МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Игумнов А.Ю.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Электронное учебное пособие

Волжский

2024

УДК 510(07)
ББК 22.1я73
И 286

Рецензенты:
зав. кафедрой КНЭМ ВолГУ, д.ф.-м.н.
Клячин В.А.,
доцент кафедры физики, математики и информатики ВолгМУ, к.п.н.
Филиппова Е.М.

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Игумнов, А. Ю.
Элементы математической логики [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Ю. Игумнов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. — Электрон. текстовые дан. (1 файл: 585 КБ). — Волжский, 2024. — Режим доступа: http://lib.volpi.ru. — Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-9948-4920-0

Учебное пособие содержит краткое изложение теоретических начальных сведений и изложение приемов решения типовых задач следующих разделов математической логики: алгебра высказываний, булевы функции, логика предикатов; а также начальные сведения теории сложности алгоритмов в рамках курса «Математическая логика и теория сложности алгоритмов». Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 09.03.01 «Технологии разработки информационных систем обработки информации и управления», 09.03.04 «Программная инженерия».

Ил. 42, табл. 61, библиограф.: 8 назв.

ISBN 978-5-9948-4920-0

Содержание

1 Алгебра высказываний

1.1 Высказывания и операции над ними. Понятие высказывания. Операции над высказываниями. Составление сложных высказываний. Значение истинности высказываний

В математической логике принято следующее (не совсем правильное) понимание понятия "высказывание". Высказывание — суждение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно (точное определение высказывания дано в [3]). Истинность или ложность высказывания определяется по совокупности знаний в той области науки или иной человеческой деятельности, к которой это высказывание относится.

Примеры высказываний:

$$\text{Волга впадает в Каспийское море,} \tag{1}$$

$$\text{Москва — столица России,} \tag{2}$$

$$\text{3 меньше, чем 2.} \tag{3}$$

Высказывание (1) истинно в обозримую геологическую эпоху. Высказывание (2) в настоящее время истинно, но, например, 200 лет назад, оно было бы ложным. Для высказывания (3) естественно считать, что оно ложно всегда.

Далее, в математической логике полагается, что высказывание может быть либо истинным, либо ложным, и никаким иным. Тем самым на множестве высказываний задается функция, принимающая два значения: истина, ложь. Значение "истина" будем обозначать как И или 1, значение "ложь" — как Л или 0.

Для высказываний, рассматриваемых как постоянные, введем обозначения A, B, C и т.д. (начальными буквами латинского алфавита), а также теми же буквами с индексами. Для высказываний, рассматриваемых как переменные (*пропозициональные переменные*), введем обозначения X, Y, Z и т.д. (заключительными буквами латинского алфавита), а также теми же буквами с индексами. Функцию истинности обозначим λ. Таким образом, если $\mathcal{A}$ — некоторая совокупность высказываний, то для $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } A \text{ истинное;} \\ \text{Л}, & \text{если } A \text{ ложное.} \end{cases}$$

Значение $\lambda(A)$ будем называть значением истинности высказывания A.

Пример 1 *Полагая, что высказывания (1), (2), (3), относятся к настоящему времени, определить их значения истинности.*

Обозначим: A="Волга впадает в Каспийское море", B="Москва — столица России", C="3 меньше, чем 2".
Имеем: $\lambda(A) =$ И, $\lambda(B) =$ И, $\lambda(C) =$ Л.

В математической логике полагается, что значения истинности рассматриваемых высказываний постоянны. Высказывания рассматриваются только с точки зрения их значения истинности. То есть не учитывается содержание высказывания, его смысл.

В естественном языке из высказываний данной совокупности можно составлять новые, используя для этого слова "и", "или", "не", "если" и "то", и другие. Исходные высказывания называют при этом простыми, элементарными; получающиеся из них — составными. При этом высказывают некие суждения относительно истинности исходных высказываний и высказываний-результатов. В логике (не только в математической) для подобных целей используют специальные знаки, называемые логическими связками (логическими операциями): $\cdot$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\to$ — импликация, $\sim$ — эквивалентность, $\neg$ — отрицание (другой вариант обозначения: черта $\overline{}$ над обозначением отрицаемого высказывания). Значения истинности исходных высказываний и составного сочетаются для указанных операций по следующим правилам:

1. Высказывание $A \cdot B$ истинно только в том случае, когда высказывание A истинно и высказывание B тоже истинно. В остальных случаях высказывание $A \cdot B$ ложно.

2. Высказывание $A \vee B$ ложно только в том случае, когда высказывание A ложно и высказывание B тоже ложно. В остальных случаях высказывание $A \vee B$ истинно.

3. Высказывание $A \sim B$ истинно только в том случае, когда когда значение истинности высказывания A совпадает со значением истинности высказывания B. В остальных случаях высказывание $A \sim B$ ложно.

4. Высказывание $A \to B$ ложно только в том случае, когда высказывание A истинно, высказывание B ложно. В остальных случаях высказывание $A \to B$ истинно.

5. Высказывание $\neg A$ истинно только в том случае, когда высказывание A ложно. Высказывание $\neg A$ ложно только в том случае, когда высказывание A истинно.

Из получившихся составных высказываний и из исходных можно, полагая имеющиеся в качестве первичных, составлять новые высказывания, употребляя пары скобок (,) для указания очередности выполнения операций подобно тому, как это делается в числовых алгебраических выражениях.

Пример 2 $A \to (B \vee C)$, $(A \to B) \vee C$, $(A \cdot B) \sim C$, $A \cdot (B \sim C)$. *Определение истинности данных высказываний сводится к двукратному применению правил 1–5.*

1.2 Формулы алгебры высказываний. Таблицы истинности формул

Формулой называется выражение, составленное из пропозициональных переменных, логических связок и парных скобок, согласно следующему определению.

Определение 1 *1. Пропозициональная переменная есть формула.*
2. Если F есть формула, то $\neg F$ есть формула.
3. Если F_1, F_2 есть формулы, то $(F_1 \circ F_2)$, где $\circ$ — любая из логических связок, есть формула.
4. Если выражение не удовлетворяет условиям 1–3, то оно не является формулой.

Если в формулу вместо обозначений высказываний подставить их значения истинности, то можно получить значение истинности формулы для данных сочетаний значений истинности высказываний, ее составляющих, согласно правилам 1—5.

Перечень значений истинности составного высказывания, определяемого некоторой формулой, для всех возможных сочетаний значений истинности элементарных высказываний называется таблицей истинности данной формулы. Если количество элементарных высказываний равно n, то сочетание их значений истинности представляется в виде упорядоченного набора из n символов, каждый из которых есть одно из двух значений истинности. Из комбинаторных соображений выводится, что количество таких (попарно различных) наборов равно 2^n. Если в качестве обозначений значений истинности приняты 0 (ложь) и 1 (истина), то набор сочетаний значений можно рассматривать как n-разрядную двоичную запись некоторого числа k, $0 \le k \le 2^n - 1$. При проведении различного рода выкладок удобно записывать наборы в порядке возрастания представляемых ими чисел k. Число k при этом называется номером набора. Также в заголовочной строке указываются вместо обозначения значений функции вида $\lambda(X)$ просто обозначения высказываний.

