k-1}+\ldots+\alpha_k=0$$

Согласно теореме Кэли - Гамильтона, матрица A удовлетворяет матричному уравнению:

$$\boldsymbol{A}^k+\alpha_1\boldsymbol{A}^{k-1}+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{E}=0,$$

откуда

$$\boldsymbol{A}^k=-\alpha_k\boldsymbol{E}-\ldots-\alpha_1\boldsymbol{A}^{k-1},$$

или

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}=-\alpha_k\boldsymbol{EB}-\ldots-\alpha_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B},$$

Таким образом, столбец $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}$ представляет собой линейную комбинацию столбцов **B**, **AB**, ... , $\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$ матрицы **Q**. Аналогично можно показать, что любой столбец $\mathbf{A}^{j}\mathbf{B}$, $j=k+1,...,N-n_0-1$, матрицы $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ есть линейная комбинация столбцов **B, AB, ... ,** $\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{rang}(\widetilde{\boldsymbol{Q}})=$

$\boldsymbol{rang}(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{rang}(\boldsymbol{K_y})$. Тогда утверждения теоремы 37.2 являются следствием теоремы 37 .1.

Отметим, что если система (34.3) приведена к канонической форме Жордана, то для полной управляемости требуется, чтобы матрица $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$ имела ненулевые строки с номерами $\mathbf{r}_1$,$r_1 r_2$,…,k.

38. Наблюдаемость линейных дискретных систем. Критерии наблюдаемости

Определим понятие наблюдаемости дискретных динамических систем. Дискретная автоматическая система, описываемая системой разностных уравнений (34.2), называется полностью наблюдаемой на отрезке $[n_0,N–1]$, если ее начальное состояние $\mathbf{x}[n_0]$ может быть определено по известным значениям выходного $\mathbf{y}[n]$ и входного $\mathbf{u}[n]$ сигналов в моменты $n=n_0, n_0+1,...,N-1$.

Необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости определяются следующей теоремой.

Теорема 38.1. *Для полной наблюдаемости дискретной системы, описываемой уравнениями (34.2), на отрезке $[n_0,N–1]$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\boldsymbol{R} = \left[\boldsymbol{R_{n_0}} \boldsymbol{R_{n_0+1}} \dots \boldsymbol{R_{N-1}}\right],$$

где $R_m=X^T[m, n_0]C^T[m]$, $m=n_0,n_0+1,...,N–1$, был равен k, т.е. совпадал с порядком системы (34.2). Здесь $\boldsymbol{X}[n,n_0]$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\boldsymbol{x}[n+1]=\boldsymbol{A}[n]\boldsymbol{x}[n]$.

Доказательство. По формуле Коши имеем

$$\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{X}[N, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} \boldsymbol{X}[n, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m],$$

Из второго уравнения системы (34.2) получим

$$\boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{X}[n, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} \boldsymbol{C}[n]\boldsymbol{X}[n, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m] + \boldsymbol{D}[n]\boldsymbol{u}[n],$$

Запишем последнее равенство для значений $n=n_0,n_0+1,...,N–1$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}[n_0] = \boldsymbol{C}[n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \boldsymbol{D}[n_0]\boldsymbol{x}[n_0]; \\ \boldsymbol{y}[n_0+1] = \boldsymbol{C}[n_0+1]\boldsymbol{X}[n_0+1, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \boldsymbol{C}[n_0+1]\boldsymbol{B}[n_0]\boldsymbol{u}[n_0] + \\ +\boldsymbol{D}[n_0+1]\boldsymbol{u}[n_0+1]; \\ \dots \\ \boldsymbol{y}[N-1] = \boldsymbol{C}[N-1]\boldsymbol{X}[N-1, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \\ + \sum_{m=n_0}^{N-2} \boldsymbol{C}[N-1]\boldsymbol{X}[N-1, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m] + \boldsymbol{D}[N-1]\boldsymbol{u}[N-1]. \end{cases} \qquad (38.1)$$

Полученные равенства (38.1) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно k неизвестных – компонент вектора $\mathbf{x}[n_0]$. Основная матрица этой системы

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}[n_0] \\ \boldsymbol{C}[n_0+1]\boldsymbol{X}[n_0+1,n_0] \\ \dots \\ \boldsymbol{C}[N-1]\boldsymbol{X}[N-1,n_0] \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^T.$$

Запишем систему уравнений (38.1) в векторном виде:

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{x}[n_0] = \boldsymbol{Y},$$

где столбец

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}[n_0] - \boldsymbol{D}[n_0]\boldsymbol{x}[n_0]; \\ \boldsymbol{y}[n_0+1] - \boldsymbol{C}[n_0+1]\boldsymbol{B}[n_0]\boldsymbol{u}[n_0] - \boldsymbol{D}[n_0+1]\boldsymbol{u}[n_0+1]; \\ \dots \\ \boldsymbol{y}[N-1] - \sum_{m=n_0}^{N-2} \boldsymbol{C}[N-1]\boldsymbol{X}[N-1,m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m] - \boldsymbol{D}[N-1]\boldsymbol{u}[N-1] \end{bmatrix}$$

имеет размер $(N\text{-}n_0)m\times l$.

Докажем ***достаточность*** условий теоремы. Пусть rang(R)=rang(R^T)=k и минор k-го порядка $\boldsymbol{R_k}(det\,\boldsymbol{R_k} \neq 0)$ расположен в верхней части матрицы $\boldsymbol{R}^T$. Тогда в соответствии с методом решения системы $(N\text{-}n_0)m$ алгебраических уравнений с k неизвестными перейдем от системы (38.1) к системе

$$\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{x}[n_0] = \boldsymbol{Y}_k$$

где $\boldsymbol{Y}_k$– столбец из первых k элементов столбца $\boldsymbol{Y}$.