Пример 3 *Простейшими (после элементарных высказываний) являются* *формулы, определяемые связками* $\cdot$, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\neg$. *В соответствии с правилами 1–5 получаем следующие таблицы истинности.*

Таблица 1

№	A	B	$A \cdot B$
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Таблица 2

№	A	B	$A \vee B$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Таблица 3

№	A	B	$A \sim B$
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

Таблица 4

№	A	B	$A \to B$
0	0	0	1
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1

Таблица 5

№	A	$\neg A$
0	0	1
1	1	0

Пример 4 *Следующие выражения, согласно определению 1, являются формулами:*

$$X \to (Y \vee Z),\ (X \to Y) \vee Z,\ (X \cdot Y) \sim Z,\ X \cdot (Y \sim Z)\ .$$

Для составления таблиц истинности более сложных формул могут потребоваться промежуточные выкладки. Результаты этих выкладок могут включаться в состав таблицы истинности. Тогда таблица истинности будет содержать дополнительные столбцы.

Пример 5 *Для формул примера 4 имеем следующие таблицы истинности.*

Таблица 6

№	X	Y	Z	$Y \vee Z$	$X \to (Y \vee Z)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1

Таблица 7

№	X	Y	Z	$Y \to Z$	$(X \to Y) \vee Z$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1

Таблица 8

№	X	Y	Z	$X \cdot Y$	$(X \cdot Y) \sim Z$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1

Таблица 9

№	X	Y	Z	$Y \sim Z$	$X \cdot (Y \sim Z)$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1

1.3 Логическая равносильность формул. Определение. Признаки. Примеры

Пусть F, G — некоторые формулы. Не ограничивая общности, можно полагать, что эти формулы определены для одного и того же набора переменных.

Определение 2 *Формулы $F(X_1, \ldots, X_n)$, $G(X_1, \ldots, X_n)$ называются равносильными, если на каждом наборе значений переменных они принимают одинаковые значения.*

Факт равносильности формул будем обозначать знаком $=$. Из определения следует, что отношение равносильности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Т.е. является отношением эквивалентности.

Пример 6 $\overline{\overline{X}} = X$, $X \vee X = X$, $X \cdot X = X$, $X \vee \overline{X} = Y \vee \overline{Y}$.

При небольшом значении n равносильность формул может быть проверена по таблицам истинности: при закрепленном порядке выписывания значений наборов переменных $X_1, \ldots, X_n$ значения формул F и G в каждой строке таблицы должны совпадать.

Пример 7 *Сопоставляя столбцы значений формул в таблицах истинности примера 5, имеем: $X \to (Y \vee Z) = (X \to Y) \vee Z$.*

Равносильность и эквивалентность

Связь между бинарным отношением равносильности на множестве формул и бинарной логической операцией эквивалентности можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1 *Формула F равносильна формуле G тогда и только тогда, когда при всех наборах значений переменных формула $F \sim G$ принимает значение* И.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — набор значений переменных $X_1, \ldots, X_n$. Если F равносильна G, то $F(\delta_1, \ldots, \delta_n) = G(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. По определению связки $\sim$ получаем, что на наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ значение формулы $F \sim G$ равно И.
Достаточность. Пусть на любом наборе $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ значений переменных $X_1, \ldots, X_n$ формула $F \sim G$ принимает значение И. Согласно определению операции $\sim$ это означает, что $F(\delta_1, \ldots, \delta_n) = G(\delta_1, \ldots, \delta_n)$. Т.е. F равносильно G.

Основные равносильные формулы

В математической логике основными равносильностями являются следующие.

1. $\neg\neg X = X$
2. $X \cdot Y = Y \cdot X$
3. $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
4. $X \vee Y = Y \vee X$
5. $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$
6. $X \cdot (Y \vee Z) = X \cdot Y \vee X \cdot Z$
7. $X \vee (Y \cdot Z) = (X \vee Y) \cdot (X \vee Z)$
8. $X \vee X \cdot Y = X$
9. $X \cdot (X \vee Y) = X$
10. $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$
11. $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$
12. $X \vee X = X$
13. $X \vee \neg X = 1$
14. $X \cdot X = X$
15. $X \cdot \neg X = 0$
16. $X \cdot 1 = X$
17. $X \vee 0 = X$

Упражнение 1 *Доказать равносильности 1–17.*

Равносильности 1 — 17 (и другие) могут использоваться для преобразования формулы к иному виду при сохранении значения формулы на всех наборах значений переменных.

Пример 8 *а)* $\neg\neg X \cdot X = X$ *(используются равносильности 1 и 14);*
б) $X \vee X \cdot Y \vee Y = X \vee Y$ *(используется ассоциативность дизъюнкции и равносильность 8:* $X \vee X \cdot Y \vee Y = (X \vee X \cdot Y) \vee Y = X \vee Y$*).*

Упражнение 2 *Доказать следующие утверждения.*

Лемма 1 *Если* $F(X_1, \ldots, X_n) = G(X_1, \ldots, X_n)$*, то*

$$\neg F(X_1, \ldots, X_n) = \neg G(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

Лемма 2 *Если* $F(X_1, \ldots, X_n) = G(X_1, \ldots, X_n)$*, то*

$$F(\neg X_1, \ldots, \neg X_n) = G(\neg X_1, \ldots, \neg X_n)\,.$$

Соглашения о записи формул

Равносильности 2 — 5 означают, что для операций $\cdot$ и $\vee$ выполняются законы коммутативности и ассоциативности. То есть значение формул вида $F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_k$ не зависит от порядка выполнения операций $\cdot$ (не зависит от расстановки скобок). На этом основании в выражении такого вида скобки можно не ставить. Аналогично для выражения вида $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_k$.

Равносильность 6 означает, что операция $\cdot$ дистрибутивна относительно операции $\vee$, что внешне совпадает с дистрибутивностью числового сложения относительно числового умножения. На этом основании операции $\cdot$ и $\vee$ будем называть логическим умножением и логическим сложением соответственно и опускать в формулах знак $\cdot$.

Равносильность 6 будем называть первым дистрибутивным законом, равносильность 7 — вторым дистрибутивным законом.

Для сокращения количества скобок в записи формулы введем старшинство операций: умножение предшествует сложению (по аналогии с соответствующими числовыми операциями); умножение и сложение предшествуют действиям $\to$ и $\sim$. Также в случае знака отрицания, записанного как черта над отрицаемым выражением, будем полагать внешние скобки излишними.

1.4 Классификация формул алгебры высказываний

Пусть $F(X_1, \ldots, X_n)$ — некоторая формула, $A_1, \ldots, A_n$ — некоторые высказывания. Высказывание $F(A_1, \ldots, A_n)$ называется конкретизацией формулы F. Формула $F(X_1, \ldots, X_n)$ называется:

- выполнимой, если существует ее некоторая конкретизация $F(A_1, \ldots, A_n)$ такая, что $\lambda(F(A_1, \ldots, A_n)) = 1$ (в таблице истинности есть строка с $\lambda(F) = 1$);
- тавтологией (тождественно истинной), если для всякой ее конкретизации $F(A_1, \ldots, A_n)$ выполнено условие $\lambda(F(A_1, \ldots, A_n)) = 1$ (в таблице истинности в каждой строке $\lambda(F) = 1$); формула-тавтология обозначается $\models F(X_1, \ldots, X_n)$;
- опровержимой, если существует ее некоторая конкретизация $F(A_1, \ldots, A_n)$ такая, что $\lambda(F(A_1, \ldots, A_n)) = 0$ (в таблице истинности есть строка с $\lambda(F) = 0$);
- противоречием (тождественно ложной), если для всякой ее конкретизации $F(A_1, \ldots, A_n)$ выполнено условие $\lambda(F(A_1, \ldots, A_n)) = 0$ (в таблице истинности в каждой строке $\lambda(F) = 0$).

Формула может быть классифицирована по таблице истинности или посредством аналитических рассуждений.

Пример 9 *Составив таблицу истинности, классифицировать формулу* $X \to (Y \to Z)$.
Решение. На основании таблицы истинности импликации получаем таблицу значений формулы:

Таблица 10

X	Y	Z	$Y \to Z$	$X \to (Y \to Z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

На основании содержимого столбца значений определяем, что формула является выполнимой и опровержимой.

Пример 10 *Посредством аналитических рассуждений классифицировать формулу* $X \to (Y \to Z)$.
Решение. Рассмотрим набор значений переменных вида $(0, Y, Z)$. *Поскольку при* $X = 0$ *посылка в исследуемой формуле ложная, то для таких наборов* $\lambda(F) = 1$. *Рассмотрим наборы вида* $(1, Y, Z)$. *Посылка формулы для наборов такого вида имеет значение 1. Полагая* $Y = 1$, $Z = 0$, *получаем, согласно таблице истинности импликации, что заключение* $Y \to Z$ *рассматриваемой формулы ложно. Согласно таблице истинности импликации получаем, что для набора (1,1,0)* $\lambda(X \to (Y \to Z)) = 0$. *Таким образом, для одних конкретизаций значение формулы истинности равно 1, для других — 0. Это означает, что формула выполнима и опровержима.*

Упражнение 3 *Дать классификацию формул по таблицам истинности и посредством аналитических рассуждений.*

1. $X \to (Y \to Z)$	*7.* $(X \to Y) \to Z$
2. $X \to (Y \vee Z)$	*8.* $(X \to Y) \vee Z$
3. $X \to (Y \cdot Z)$	*9.* $(X \to Y) \cdot Z$
4. $(X \cdot Y) \to Z$	*10.* $(X \vee Y) \to Z$

Некоторые тавтологии алгебры высказываний

1. $X \vee \neg X$ — закон исключенного третьего;
2. $\neg(X \cdot \neg X)$ — закон отрицания противоречия;
3. $\neg\neg X \sim X$ — закон двойного отрицания;
4. $X \to X$ — закон тождества;
5. $(X \to Y) \sim (\neg Y \to \neg X)$ — закон контрапозиции;
6. $(X \to Y) \cdot (Y \to Z) \to (X \to Z)$ — правило цепного заключения.

1.5 Нормальные формы формул алгебры высказываний. Предварительные сведения. Совершенные нормальные формы. Способы приведения формулы к нормальной форме

Предварительные сведения

Для всякой формулы F, содержащей символы логических операций, можно получить равносильную ей формулу, содержащую из логических операций только $\neg$, $\vee$, $\cdot$. Причем операция $\neg$ относится непосредственно к переменной. Требуемая формула получается преобразованием исходной с использованием равносильностей

- $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$ — законы Де Моргана;
- $X \cdot (Y \vee Z) = X \cdot Y \vee X \cdot Z$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
- $X \vee (Y \cdot Z) = (X \vee Y) \cdot (X \vee Z)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;

а также выражением операций $\to$ и $\sim$ через $\neg$, $\vee$, $\cdot$:

- $X \to Y = \neg X \vee Y$,
- $X \sim Y = (X \to Y) \cdot (Y \to X) = \neg X \cdot \neg Y \vee X \cdot Y$.

Конъюнктивным одночленом K от переменных $X_1, \ldots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных, взятых как с отрицанием, так и без него. При этом в выражении может быть любое количество экземпляров переменных, часть переменных может отсутствовать. Примеры конъюнктивных одночленов от переменных X_1, X_2, X_3:

$$X_1,\ X_1 \cdot X_1,\ X_1 \cdot \neg X_1,\ X_1 \cdot \neg X_2 \cdot X_3 \text{ и т.д.}$$

Дизъюнктивным одночленом D от переменных $X_1, \ldots, X_n$ называется дизъюнкция этих переменных с теми же условиями на операции отрицания и количество экземпляров переменных, что и в конъюнктивном одночлене.

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов $K_1 \vee \ldots \vee K_p$ (одночлены могут входить в состав дизъюнкции в любом количестве экземпляров). Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $D_1 \cdot \ldots \cdot D_q$ (одночлены могут входить в состав дизъюнкции в любом количестве экземпляров). Для единообразия терминологии нормальными формами будем называть и одиночные многочлены. Нормальная форма, равносильная данной формуле F, называется нормальной формой формулы F.

Совершенные нормальные формы

Одночлен $K(X_1, \dots, X_n)$ или $D(X_1, \dots, X_n)$ называется совершенным, если для каждого $i = 1, \dots, n$ в его состав входит либо X_i, либо $\neg X_i$. Нормальная форма называется совершенной, если в ее состав входят только совершенные одночлены.

Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ). Обозначим:

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{при } \alpha = 1; \\ \neg X, & \text{при } \alpha = 0 \end{cases} .$$

Возможность выражения формулы F через совершенные одночлены K_i определяется следующими утверждениями.

Теорема 2 *Всякая формула F алгебры высказываний представима в виде*

$$\text{\textit{СДНФ}}_F(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n} , \qquad (4)$$

где дизъюнкция берется по всем возможным сочетаниям значений индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Теорема 3 *Пусть формула F не тождественно ложная. Тогда F представляется в виде (4) единственным образом с точностью до перестановки переменных в конъюнкции и перестановки дизъюнктивных одночленов.*

Равенство (4) может быть записано в виде

$$\text{СДНФ}_F(X_1, \dots, X_n) = \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \dots \alpha_n): \\ F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1}} F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n} . \qquad (5)$$

Совершенные конъюнктивные нормальные формы (СКНФ). Обозначим:

$$X^\beta = \begin{cases} \neg X, & \text{при } \beta = 1; \\ X, & \text{при } \beta = 0 \end{cases} .$$

Возможность выражения формулы F через совершенные одночлены D_i определяется следующими утверждениями.

Теорема 4 *Всякая формула F алгебры высказываний представима в виде*

$$\textit{СКНФ}_F(X_1,\ldots,X_n) = \bigwedge_{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} \Big(F(\beta_1,\ldots,\beta_n)\vee X_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee X_n^{\beta_n}\Big)\ , \qquad (6)$$

где конъюнкция $\bigwedge$ берется по всем возможным сочетаниям значений индексов $\beta_1,\ldots,\beta_n$.

Теорема 5 *Пусть формула F не тождественно истинная. Тогда F представляется в виде (6) единственным образом с точностью до перестановки переменных в дизъюнкции и перестановки конъюнктивных одночленов.*

Равенство (6) может быть записано в виде

$$\text{СКНФ}_F(X_1,\ldots,X_n) = \bigwedge_{\substack{(\beta_1,\ldots,\beta_n):\\ F(\beta_1,\ldots,\beta_n)=0}} \Big(F(\beta_1,\ldots,\beta_n)\vee X_1^{\beta_1}\vee\ldots\vee X_n^{\beta_n}\Big)\ . \qquad (7)$$

Приведение формулы к совершенной нормальной форме

Совершенная нормальная форма может быть получена по таблице истинности формулы F или посредством аналитических преобразований формулы F.

Рассмотрим табличный способ получения совершенной нормальной формы.