Эта система уравнений является определенной. Решив ее, найдем $\boldsymbol{x}[n_0] = \boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{Y}_k$. Достаточность условий теоремы доказана.

Необходимость условий теоремы докажем методом от противного. Пусть $rang(\boldsymbol{R})=l<k$ и минор l-го порядка $det\,\boldsymbol{R}_l \neq 0$ расположен в верхней части матрицы $\boldsymbol{R}^T$. Перейдем от системы уравнений (38.1) к системе $\boldsymbol{R}_l\boldsymbol{x}[n_0] = \boldsymbol{Y}_l$, где $\boldsymbol{Y}_l$ – столбец из первых l элементов столбца $\boldsymbol{Y}$. В силу того что число l уравнений системы меньше числа k неизвестных, полученная система уравнений является неопределенной, т.е. ее решение $\boldsymbol{x}[n_0]$ не единственное, и дискретная система, описываемая уравнениями (34.2), не является полностью наблюдаемой. Полученное противоречие возникло, когда мы предположили, что $rang(\boldsymbol{R})=l<k$. Таким образом, $rang(\boldsymbol{R})=k$. Необходимость условий теоремы доказана.

Рассмотрим теперь ***критерий полной наблюдаемости стационарной линейной системы***, описываемой уравнениями (34.3):

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases}$$

Теорема 38.2. *Для того чтобы дискретная система, описываемая уравнениями (34.3), была полностью наблюдаема, необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости*

$$\boldsymbol{K}_{\text{Н}} = [\boldsymbol{C^T A^T C^T} \dots (\boldsymbol{A^T})^{\boldsymbol{k-1}}\boldsymbol{C^T}],$$

имела ранг k.

Доказательство. Для стационарной системы (34.3) фундаментальная матрица решений однородной системы $\boldsymbol{X}[n, n_0] = \boldsymbol{X}[n - n_0] = \boldsymbol{A}^{n-n_0}$. Тогда матрица

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}} \dots (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{N-1-n_0}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}],$$

С помощью теоремы Кэли - Гамильтона можно показать, как это было сделано при доказательстве теоремы 37.2, что столбцы $(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}, j = k, \dots, N - n_0 - 1$, этой матрицы являются линейными комбинациями столбцов $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}, \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}, \dots, (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{\boldsymbol{k-1}} \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}$. Отсюда следует, что $rang\, \boldsymbol{R} = \boldsymbol{rang K_H}$. Тогда утверждения теоремы 38.4 являются следствием теоремы 38.3.

Отметим, что если с помощью линейного невырожденного преобразования переменных $\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{T}\xi[n]$ система уравнений (34.3) приводится к канонической форме Жордана, то для полной наблюдаемости требуется выполнение следующих условий:

1) каждая клетка Жордана соответствует одному кратному собственному значению;

2) столбцы матрицы $\boldsymbol{CT}$, которые соответствуют первым столбцам каждой клетки Жордана, – ненулевые.

С понятием полной наблюдаемости тесно связано понятие идентификации. Динамическая система, описываемая системой уравнений (34.2), называется ***идентифицируемой***, если ее состояние $\boldsymbol{x}[n]$ может быть определено по известным значениям выходного $\boldsymbol{y}[n]$ и входного $\boldsymbol{u}[n]$ сигналов в моменты $n = n_0, n_0+1, \dots, n$.

Условия идентифицируемости совпадают с условиями полной наблюдаемости, так как, определив начальное состояние $\boldsymbol{x}[n_0]$, состояние **x**[n] можно вычислить с помощью формулы Коши:

$$\boldsymbol{x}[n] = \boldsymbol{X}[n, n_0]\boldsymbol{x}[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} \boldsymbol{X}[n, m+1]\boldsymbol{B}[m]\boldsymbol{u}[m].$$

Свойство управляемости и наблюдаемости для стационарных линейных дискретных систем сохраняется при линейном невырожденном преобразовании переменных состояния.

Покажем это. С помощью невырожденного преобразования переменных **x=Tz**, где $det\boldsymbol{T} \neq 0$, перейдем от уравнений состояния (34.3):

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{Ax}[n] + \boldsymbol{Bu}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{Cx}[n] + \boldsymbol{Du}[n], \end{cases}$$

к системе уравнений (34.5):

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}[n+1] = \boldsymbol{T^{-1}ATz}[n] + \boldsymbol{T^{-1}Bu}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{CTz}[n] + \boldsymbol{Du}[n]. \end{cases}$$

Матрица управляемости для системы уравнений 34 .3)

$$\boldsymbol{K_y} = \left[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB} \dots \boldsymbol{A^{k-1}B}\right],$$

а для системы уравнений (34.5)

$$\boldsymbol{K'_y} = \left[\boldsymbol{T^{-1}B}\ \ \boldsymbol{T^{-1}ATT^{-1}B} \dots \boldsymbol{T^{-1}A^{k-1}TT^{-1}B}\right] =$$

$$= \boldsymbol{T}^{-1}\left[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB} \dots \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}\right],$$

Матрица наблюдаемости для системы уравнений (34.3) имеет вид:

$$\boldsymbol{K_H} = \left[\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \dots (\boldsymbol{A}^T)^{k-1}\boldsymbol{C}^T\right],$$

а для системы уравнений (34.5):

$$\boldsymbol{K}'_{\boldsymbol{H}} = \left[\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{T}^{-1})^T\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{C}^T \dots \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{A}^T)^{k-1}(\boldsymbol{T}^{-1})^T\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{C}^T\right] =$$
$$= \boldsymbol{T}^{-1}\left[\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \dots (\boldsymbol{A}^T)^{k-1}\boldsymbol{C}^T\right].$$

Ранги матриц $\boldsymbol{K_y}$ и $\boldsymbol{K}'_{\boldsymbol{y}}$ совпадают. Также совпадают ранги матриц $\boldsymbol{K_H}$ и $\boldsymbol{K}'_{\boldsymbol{H}}$. Утверждение доказано.