Пример 11 *Пусть формула F задана таблицей*

Таблица 11

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для получения СДНФ (в соответствии с выражением 5) дополним таблицу столбцом с конъюнктивными одночленами в строках с единичным значением формулы:

Таблица 12

X	Y	Z	F	K_i
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\neg X \cdot \neg Y \cdot Z$
0	1	0	1	$\neg X \cdot Y \cdot \neg Z$
0	1	1	1	$\neg X \cdot Y \cdot Z$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$X \cdot \neg Y \cdot Z$
1	1	0	1	$X \cdot Y \cdot \neg Z$
1	1	1	1	$X \cdot Y \cdot Z$

Выписывая дизъюнкцию всех этих одночленов получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \text{СДНФ}_F(X,Y,Z) \;&=\; \neg X \cdot \neg Y \cdot Z \;\vee\; \neg X \cdot Y \cdot \neg Z \;\vee \\ &\vee \neg X \cdot Y \cdot Z \;\vee\; X \cdot \neg Y \cdot Z \;\vee \\ &\vee X \cdot Y \cdot \neg Z \;\vee\; X \cdot Y \cdot Z\ . \end{aligned}$$

Для получения СКНФ (в соответствии с выражением (7)) дополним таблицу столбцом с дизъюнктивными одночленами в строках с нулевым значением формулы:

Таблица 13

X	Y	Z	F	D_i
0	0	0	0	$X \vee Y \vee Z$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\neg X \vee Y \vee Z$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Выписывая конъюнкцию всех этих одночленов получаем требуемое:

$$\text{СКНФ}_F(X,Y,Z) = (X \vee Y \vee Z) \cdot (\neg X \vee Y \vee Z)\ .$$

Аналитический способ получения СДНФ заключается в применении следующих правил.

1. Выразить операции $\to$ и $\sim$ через $\neg$, $\vee$, $\cdot$ согласно соотношениям

$$X \to Y = \neg X \vee Y,\ X \sim Y = (\neg X \vee Y) \cdot (\neg Y \vee X)\ .$$

2. Используя соотношения

$$\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y,\ \neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y\ ,$$

   преобразовать выражение так, чтобы операции $\neg$ относились непосредственно к переменным.

3. Используя соотношение

$$X \cdot (Y \vee Z) = X \cdot Y \vee X \cdot Z\ ,$$

   преобразовать формулу к дизъюнкции конъюктивных одночленов.

4. При наличии двойного отрицания преобразовать выражение согласно соотношению $\neg\neg X = X$.

5. Дополнить конъюктивные одночлены недостающими переменными или их отрицаниями (довести до вида совершенных одночленов) умножением на $1 = W \vee \neg W$, где W — недостающая переменная.

Пример 12 *Следуя [4], задача 2.1 л) получим СДНФ формулы*

$$\neg(X \vee Z) \cdot (X \to Y)\ .$$

Имеем: $\neg(X \vee Z) \cdot (X \to Y) = \neg(X \vee Z) \cdot (\neg X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Z \cdot (\neg X \vee Y) =$
$= \neg X \cdot \neg Z \cdot \neg X \vee \neg X \cdot \neg Z \cdot Y = \neg X \cdot \neg Z \vee \neg X \cdot \neg Z \cdot Y.$
Выражение $\neg X \cdot \neg Z \cdot Y$ *представляет собой совершенный дизъюнктивный одночлен. Преобразуем выражение* $\neg X \cdot \neg Z$ *по правилу 5:*
$\neg X \cdot \neg Z = \neg X \cdot \neg Z \cdot 1 = \neg X \cdot \neg Z \cdot (Y \vee \neg Y) = \neg X \cdot \neg Z \cdot Y \vee \neg X \cdot \neg Z \cdot \neg Y.$
Окончательно получаем

$$\textit{СДНФ}_{\neg(X \vee Z)\cdot(X \to Y)} = \neg X \cdot \neg Y \cdot \neg Z \vee \neg X \cdot Y \cdot \neg Z\ .$$

Упражнение 4 *([1], упр.2.33, 2.34) Найти СДНФ данных формул посредством преобразований.*
1) $X \vee Y$*; 2)* $\neg(X \vee Y) \cdot (X \to Y)$*; 3)* $(X \sim Y) \cdot \neg(Z \to T)$*;*
4) $X \vee Y \cdot Z$*; 5)* $X \cdot Y \cdot X \cdot Z \vee X \cdot T$*; 6)* $\neg X \cdot Y \vee Y \cdot Z \cdot T \vee \neg X \cdot Y \cdot Z \cdot T$.

Упражнение 5 *Найти СДНФ и СКНФ формул, заданных таблично.*

1) Таблица 14

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2) Таблица 15

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3) Таблица 16

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4) Таблица 17

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

5) Таблица 18

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

6) Таблица 19

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

7) Таблица 20

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

8) Таблица 21

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

9) Таблица 22

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

10) Таблица 23

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

11) Таблица 24

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

12) Таблица 25

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

13) Таблица 26

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

14) Таблица 27

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

15) Таблица 28

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

16) Таблица 29

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

17) Таблица 30

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

18) Таблица 31

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

19) Таблица 32

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

20) Таблица 33

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

21) Таблица 34

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

22) Таблица 35

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

23) Таблица 36

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

24) Таблица 37

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

25) Таблица 38

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

26) Таблица 39

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

27) Таблица 40

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

28) *Таблица 41*

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

29) *Таблица 42*

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

30) *Таблица 43*

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1.6 Логическое следование формул. Определение. Способы проверки логического следования. Нахождение следствий из данных посылок. Нахождение посылок данной формулы

В математической логике принято следующее определение логического следования.

Определение 3 *Пусть* $F_1(X_1, \dots, X_n)$, $\dots$, $F_m(X_1, \dots X_n)$; $H(X_1, \dots, X_n)$ *— некоторые формулы. Говорят, что формула* H *есть логическое следствие формул* $F_1, \dots, F_m$*, если для каждого набора значений переменных* $X_1, \dots, X_n$*, на котором каждая из формул* $F_1, \dots, F_m$ *принимает значение истина, формула* H *также принимает значение истина. Формулы* $F_1, \dots, F_m$ *при этом называются посылками.*

Определению соответствует запись $F_1, \dots, F_m \models H$.

Определение можно переформулировать следующим образом. Будем говорить, что формула $H(X_1, \dots, X_n)$ есть логическое следствие формул $F_1(X_1, \dots, X_n)$, $\dots$, $F_m(X_1, \dots X_n)$ если для любых высказываний $A_1, \dots, A_n$ из выполнения условий $\lambda(F_1(A_1, \dots, A_n)) = 1$, $\dots$, $\lambda(F_m(A_1, \dots, A_n)) = 1$ следует выполнение условия $\lambda(H(A_1, \dots, A_n)) = 1$.

Нахождение следствий из данного набора посылок

Рассмотрим следующую задачу. Дано: набор формул $F_1, \dots, F_m$. Требуется получить все формулы (с точностью до равносильных преобразований), являющиеся логическим следствием формул данного набора.

Алгоритм решения задачи:

1. Найти $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_m$.

2. Найти все совершенные дизъюнктивные одночлены $D_1, \dots, D_k$, входящие в

состав формулы F.
3. Составить всевозможные конъюнкции одночленов $D_1, \ldots, D_k$ (в том числе одиночные одночлены). Получившееся множество формул исчерпывает (с точностью до равносильных преобразований) состав логических следствий посылок $F_1, \ldots, F_m$.