Пример 38.3. Определить управляемость и наблюдаемость дискретной автоматической системы, рассмотренной в примере 36.1.

Если получить уравнения состояния по разностному уравнению системы (см. пример 36.1, п.1), то

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0].$$

Матрица управляемости

$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ее ранг равен двум. В соответствии с теоремой 37.2 система является полностью управляемой.

Матрица наблюдаемости

$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^T\mathrm{c}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ее ранг равен двум; поэтому в соответствии с теоремой 38.2 система полностью наблюдаема.

Пусть теперь уравнения состояния получены по передаточной функции системы первым способом (см. пример 36.1, п. 2). Тогда

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [2 \quad 1].$$

Матрица управляемости

$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

ее ранг равен двум, поэтому система полностью наблюдаема.

Матрица наблюдаемости

$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^T\mathrm{c}^T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ее ранг равен двум, значит, система полностью наблюдаема.

Если получить уравнения состояния по передаточной функции вторым способом (см. пример 36.1, п. 2), то

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 1].$$

Матрица управляемости

$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ее ранг равен двум; система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости.

$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c^T A^T} \mathrm{c}^{\boldsymbol{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен двум; система полностью наблюдаема.

Пример 38.4. Определить управляемость и наблюдаемость дискретной автоматической системы, рассмотренной в примере 36.2.

Если уравнения состояния получены с использованием разностного уравнения системы (см. пример 36.2, п. 1) то
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0].$$
Матрица управляемости
$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен единице; система не является полностью управляемой.

Матрица наблюдаемости.
$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c^T A^T} \mathrm{c}^{\boldsymbol{T}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен двум; система полностью наблюдаема.

Пусть теперь уравнения состояния получены по передаточной функции системы первым способом (см. пример 36.2, п. 2). В этом случае
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [-1 \quad 1].$$
Матрица управляемости
$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен двум; система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости.
$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c^T A^T} \mathrm{c}^{\boldsymbol{T}}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен единице. Система не является полностью наблюдаемой.

Пусть теперь уравнения состояния получены по передаточной функции системы вторым способом (см. пример 36.2, п. 2). В этом случае
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [0 \quad 1].$$
Матрица управляемости
$$\boldsymbol{K_y} = [\boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен двум; система полностью управляема.

Матрица наблюдаемости.
$$\boldsymbol{K_H} = [\boldsymbol{c^T A^T} \mathrm{c}^{\boldsymbol{T}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$
ее ранг равен единице. Система не является полностью наблюдаемой.

39. Синтез модального управления для дискретных автоматических систем

Под ***модальным управлением*** *понимается управление расположением корней характеристического уравнения замкнутой линейной автоматической системы («мод») на комплексной плоскости корней.* Необходимо по координатам состояния линейной автоматической системы определить такие значения коэффициентов линейных обратных связей, чтобы характеристический многочлен автоматической системы, замкнутой этими связями, совпадал с заранее выбранным.

Рассмотрим задачу синтеза модального управления для дискретной автоматической системы, описываемой векторным уравнением

$$\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{b}u[n], \quad (39.1)$$

где $\boldsymbol{b}$ – вектор-столбец размера k×1, т.е. управление $u[n]$ предполагается скалярным.

Вектор обратных связей $\boldsymbol{k}$ в законе управления $u=-\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$ следует выбрать таким образом, чтобы характеристические числа замкнутой системы имели заранее заданные значения.

Прежде чем приступить к определению закона управления, докажем теорему.

Теорема 39.1. *Пусть дискретная автоматическая система, описываемая уравнением (39.1), полностью управляема. Тогда существует такое линейное невырожденное преобразование* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Tz}$ *(*$\det\boldsymbol{T}\neq 0$*), что система уравнений*

$$\boldsymbol{z}[n+1] = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}[n] + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b}u[n], \quad (39.2)$$

имеет каноническую форму управляемости, т.е.

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (39.3)$$

где a_1, …, a_k *– коэффициенты характеристического многочлена*

$$det(\boldsymbol{\lambda E} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{k-1}} + \ldots + \boldsymbol{a_k}.$$

Доказательство. В преобразовании переменных $\boldsymbol{x}[n]=\boldsymbol{Tz}[n]$ выберем матрицу

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T_1} \\ \boldsymbol{T_1 A} \\ \dots \\ \boldsymbol{T_1 A^{k-1}} \end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{T_1} = [0\;0\;\dots\;1][\boldsymbol{bAb}\dots\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k-1}}\boldsymbol{b}]^{-\boldsymbol{1}}$. В силу полной управляемости дискретной системы, описываемой уравнением (39.1), такая матрица существует. Тогда

$$z_1[n] = \boldsymbol{T_1 x}[\boldsymbol{n}], z_2[n] = \boldsymbol{T_1 A x}[\boldsymbol{n}], \dots, z_k[n] = \boldsymbol{T_1 A^{k-1} x}[\boldsymbol{n}].$$