Рассмотрим пример табличного решения задачи нахождения следствий из данного набора посылок.

Пример 13 *Пусть* $F_1 = X \to (Y \vee Z)$, $F_2 = Z \to Y$. *Требуется найти множество формул* $\mathcal{H} = \{H : F_1, F_2 \models H\}$.

Составим таблицу истинности формул F_1, F_2 *и их конъюнкции*

Таблица 44

X	Y	Z	$Y \vee Z$	F_1 $X \to (Y \vee Z)$	F_2 $Z \to Y$	$F_1 \cdot F_2$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

и дополним ее столбцом с дизъюнктивными одночленами, входящими в состав формулы $F_1 \cdot F_2$, *пронумеровав их в порядке прочтения столбца сверху вниз:*

Таблица 45

X	Y	Z	$Y \vee Z$	F_1 $X \to (Y \vee Z)$	F_2 $Z \to Y$	$F_1 \cdot F_2$	D	
0	0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	1	0	0	$X \vee Y \vee \neg Z$	D_1
0	1	0	1	1	1	1		
0	1	1	1	1	1	1		
1	0	0	0	0	1	0	$\neg X \vee Y \vee Z$	D_2
1	0	1	1	1	0	0	$\neg X \vee Y \vee \neg Z$	D_3
1	1	0	1	1	1	1		
1	1	1	1	1	1	1		

Краткая запись множества $\mathcal{H}$ *имеет вид:*

$$\mathcal{H} = \{D_1, D_2, D_3; D_1 \cdot D_2, D_1 \cdot D_3, D_2 \cdot D_3; D_1 \cdot D_2 \cdot D_3\}\ .$$

Развернутая запись имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \;=\; &\{X \vee Y \vee \neg Z,\ \neg X \vee Y \vee Z,\ \neg X \vee Y \vee \neg Z;\\ &(X \vee Y \vee \neg Z)\cdot(\neg X \vee Y \vee Z),\ (X \vee Y \vee \neg Z)\cdot(\neg X \vee Y \vee \neg Z),\\ &(\neg X \vee Y \vee Z)\cdot(\neg X \vee Y \vee \neg Z);\\ &(X \vee Y \vee \neg Z)\cdot(\neg X \vee Y \vee Z)\cdot(\neg X \vee Y \vee \neg Z)\}\ .\end{aligned}$$

Нахождение посылок для данного следствия

Формулировка задачи. Дано: некоторая формула H. Требуется найти полный набор $\mathcal{F}$ ее посылок $F_1, \ldots, F_m$.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Найти СКНФ$_H$.
2. Найти все совершенные дизъюнктивные одночлены, отсутствующие в H.
3. Составить конъюнкции формулы H с найденными одночленами по одному, по два и т.д.

Пример 14 *Пусть $H = \neg(Y \vee Z)$. Найти полный набор посылок как формул с тремя переменными.*

Табличное решение. Составим таблицу истинности формулы H

Таблица 46

X	Y	Z	$Y \vee Z$	H $\neg(Y \vee Z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

и дополним ее столбцом с указанием отсутствующих в СКНФ$_H$ одночленов (в строках с единичным значением в столбце H), нумеруя эти одночлены в порядке прочтения столбца сверху вниз:

Таблица 47

X	Y	Z	$Y \vee Z$	H $\neg(Y \vee Z)$	D	
0	*0*	*0*	*0*	*1*	$X \vee Y \vee Z$	D_1
0	*0*	*1*	*1*	*0*		
0	*1*	*0*	*1*	*0*		
0	*1*	*1*	*1*	*0*		
1	*0*	*0*	*0*	*1*	$\neg X \vee Y \vee Z$	D_2
1	*0*	*1*	*1*	*0*		
1	*1*	*0*	*1*	*0*		
1	*1*	*1*	*1*	*0*		

Краткая запись множества $\mathcal{F}$ имеет вид:

$$\mathcal{F} = \{H \cdot D_1, H \cdot D_2;\ H \cdot D_1 \cdot D_2\}\ .$$

Развернутая запись множества $\mathcal{F}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;=\; &\{\neg(Y \vee Z) \cdot (X \vee Y \vee Z), \neg(Y \vee Z) \cdot (\neg X \vee Y \vee Z);\\ &\neg(Y \vee Z) \cdot (X \vee Y \vee Z) \cdot (\neg X \vee Y \vee Z)\}\ .\end{aligned}$$

Проверка утверждений вида $F_1, \ldots, F_m \models H$

Утверждение $F_1, \ldots, F_m \models H$ может быть проверено следующим образом.
1) По таблицам истинности формул $F_1, \ldots, F_m, H$.
2) Аналитическим способом посредством рассуждений по схеме "от противного".
Способ проверки утверждения $F_1, \ldots, F_m \models H$ по таблицам истинности заключается в непосредственной проверке выполнения определения отношения следования.

Упражнение 6 *По таблицам истинности формул*

$$(X \vee Y) \cdot \neg Z,\ (X \to Y) \vee Z,\ X \vee (\neg Y \cdot Z), (X \vee Y) \to Z$$

определить, какие из формул являются следствиями других.

Аналитический способ проверки логического следования

$$F_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, \ldots, X_n) \models H(X_1, \ldots, X_n)$$

заключается в следующем. Предположим, что рассматриваемое следование неверно. То есть для некоторого распределения набора значений $\lambda(X_1), \ldots, \lambda(X_n)$ выполнено следующее:

$$\lambda(F_1) = 1, \ldots, \lambda(F_m) = 1 \text{ и } \lambda(H) = 0\ .$$

Если такой набор значений каким-то образом удается найти, то сделанное предположение верно, т.е. $F_1, \ldots, F_m \not\models H$. Если сделанное предположение приводит к какому-либо противоречию, то это предположение неверно, т.е. $F_1, \ldots, F_m \models H$.

Пример 15 *([4] с.61 пример 6.18). Выполняется ли логическое следование*

$$X \to (\neg Y \vee Z),\ \neg X,\ Y \to Z \models X \vee Z\ ? \tag{8}$$

Допустим, что соотношение (8) неверно. Т.е. пусть для некоторого набора $\lambda(X)$, $\lambda(Y)$, $\lambda(Z)$ *выполнено:*

$$\lambda(X \to (\neg Y \vee Z)) = 1,\ \lambda(\neg X) = 1,\ \lambda(Y \to Z) = 1;\ \lambda(X \vee Z) = 0. \tag{9}$$

Выясним, существует ли такой набор $\lambda(X)$, $\lambda(Y)$, $\lambda(Z)$. *Соотношения (9) принимают вид:*

$$\begin{aligned}&\lambda(X) \to (\neg\lambda(Y) \vee \lambda(Z)) = 1,\ \neg\lambda(X) = 1,\\ &\lambda(Y) \to \lambda(Z) = 1;\ \lambda(X) \vee \lambda(Z) = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Из соотношения $\lambda(X) \vee \lambda(Z) = 0$ *выводим согласно таблице истинности дизъюнкции, что* $\lambda(X) = 0$ *и* $\lambda(Z) = 0$. *Подставляя* $\lambda(X) = 0$ *и* $\lambda(Z) = 0$ *в (10), получим:*

$$0 \to (\neg\lambda(Y) \vee 0) = 1,\ \neg 0 = 1,\ \lambda(Y) \to 0 = 1;\ 0 \vee 0 = 0. \tag{11}$$