Полагая в этих равенствах n=n+1 и учитывая равенство (39.1), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1[n+1] = \boldsymbol{T_1 x}[n+1] = \boldsymbol{T_1 A x}[n] + \boldsymbol{T_1 b}u[n] = z_2[n] + \boldsymbol{T_1 b}u[n]; \\ z_2[n+1] = \boldsymbol{T_1 A x}[n+1] = \boldsymbol{T_1 A^2 x}[n] + \boldsymbol{T_1 A b}u[n] = z_3[n] + \boldsymbol{T_1 A b}u[n]; \\ \ldots \\ z_{k-1}[n+1] = \boldsymbol{T_1 A^{k-2} x}[n+1] = \boldsymbol{T_1 A^{k-1} x}[n] + \boldsymbol{T_1 A^{k-2} b}u[n] = \\ = z_k[n] + \boldsymbol{T_1 A^{k-2} b}u[n]; \\ z_k[n+1] = \boldsymbol{T_1 A^{k-1} x}[n+1] = \boldsymbol{T_1 A^{k} x}[n] + \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b}u[n] = \\ = -a_k z_1[n] - \ldots - a_1 z_k[n] + \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b}u[n]. \end{cases}$$

В последнем уравнении системы использовано равенство

$$\boldsymbol{A^k} = -a_1\boldsymbol{A^{k-1}} - a_2\boldsymbol{A^{k-2}} - \ldots - a_k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b}u[n],$$

которое следует из теоремы Кэли-Гамильтона.

Рассмотрим столбец из коэффициентов при управлении u[n]:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T_1 b} \\ \boldsymbol{T_1 A b} \\ \ldots \\ \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b} \end{bmatrix},$$

Имеем

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T_1 b} \\ \boldsymbol{T_1 A b} \\ \ldots \\ \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b^T T_1^T} \\ (\boldsymbol{Ab})^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T_1^T} \\ \ldots \\ \left(\boldsymbol{A^{k-1} b}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T_1^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b^T}\left(\boldsymbol{K_y^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \\ (\boldsymbol{Ab})^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{K_y^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \\ \ldots \\ \left(\boldsymbol{A^{k-1} b}\right)^{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{K_y^{-1}}\right)^{\boldsymbol{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{K_y^T}(\boldsymbol{K_y^{-1}})^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, с помощью линейного невырожденного преобразованиях **x=Tz** система уравнений (39.1) приведена к виду

$$\begin{cases} z_1[n+1] = z_2[n]; \\ z_2[n+1] = z_3[n]; \\ \ldots \\ z_{k-1}[n+1] = z_k[n]; \\ z_k[n+1] = -a_k z_1[n] - \ldots - a_1 z_k[n] + \boldsymbol{T_1 A^{k-1} b}u[n], \end{cases}$$

который представляет собой каноническую форму управляемости.

Решение задачи синтеза модального управления определяется следующей теоремой.

Теорема 39.2. *Пусть задана полностью управляемая линейная дискретная система, описываемая уравнением (39.1), и произвольный многочлен* $D(\lambda) = \lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \ldots + b_{k-1}\lambda + b_k$. *Тогда существует такое управление* $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{k^T x}$, *что характеристический многочлен замкнутой системы* $\det[\lambda\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T)] = D(\lambda)$.

Доказательство. Полагаем, что система уравнений (39.1) приведена к каноническому виду управляемости. В силу теоремы 39.1 это всегда можно сделать. Тогда характеристический многочлен замкнутой системы

$$det\left(\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{T}})\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_k+k_1 & a_{k-1}+k_2 & a_{k-2}+k_3 & \dots & a_2+k_1 & a_1+k_k+\lambda \end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^k+(a_1+k_k)\lambda^{k-1}+\ldots+(a_{k-1}+k_2)\lambda+(a_k+k_1)=D(\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем следующие равенства для определения коэффициентов обратных связей:

$$k_1=b_k-a_k;\quad k_2=b_{k-1}-a_{k-1};\ \dots;\ k_k=b_1-a_1.\qquad(39.4)$$

Теорема доказана.

Аналогичный результат имеет место для дискретной системы, описываемой уравнениями (34.3) с векторным управлением. Если дискретная система, описываемая уравнениями (34.3), полностью управляема, то существует такая матрица обратных связей **К**, что управление $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$ придает замкнутой дискретной системе заранее заданные динамические свойства, т.е. характеристический многочлен замкнутой системы $det[\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{T}})]$ совпадает с заданным многочленом $D(\lambda)$.

Пример 39.1. Выполнить синтез модального управления для линейной дискретной автоматической системы, рассмотренной в примере 36.1.

Пусть уравнения состояния имеют вид (36.13):

$$\begin{cases} x_1[n+1]=x_2[n]+u[n]; \\ x_2[n+1]=-x_1[n]-2x_2[n]; \\ y[n]=x_1[n]. \end{cases}$$

В примере 38.1 было показано, что система полностью управляема.

Обозначим вектор коэффициентов обратных связей $\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$.

Тогда характеристический многочлен замкнутой системы

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{T}})]=\begin{bmatrix} \lambda+k_1 & k_2-1 \\ 1 & \lambda+2 \end{bmatrix}=$$

$$=\lambda^2+(k_1+2)\lambda+2k_1+1-k_2=\lambda^2+b_1\lambda+b_2.$$

Приравняв в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем следующие выражения для коэффициентов обратных связей:

$$k_1=b_1-2;\quad k_2=2b_1-3-b_2.$$

Решим задачу синтеза модального управления для случая, когда уравнения состояния имеют вид (36.14), т.е. уравнения состояния приведены к канонической форме управляемости:

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] - 2x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = 2x_1[n] + x_2[n]. \end{cases}$$

Характеристический многочлен разомкнутой системы

$$\det(\boldsymbol{\lambda E} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Его коэффициенты $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Коэффициенты обратных связей определим по формулам (39.4):

$$k_1 = b_2 - 1; \ k_2 = b_1 - 2.$$

Пример 39.2. Выполнить синтез модального управления для линейной автоматической системы, приведенной в примере 36.2.