Преобразуя соотношения (11) согласно таблицам истинности операций дизъюнкции, импликации и отрицания, получим:

$$1 = 1,\ 1 = 1,\ \lambda(Y) \to 0 = 1;\ 0 = 0. \tag{12}$$

Соотношения первое, второе, четвертое в (12) тождественно истинны. Соотношение $\lambda(Y) \to 0 = 1$ *неопределенно. Таким образом, вопрос выполнимости соотношения (8) сводится к вопросу существования/несуществования значения* $\lambda(Y)$ *такого, что* $\lambda(Y) \to 0 = 1$. *На основании таблицы истинности операции импликации выводим, что последнее соотношение будет выполнено при* $\lambda(Y) = 0$. *Таким образом, при* $\lambda(X) = 0$, $\lambda(Y) = 0$, $\lambda(Z) = 0$ *выполнено соотношение (9), представляющее собой отрицание определения логического следования. Т.е.*

$$X \to (\neg Y \vee Z),\ \neg X,\ Y \to Z \not\models X \vee Z\ .$$

Пример 16 *Определить, выполняется ли следование*

$$X \to (\neg Y \vee Z),\ \neg X,\ Y \to Z \models \neg X \vee \neg Z\ . \tag{13}$$

Решение. Следование (13) не выполнено, если существует набор $\lambda(X)$, $\lambda(Y)$, $\lambda(Z)$ *такой, что*

$$\lambda(X \to (\neg Y \vee Z)) = 1,\ \lambda(\neg X) = 1,\ \lambda(Y \to Z) = 1;\ \lambda(\neg X \vee \neg Z) = 0\ . \tag{14}$$

Перепишем соотношения (14) в виде:

$$\begin{gathered} \lambda(X) \to (\neg\lambda(Y) \vee \lambda(Z)) = 1,\ \neg\lambda(X) = 1, \\ \lambda(Y) \to \lambda(Z) = 1; \neg\lambda(X) \vee \neg\lambda(Z) = 0\ . \end{gathered} \tag{15}$$

Из второго соотношения в (15) выводим: $\lambda(X) = 0$. *Подставляя полученно значение в четвертое из соотношений (15) и преобразуя его, получим в итоге противоречивое соотношение 1=0:*

$$\neg\lambda(X) \vee \neg\lambda(Z) = 0\ , \neg 0 \vee \neg\lambda(Z) = 0\ , 1 \vee \neg\lambda(Z) = 0\ , 1 = 0\ .$$

Таким образом, исходное предположение приводит к противоречию, и значит, это предположение неверно. Т.е. следование (13) выполняется.

2 Булевы функции

2.1 Определение булевой функции. Булевы функции одного и двух переменных. Геометрическое представление булевых функций. Выражение булевых функций через основные логические операции

Определение 4 *Пусть $E = \{Л, И\}$ — двухэлементное множество, элементы которого будем называть "истина", "ложь";*
$E^n = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ раз}}$.
Булевой функцией n переменных называется функция $f : E^n \to E$.

При изучении свойств булевых функций удобно сопоставить элементу Л число 0, элементу И — число 1. При таком сопоставлении E^n представляется как куб в пространстве R^n.

На кубе E^n функция f однозначно определяется указанием множества единичного уровня $N_f = \{x \in E^n : f(x) = 1\}$. Также функция может быть задана указанием своего графика как вершин $(n+1)$-мерного куба. Первичный способ задания функции — табличный (таблица значений функции). Две функции равны, если они принимают одинаковые значения на одинаковых наборах значений аргументов. Среди функций одного переменного выделяют функцию $f(x) = x$ — тождественное отображение. Среди функций n переменных выделяются функции: $f(x) = 0$ — константа 0, $f(x) = 1$ — константа 1 (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$).

Среди функций одного переменного выделяется также функция отрицания, определяемая таблицей:

Таблица 48

x	$f(x) = \neg x$
0	1
1	0

Среди функций двух переменных выделяются функции, задаваемые следующими таблицами истинности

Таблица 49

$x\ y$	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \vert y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
00	0	0	1	1	1	1	0
01	0	1	1	0	1	0	1
10	0	1	0	0	1	0	1
11	1	1	1	1	0	0	0

и называемые соответственно: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, штрих Шеффера, стрелка Пирса, сложение по модулю два. Из них первые четыре совпадают с одноименными функциями алгебры высказываний.

Из комбинаторных соображений следует, что существует $2^{(2^n)}$ булевых функций n переменных. Для $n = 2$ количество функций равно 16 и объединенная таблица их значений имеет следующий вид:

Таблица 50

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Булева функция может быть задана, помимо таблицы значений, выражением, составленным из обозначений переменных, указанных операций и скобок, определяющих порядок операций.

Упражнение 7 *Составить таблицы значений всех функций одной переменной.*

Упражнение 8 *Проверить следующие равенства, составив таблицы истинности функций правой и левой части.*

1. $x \cdot x = x$
2. $x \vee x = x$
3. $x \cdot 1 = x$
4. $x \cdot 0 = 0$
5. $x \vee 1 = 1$
6. $x \vee 0 = x$
7. $x \cdot y = \neg(\neg x \vee \neg y)$

8. $x \vee y = \neg(\neg x \cdot \neg y)$

9. $x \vee y = (x \to y) \to y$

10. $x \vee y = \neg x \to y$

11. $x \to y = \neg x \vee y$

12. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \cdot (y \to x)$

Упражнение 9 *Построить графики функций* $f_0, \ldots, f_{15}$.

2.2 Булевы алгебры. Определение. Примеры

Определение 5 *Алгеброй Булля называется множество, содержащее элементы 0 и 1, на котором определены операции* $\cdot$, $\vee$, $\neg$, *удовлетворяющие соотношениям:*

1) $\neg\neg x = x$	*7)* $x \vee (y \cdot z) = y \vee x \cdot z$	*13)* $x \vee \neg x = 1$
2) $x \cdot y = y \cdot x$	*8)* $x \vee (x \cdot z) = x$	*14)* $x \cdot x = x$
3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$	*9)* $x \cdot (x \vee z) = x$	*15)* $x \cdot \neg x = 0$
4) $x \vee y = y \vee x$	*10)* $\neg(x \vee y) = \neg x \cdot \neg y$	*16)* $x \cdot 1 = x$
5) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$	*11)* $\neg(x \cdot y) = \neg x \vee \neg y$	*17)* $x \vee 0 = x$
6) $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z)$	*12)* $x \vee x = x$	

Примеры алгебр Булля.