Сначала рассмотрим случай, когда уравнения состояния получены по разностному уравнению и имеют вид (36.17):

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n] + u[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] + 2x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = x_1[n]. \end{cases}$$

В примере 38.2 показано, что эта система не является полностью управляемой. Характеристический многочлен замкнутой системы

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk^T})] = \begin{bmatrix} \lambda + k_1 & k_2 - 1 \\ k_1 + 1 & \lambda - 2 + k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (k_1 + k_2 - 2)\lambda + 1 - k_1 - k_2 = \lambda^2 + b_1\lambda + b_2.$$

Приравняв в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем следующие выражения для коэффициентов обратных связей:

$$k_1 + k_2 = b_1 + 2; \quad k_1 + k_2 = -b_2 + 1.$$

Полученная система уравнений несовместна, и задача синтеза модального управления для рассматриваемого случая не имеет решения.

Пусть теперь уравнения состояния имеют вид (36.18):

$$\begin{cases} x_1[n+1] = x_2[n]; \\ x_2[n+1] = -x_1[n] + 2x_2[n] + u[n]; \\ y[n] = -x_1[n] + x_2[n]. \end{cases}$$

Система приведена к каноническому виду управляемости. Характеристический многочлен разомкнутой системы

$$\det(\boldsymbol{\lambda E} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Его коэффициенты $a_1 = -2$, $a_2 = 1$.

Коэффициенты обратных связей определим по формулам (39.4):

$k_1 = b_2 - 1$; $k_2 = b_2 + 2$.

40. Уравнения наблюдающих устройств полного и неполного порядка

Под наблюдающим устройством понимается алгоритм оценивания координат вектора состояния **x**[n] по известному вектору выхода **y**[n]. Если оцениваются все координаты вектора состояния, то наблюдающее устройство называется наблюдающим устройством полного порядка, а если оцениванию подлежит часть координат вектора состояния – наблюдающим устройством неполного порядка.

Рассмотрим сначала ***задачу определения уравнений наблюдающего устройства полного порядка***. Пусть имеется линейная дискретная автоматическая система, описываемая уравнениями (34.3):

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases}$$

и другая линейная дискретная автоматическая система, уравнения которой имеют вид

$$\begin{cases} \widehat{\boldsymbol{x}}[n+1] = \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}}[n] + \widehat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}[n]; \\ \widehat{\boldsymbol{y}}[n] = \widehat{\boldsymbol{C}}\widehat{\boldsymbol{x}}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases} \qquad (40.1)$$

Линейная система, описываемая уравнениями (40.1), называется ***системой асимптотической оценки состояния системы***, описываемой уравнениями (34.3), если ошибка оценивания $\boldsymbol{e}[n] = \boldsymbol{x}[n] - \widehat{\boldsymbol{x}}[n] \to 0$ при n→∞.

Пусть уравнение ошибки оценивания имеет вид:

$$\boldsymbol{e}[n+1] = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}[n], \quad (40.2)$$

где $\mathbf{L}$ – некоторая матрица размера $k{\times}m$, подлежащая определению. Тогда уравнение для оценки $\widehat{\boldsymbol{x}}[n]$ вектора состояния:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}[n+1] = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}[n] + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] - \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{x}}[n]) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{D})\boldsymbol{u}[n]. \quad (40.3)$$

В дальнейшем выходной сигнал $\mathbf{y}$[n] будем полагать скалярной величиной, т.е. будем рассматривать линейную дискретную систему, описываемую уравнениями:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ y[n] = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}[n], \end{cases} \qquad (40.4)$$

где **c** – вектор-столбец.

Условия существования системы асимптотической оценки состояния системы, описываемой уравнениями (40.4), определяются следующей теоремой.

Теорема 40.1. *Система асимптотической оценки состояния дискретной системы, описываемой уравнениями (40.4), существует, если эта дискретная система полностью наблюдаема.*

Система асимптотической оценки является наблюдающим устройством полного порядка.

Следует отметить, что для дискретной автоматической системы, описываемой уравнениями (34.3), уравнение наблюдающего устройства полного порядка имеет вид (40.3).

В общем случае замкнутая линейная дискретная автоматическая система с наблюдающим устройством полного порядка описывается:

• уравнениями объекта управления

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[n] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[n], \end{cases}$$

• уравнением наблюдающего устройства полного порядка

$$\widehat{\boldsymbol{x}}[n+1] = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}[n] + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] - \boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{x}}[n]) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{LD})\boldsymbol{u}[n].$$

• уравнением регулятора

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\widehat{\boldsymbol{x}}.$$

Соответствующая структурная схема системы управления приведена на рисунке 40.1.

Рисунок 40.1

Характеристический многочлен замкнутой системы управления с наблюдающим устройством полного порядка имеет вид

$$det\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BK}\\ -\boldsymbol{LC} & \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}+\boldsymbol{BK}\end{bmatrix} =$$

$$= det\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}\\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}\end{bmatrix} =$$

$$= \det[\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]\det[\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}]. \quad (40.5)$$

Из формулы (40.5) следует, что динамика системы управления в целом определяется динамикой контура управления (матрица **A-BK**) и динамикой контура оценки вектора состояния (матрица **A-LC**). Выбрав соответствующим образом матрицы **K** и **L**, можно обеспечить как асимптотическую устойчивость системы управления, так и требуемое качество переходного процесса.

Перейдем к определению уравнений наблюдающего устройства неполного порядка. Предположим, что объект управления описывается уравнениями:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[n+1] = \boldsymbol{Ax}[n] + \boldsymbol{Bu}[n];\\ \boldsymbol{y}[n] = \boldsymbol{Cx}[n],\end{cases} \quad (40.6)$$

где матрица **C**=[$\mathbf{E_m}$ **0**] ($\mathbf{E_m}$ – единичная матрица размера m×m).

Из второго уравнения системы уравнений (40.6) следует, что первые m координат $x_1, x_2, ..., x_m$ вектора состояния **x**[n] измеряются и их оценка не требуется. Поэтому ***наблюдающее устройство строится для оценки только неизмеряемых координат*** $x_{1+m}, x_{2+m}, \ldots, x_k$ и является *наблюдающим устройством неполного порядка*.

Для построения наблюдающего устройства неполного порядка представим вектор состояния **x** в виде

$$\boldsymbol{x}[n] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^1[n] \\ \boldsymbol{x}^2[n] \end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{x}^1[n]$ – m-мерный вектор; $\boldsymbol{x}^2[n]$ – (k-m)-мерный вектор. Тогда система уравнений объекта управления (5.54) примет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^1[n+1] = \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}^1[n] + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}^2[n] + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{x}^2[n+1] = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}^1[n] + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}^2[n] + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}[n]; \\ \boldsymbol{x}^1[n] = \boldsymbol{x}^1[n]; \end{cases} \quad (40.7)$$

где $\mathbf{A}_{11}$ – матрица размера m×m; $\mathbf{A}_{12}$ – матрица размера m×(k-m); $\mathbf{B}_1$ – матрица размера m×r; $\mathbf{A}_{21}$ – матрица размера (k-m)×m; $\mathbf{A}_{22}$ – матрица размера (k-m)×(k-m); $\mathbf{B}_2$ – матрица размера (k-m)×r.

Второе уравнение системы (40.7) примем за уравнение объекта управления, а первое уравнение, записав его в виде

$$\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}^2[n] = \boldsymbol{x}^1[n+1] - \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}^1[n] - \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}[n]$$

используем как уравнение выхода. Тогда в соответствии с выражением (40.3) уравнение наблюдающего устройства для оценки вектора $\mathbf{x}^2[\mathrm{n}]$ имеет вид

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^2[n+1] = (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{12})\widehat{\boldsymbol{x}}^2[n] + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^1[n+1] - \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}^1[n] - \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}[n]) +$$
$$+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}^1[n] + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}[n]. \quad (40.8)$$

Матричный коэффициент **L** выбирается из условия:

$$\det[\lambda\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{12})] = Q(\lambda),$$

где Q(λ) – заранее выбранный многочлен.

Если выбрать вектор состояния наблюдающего устройства

$$\xi[n] = \widehat{\boldsymbol{x}}^2[n] - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^1[n],$$

то уравнение наблюдающего устройства примет вид:

$$\xi[n+1] = (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{12})\xi[n] + (\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^1[n] +$$
$$+(\boldsymbol{A}_{21} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{11})\boldsymbol{x}^1[n] + (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{u}[n], \quad (40.9)$$

Структурная схема наблюдающего устройства приведена на рисунке 40.2.

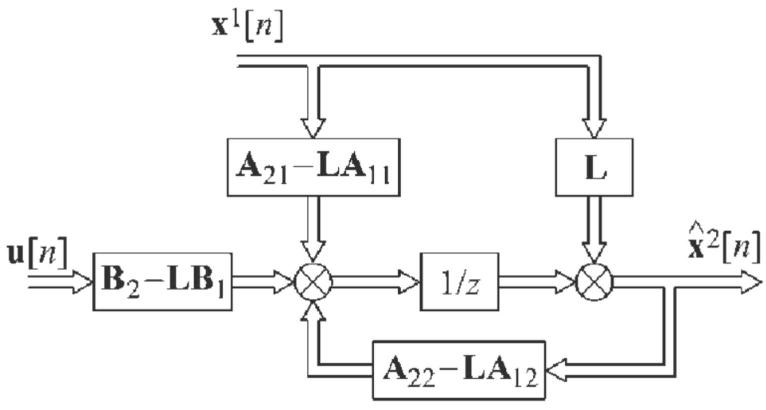


Рисунок 40.2

В отличие от уравнения (5.48) наблюдающего устройства полного порядка, размерность которого равна k, размерность уравнения (5.57) наблюдающего устройства неполного порядка равна k-m, что может существенно упростить алгоритм оценивания.

Пример 40.1. Определить уравнения наблюдающего устройства полного порядка для объекта автоматического управления, рассмотренного в примере 36.1, если уравнения состояния имеют вид (36.13).

В этом случае

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0].$$

Пусть $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ характеристический многочлен для уравнений наблюдающего устройства:

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Ic})] = \begin{bmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 + 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + 1 + 2l_1 + l_2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

Отсюда находим:

$$l_1 = \alpha_1 - 2; \; l_2 = \alpha_2 - 2\alpha_1 + 3. \quad (40.10)$$

Согласно формуле (5.52), уравнения наблюдающего устройства:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_1[n+1] = \hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_1(y[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_1[n]) + u[n]; \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2[n+1] = -\hat{\boldsymbol{x}}_1[n] - 2\hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_2(y[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_1[n]), \end{cases} \quad (40.11)$$

где l_1 и l_2 определяются формулами (40.10). Структурная схема системы с наблюдающим устройством ***полного порядка*** приведена на рисунке 40.3.