Пример 17 *Очевидно, множество высказываний с операциями конъюнкции, дизъюнкции, отрицания является алгеброй Булля.*

Пример 18 *Пусть* $\mathbf{M}$ *— некоторое множество,* $\mathcal{M}$ *— класс всех его подмножеств. Определим на* $\mathcal{M}$ *операции* $\cdot$, $\vee$, $\neg$ *следующим образом:*

$$\begin{aligned} M' \cdot M'' &= M' \cap M'' \\ M' \vee M'' &= M' \cup M'' \\ \neg M &= M^c \end{aligned}$$

где $M, M', M'' \subset \mathbf{M}$, $\cap$, $\cup$, $\ldots^c$ *— теоретико-множественные операции объединения, пересечения, дополнения (до* $\mathbf{M}$*) соответственно. Константе 1 в соотношениях 1)–17) поставим в соответствие множество* $\mathbf{M}$, *константе 0 — пустое множество. Соотношения 1)–17) выполняются в силу определения операций объединения, пересечения, дополнения.*

Упражнение 10 *Пусть $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, где A — некоторое число. Пусть на M определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что множество M с указанными операциями является булевой алгеброй.*

Упражнение 11 *Пусть n — натуральное число, M_n — множество его положительных делителей. Пусть на M_n определены операции*

$$x \cdot y = \text{НОД}(x, y),\ x \vee y = \text{НОК}(x, y),\ \neg x = n/x,$$

константе Л *сопоставлено число 1, константе* И *— число n. Показать, что множество M_n с указанными операциями является булевой алгеброй.*

Упражнение 12 *Для указанных множеств с введенными операциями проверить выполнение указанных свойств.*

1. *Пусть $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, где A — некоторое число. Пусть на M определены операции*

   $$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

   константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.*

2. *Пусть $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, где A — некоторое число. Пусть на M определены операции*

   $$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

   константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение: $X \cdot (X \vee Y) = X$.*

3. *Пусть $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, где A — некоторое число. Пусть на M определены операции*

   $$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

   константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.*

4. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

5. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

6. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

7. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

8. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

9. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

10. *Пусть* $M = \{x:\ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

11. *Пусть* $M = \{x:\ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

12. *Пусть* $M = \{x:\ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

13. *Пусть* $M = \{x:\ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

14. *Пусть* $M = \{x:\ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

15. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

16. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

17. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

18. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

19. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число A. Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

20. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

21. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

22. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

23. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

24. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

25. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

26. *Пусть* $M = \{x :\ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

27. *Пусть* $M = \{x :\ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

28. *Пусть* $M = \{x :\ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

29. *Пусть* $M = \{x :\ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

30. *Пусть* $M = \{x :\ 0 \le x \le A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

31. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

32. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

33. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

34. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

35. *Пусть* $M = \{x : \ 0 \leq x \leq A\}$, *где* A — *некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И — *число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

36. Пусть $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

37. Пусть $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

38. Пусть $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $X \cdot (X \vee Y) = X$.

39. Пусть $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \vee Y) = \neg X \cdot \neg Y$.

40. Пусть $M = \{x : \ 0 \le x \le A\}$, *где* A *— некоторое число. Пусть на* M *определены операции*

$$x \cdot y = min\{x, y\},\ x \vee y = max\{x, y\},\ \neg x = A - x,$$

константе Л *сопоставлено число 0, константе* И *— число* A. *Показать, что выполнено соотношение* $\neg(X \cdot Y) = \neg X \vee \neg Y$.

2.3 Полином Жегалкина

Обозначим $\oplus$ операцию, определяемую следующей таблицей:

Таблица 51

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Операция $\oplus$ называется сложением по модулю 2.

Определение 6 *Полиномом Жегалкина n переменных называется выражение вида*

$$\begin{aligned} P(x_1, \ldots, x_n) &= a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n \oplus \\ &\oplus a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_{1n} \cdot x_1 \cdot x_n \oplus \\ &\oplus a_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 \oplus \ldots \oplus a_{2n} \cdot x_1 \cdot x_n \oplus \\ &\vdots \\ &\oplus a_{12\ldots n} x_1 \ldots x_n \end{aligned}$$

Значимость полиномов Жегалкина определяется следующей теоремой.

Теорема 6 *(Теорема Жегалкина)*
Каждая булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина.

Найдем количество всевозможных полиномов Жегалкина n переменных. Число членов вида $x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}$ равно количеству всех s-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, где $s = 0, \ldots, n$, т.е. 2^n. Поскольку каждая константа $a_{i_1, \ldots, i_s}$ может быть равна либо 0, либо 1, то всего полиномов будет 2^{2^n}. Поскольку количество полиномов от n переменных совпадает с количеством функций от n переменных, то каждая функция выражается в виде полинома Жегалкина единственным образом.

Булева функция может быть представлена в виде полинома Жегалкина способом неопределенных коэффициентов или аналитическим способом.

Способ неопределенных коэффициентов заключается в поэтапном определении коэффициентов полинома, исходя из значений переменных и значения функции при этих значениях переменных. Вычисление коэффициентов оформляется в виде таблицы значений функции, дополненной столбцами, в первом из которых записывается значение полинома как некоторой комбинации его коэффициентов, во втором — значения коэффициентов.

Пример 19 *Представление отрицания полиномом Жегалкина*

Таблица 52

x	$\neg x$	$=$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x$	
0	*1*		a_0	$a_0 = 1$
1	*0*		$a_0 \oplus a_1$	$a_1 = 1$

Таким образом,

$$\neg x = 1 \oplus x \ .$$

Пример 20 *Представление дизъюнкции полиномом Жегалкина*

Таблица 53

x	y	$x \vee y$	$=$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y \oplus a_{12} \cdot x \cdot y$	
0	*0*	*0*		a_0	$a_0 = 0$
0	*1*	*1*		$a_0 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
1	*0*	*1*		$a_0 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
1	*1*	*1*		$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$

Таким образом,

$$x \vee y = x \oplus y \oplus x \cdot y \ .$$

Пример 21 *Представление импликации полиномом Жегалкина*

Таблица 54

x	y	$x \to y$	$=$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y \oplus a_{12} \cdot x \cdot y$	
0	*0*	*0*		a_0	$a_0 = 1$
0	*1*	*1*		$a_0 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
1	*0*	*1*		$a_0 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
1	*1*	*1*		$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$

Таким образом,

$$x \to y = 1 \oplus x \oplus x \cdot y \ .$$

Пример 22 *Представление эквивалентности полиномом Жегалкина*

Таблица 55

x	y	$x \leftrightarrow y$	$=$	$a_0 \oplus a_1 \cdot x \oplus a_2 \cdot y \oplus a_{12} \cdot x \cdot y$	
0	*0*	*1*		a_0	$a_0 = 1$
0	*1*	*0*		$a_0 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
1	*0*	*0*		$a_0 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
1	*1*	*1*		$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 0$

Таким образом,

$$x \leftrightarrow y = 1 \oplus x \oplus y \ .$$

Аналитический способ заключается в представлении функции в виде суперпозиции логических связок, для которых уже известно представление полиномом Жегалкина, и далее перемножении этих полиномов.