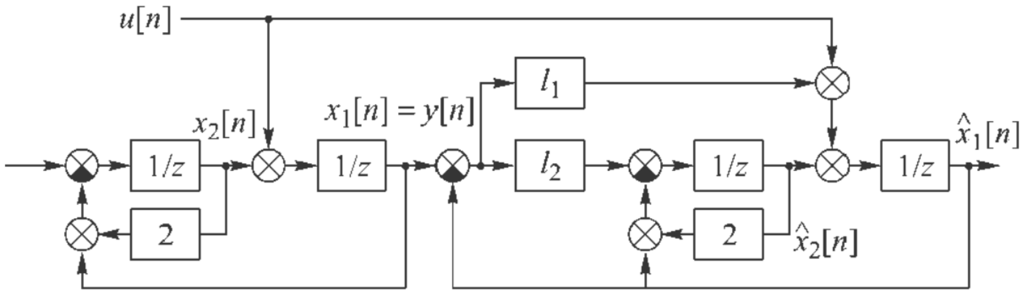


Рисунок 40.3

Схема модели в среде ScilabXcos для системы с наблюдающим устройством полного порядка приведена на рисунке 40.4. В качестве возмущающего сигнала на входе системы был выбран единичный скачек длительностью 20. Управляющий сигнал задан в виде скачка с амплитудой 0.1.

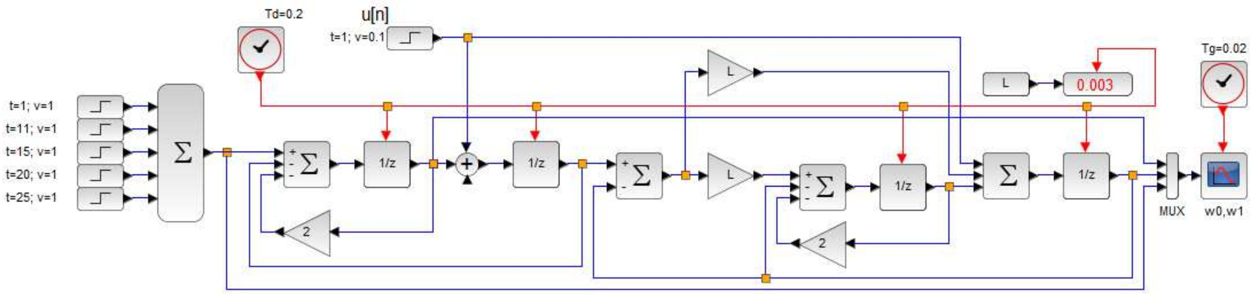


Рисунок 40.4

Графики результатов моделирования приведены на рисунке 40.5. Полученные сигналы имеют вид модулированных колебаний, базовая частота которых равна частота дискретизации.

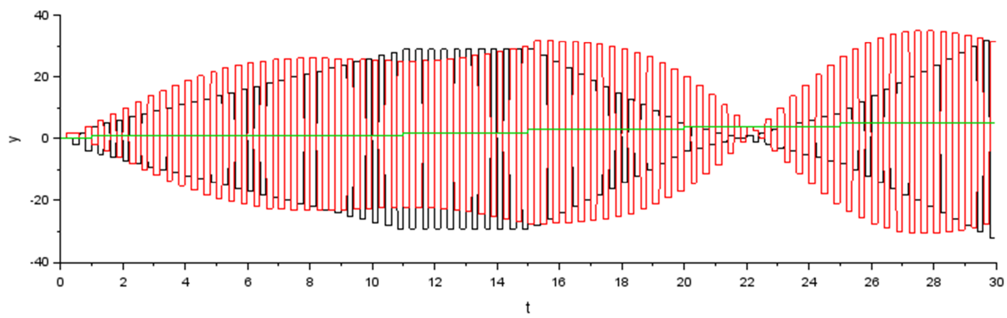


Рисунок 40.5

Пример 40.2. Определить уравнения наблюдающего устройства полного порядка для объекта автоматического управления, рассмотренного в примере 36.1, если уравнения состояния имеют вид (36.14).

В этом случае

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [2 \quad 1].$$

Пусть $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ характеристический многочлен для уравнений наблюдающего устройства:

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Ic})] = \begin{bmatrix} \lambda + 2l_1 & l_1 - 1 \\ 2l_2 + 1 & \lambda + 2 + l_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \lambda^2 + (2 + 2l_1 + l_2)\lambda + 1 + 3l_1 + 2l_2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

Для определения l_1 и l_2 получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3l_1 + 2l_2 = \alpha_2 - 1; \\ 2l_1 + l_2 = \alpha_1 - 2. \end{cases} \qquad (40.12)$$

Решение системы линейных уравнений:

$$l_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 3; \; l_2 = -3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6. \qquad (40.13)$$

Уравнения наблюдающего устройства:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_1[n+1] = \hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_1(y[n] - 2\hat{\boldsymbol{x}}_1[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_2[n]); \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2[n+1] = -\hat{\boldsymbol{x}}_1[n] - 2\hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_2(y[n] - 2\hat{\boldsymbol{x}}_1[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_2[n]) + u[n], \end{cases} \qquad (40.14)$$

где l_1 и l_2 определяются формулами (40.13).

Пример 40.3. Определить уравнения наблюдающего устройства полного порядка для объекта автоматического управления, рассмотренного в примере 36.2, если уравнения состояния имеют вид (36.17).
В этом случае

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0].$$

Пусть $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ характеристический многочлен для уравнений наблюдающего устройства:

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Ic})] = \begin{bmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 + 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (l_1 - 2)\lambda + 1 - 2l_1 + l_2 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

Отсюда получим выражения для определения l_1 и l_2:

$$\begin{cases} l_1 = \alpha_1 + 2; \\ l_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3. \end{cases} \qquad (40.15)$$

Уравнения наблюдающего устройства:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_1[n+1] = \hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_1(y[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_1[n]) + u[n]; \\ \hat{\boldsymbol{x}}_2[n+1] = -\hat{\boldsymbol{x}}_1[n] + 2\hat{\boldsymbol{x}}_2[n] + l_2(y[n] - \hat{\boldsymbol{x}}_1[n]) + u[n], \end{cases} \qquad (40.16)$$

где l_1 и l_2 определяются формулами (40.15).

Пример 40.4. Определить уравнения наблюдающего устройства полного порядка для объекта автоматического управления, рассмотренного в примере 36.2, если уравнения состояния имеют вид (36.18).

В этом случае

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [-1 \quad 1].$$

Если принять $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$, то характеристический многочлен уравнений наблюдающего устройства:

$$\det[(\boldsymbol{\lambda E} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{Ic})] = \begin{bmatrix} \lambda - l_1 & l_1 - 1 \\ 1 - l_2 & \lambda - 2 + l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (-l_1 + l_2 - 2)\lambda + l_1 - l_2 + 1 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2.$$

Для определения l_1 и l_2 получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} l_1 - l_2 = -\alpha_1 - 2; \\ l_1 - l_2 = \alpha_2 - 1. \end{cases}$$

Эта система уравнений несовместна.

В этом случае наблюдающее устройство не может быть построено, так как дискретная система, уравнения состояния которой имеют вид (36.18), не является полностью наблюдаемой.

Пример 40.5. Определить уравнения наблюдающего устройства неполного порядка для объекта автоматического управления, рассмотренного в примере 36.1, если уравнения состояния имеют вид (36.13).

В этом случае

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0].$$

В соответствии с формулой (40.6)

$\mathbf{A}_{11}$ =0; $\mathbf{A}_{12}$=1;$\mathbf{B}_1$=1; $\mathbf{A}_{21}$ =-1; $\mathbf{A}_{22}$=–2; $\mathbf{B}_2$=0.

Тогда, согласно (40.9), получим следующее уравнение наблюдающего устройства неполного порядка:

$$\xi[n+1] = (-2-l)\xi[n] + (-2-l)lx_1[n] - x_1[n] - lu[n],$$

где $\xi[n] = \hat{x}_2[n] - lx_1[n]$.

Из соотношения $\det(\lambda E - A_{22} + lA_{12}) = \lambda + 2 + l = \lambda + \alpha_1$ определим коэффициент l: $l=\alpha_1-2$. Структурная схема системы с наблюдающим устройством неполного порядка представлена на рисунке 40.6.

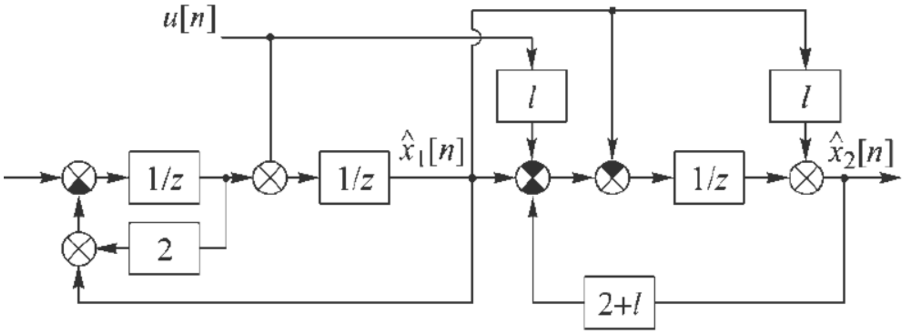


Рисунок 40.6

Из сравнения структурных схем, приведенных на рисунках 40.3 и 40.4, следует, что применение наблюдающих устройств неполного порядка существенно упрощает алгоритм оценивания.

Список литературы

1. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы.– М.: ФИЗМАТЛИТ.2003.– 288 с.
2. Иванов В.А. Теория дискретных систем автоматического управления Иванов В.А. 2015. – 350 с.
3. Вадутов О.С. Система автоматического управления с дискретным ПИД-регулятором. Томск: Изд-во Томск.гос. ун-та. 2014. – 10 с.
4. Карпов А.Г. Цифровые системы автоматического регулирования. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та 2015. – 216 с.
5. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. – М.: Наука. 1985. – 296 с.
6. Гайдук А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах в MATLAB. СПб.: Изд-во Лань 2017 – 464 с.
7. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью.– М.: Изд-во: Лаборатория базовых знаний. 2001. – 616 с.
8. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир. 1984.– 541 с.
9. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Книга по требованию, 2012. 288 с
10. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963.– 455 с.
11. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. –968 с.
12. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ:. М.: Мир, 1987. –480 с.
13. Певзнер Л.Д. Теория автоматического управления. Задачи и решения 2016.–605 с.
14. Малышенко А.М., Вадутов О.С. Сборник тестовых задач по (Ц)ТАУ 2016–366 с.
15. Корн Г., Корн К. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука. 1984 – 835 с.
16. Ерин С. В. Scilab – примеры и задачи: практическое пособие— М.: Лаборатория «Знания будущего», 2017. — 154 с.
17. Данилов С.Н. SCICOS. Пакет Scilab для моделирования динамических систем. Тамбов: ТГТУ, 2011. – 74 с.
18. Андриевский А.Б. Решение инженерных задач в среде Scilab. Учебное пособие.— СПб.: НИУ ИТМО 2013. — 97 с.
19. Поляков Исследование непрерывных и цифровых систем управления в среде Scilab. – СПб.: СПбГМТУ. 2020–273 с.
20. Тропин И.С., Михайлова О.И., Михайлов А.В. Численные и технические расчеты в среде Scilab. — М.: 2008. — 65 с.
21. Глибин Е.С. Моделирование источников питания электротехнологических установок в ScilabXcos: лабораторный практикум. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2016.– 48 с.

Электронное учебное издание

Виктор Иванович **Капля**
Егор Викторович **Капля**

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ - МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ SCILABXCOS

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2023 г. Поз. № 27.
Подписано к использованию 23.11.2023. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 5,1.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.