Упражнение 13 *Указанные функции представить полиномом Жегалкина способом неопределенных коэффициентов и аналитически:*
1) $(x \vee \neg y) \cdot (x \vee z) \to y$*; 2)* $(x \to \neg y) \cdot (x \vee z) \vee y$*;*
3) $(x \vee \neg y) \to (x \vee z) \cdot y$*; 4)* $(x \vee \neg y) \cdot (x \vee z) \cdot y$*; 5)* $(x \vee \neg z) \to x \cdot y$*.*

2.4 Системы булевых функций. Полные системы функций. Специальные классы. Теорема Поста о полноте

Определение 7 *Пусть* $g_1 : E^{m_1} \to E, \ldots, g_n : E^{m_n} \to E$*,* $f : E^n \to E$*. Суперпозицией функций*

$$g_1(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1), \ldots, g_n(y_1^n, \ldots, y_{m_n}^n)$$

в функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

называется функция

$$F(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1; \ldots; y_1^n, \ldots, y_{m_n}^n) =$$
$$= f(g_1(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1); \ldots; g_n(y_1^n, \ldots, y_{m_n}^n)) \ ,$$

получающаяся из функции f *подстановкой вместо аргументов* $x_1, \ldots, x_n$ *(всех или части из них) соответственно функций* $g_1(y_1^1, \ldots, y_{m_1}^1)$*,* $\ldots$*,* $g_n(y_1^n, \ldots, y_{m_n}^n)$*.*

Пример 23 *Пусть* $g(u, v) = u \vee v$*;* $h(t) = \neg t$*. Суперпозицией* g *в* h *будет функция* $F(u, v) = \neg(u \vee v)$*.*

Упражнение 14 *Найти суперпозиции функций* g_1*,* g_1 *в функцию* f*:*

1) $g_1 = u \cdot v, \quad g_2 = \neg r \wedge t; \quad f = x_1 \to x_2$
2) $g_1 = u \cdot v, \quad g_2 = \neg r \wedge t; \quad f = x_1 \to x_2$
3) $g_1 = u \cdot v, \quad g_2 = \neg u \wedge v; \quad f = x_1 \cdot x_2$
4) $g_1 = \neg u \cdot v, \quad g_2 = u \wedge \neg v; \quad f = x_1 \cdot x_2$

Полные системы булевых функций

Определение 8 *Система булевых функций называется полной, если всякая булева функция представима в виде суперпозиций функций этой системы.*

Пример 24 *Следующие системы являются полными:*

$$1)\ \{\vee, \cdot, \neg\},\quad 2)\ \{\oplus, \cdot, \neg\},\quad 3)\ \{\vee, \neg\},\quad 4)\ \{\cdot, \neg\}\ .$$

Признак полноты систем функций дается следующей теоремой.

Теорема 7 *Пусть даны две системы функций:*

$$\mathcal{P} = \{f_1, f_2, \ldots\}\,, \mathcal{Q} = \{g_1, g_2, \ldots\}\,.$$

Если система $\mathcal{P}$ полная и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы $\mathcal{Q}$, то система $\mathcal{Q}$ является полной.

Примеры применения теоремы.

Пример 25 *Система $\{\neg x,\ x_1 \cdot x_2\}$ является полной.*
Доказательство. Полагаем $\mathcal{P} = \{\neg x, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$, $\mathcal{Q} = \{\neg x, x_1 \cdot x_2\}$. Выражение функций $\neg x$, $x_1 \cdot x_2$ через функции системы $\mathcal{Q}$ очевидно. Для функции $x_1 \vee x_2$ имеем: $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg x_1 \cdot \neg x_2)$.

Пример 26 *Система $\{\neg x, x_1 \vee x_2\}$ является полной.*
Доказательство аналогично предыдущему примеру.

Пример 27 *Система $\{0, 1, \neg x,\ x_1 \cdot x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$ является полной.*
Доказательство. Полагаем $\mathcal{P} = \{\neg x,\ x_1 \cdot x_2\}$, $\mathcal{Q} = \{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \oplus x_2\}$. Имеем: $x_1 \oplus 1 = \neg x_1$, остальное очевидно.

Всякая булева функция может быть выражена в виде формулы через элементарные функции $\neg x$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$. То есть система функций $\{\neg x,\ x_1 \cdot x_2,\ x_1 \vee x_2\}$ полная (всякая функция представляется суперпозицией функций этой системы). Такого рода свойством обладают и некоторые другие системы элементарных функций.

Специальные классы булевых функций

Определение 9 *Класс булевых функций называется собственным, если он не пуст и не совпадает с классом всех булевых функций. Класс называется замкнутым (классом Поста), если он вместе с функциями содержит любую их суперпозицию.*

Определение 10 *Говорят, что функция* $f : E^n \to E$ *сохраняет* 0, *если* $f(0,\ldots,0) = 0$.

Класс функций, сохраняющих 0, обозначается P_0.

Пример 28 *Функции* $0, x, x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2, x_1 \oplus x_2 \in P_0$. *Функции* $1, \neg x \notin P_0$.

Можно показать что класс P_0 содержит 2^{2^n-1} n-местных функций.

Покажем, что класс P_0 замкнутый. Достаточно показать, что функция $\Phi = f(f_1,\ldots,f_m)$ принадлежит классу P_0, если $f, f_1,\ldots,f_m \in P_0$. Имеем:

$$\Phi(0,\ldots,0) = f(f_1(0,\ldots,0),\ldots,f_m(0,\ldots,0)) = f(0,\ldots,0) = 0\ .$$

Определение 11 *Говорят, что функция* $f : E^n \to E$ *сохраняет* 1, *если* $f(1,\ldots,1) = 1$.

Класс функций, сохраняющих 1, обозначается P_1.

Пример 29 *Функции* $1, x, x_1x_2, x_1 + x_2 \in P_1$*;* $0, \neg x \notin P_1$.

Аналогично доказательству замкнутости класса P_0 доказывается, что класс P_1 замкнутый.

Определение 12 *Функция* $h : E^n \to E$ *называется двойственной к функции* $f : E^n \to E$, *если*

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \neg f(\neg x_1,\ldots,\neg x_n)\ .$$

Функция, двойственная к f, *обозначается* f^*. *Функция называется самодвойственной, если* $f = f^*$.

Класс самодвойственных функций обозначается S.

Пример 30 *Получение таблицы значений функции* f^* *по таблице значений функции* f. *Столбец* f^* *получается как запись столбца* f *в обратном порядке и инвертирование его значений.*

Таблица 56

$x_1x_2x_3$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f^*(x_1,x_2,x_3)$
000	*1*	*0*
001	*1*	*1*
010	*0*	*0*
011	*0*	*1*
100	*0*	*1*
101	*1*	*1*
110	*0*	*0*
111	*1*	*0*

Пример 31 *Самодвойственными функциями являются*

$$x,\ \neg x,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\ .$$

Класс S содержит $2^{2^{n-1}}$ функций n переменных.

Введем на E отношение порядка $\leq$, полагая $0 \leq 0$, $0 \leq 1$, $1 \leq 1$. Введем на E^n отношение порядка $\preceq$, полагая для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ выполненным условие $\alpha \preceq \beta$ если и только если $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 13 *Функция $h : E^n \to E$ называется монотонной, если для любых $\alpha, \beta \in E^n$ таких, что $\alpha \preceq \beta$ выполнено $f(\alpha) \leq f(\beta)$.*

Класс монотонных функций обозначается M. Можно показать, что класс M замкнут.

Определение 14 *Функция $f : E^n \to E$ называется линейной, если она представляется в виде*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus a_n \cdot x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ для $i = 1, \ldots n$.

Класс линейных функций обозначается L. Можно показать, что класс L замкнут.

Пример 32 *Класс L содержит функции 0, 1, x, $\neg x$, $x_1 \oplus x_2$. Класс L не содержит функции $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$.*

Упражнение 15 *Для каждой функции f_0–f_{15} определить, к какому классу она относится.*

При описании полных систем булевых функций введенные классы играют главную роль. Совместная характеристика введенных классов дается следующей теоремой.

Теорема 8 *Классы P_0, P_1, S, M, L являются собственными замкнутыми классами.*

(Доказательство см., например, в [4], теорема 11.3.)

Следующая теорема дает описание полных систем.

Теорема 9 *(Теорема Поста о полноте системы замкнутых функций) Система булевых функций $\{f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ является полной, если и только если в этой системе для каждого из классов P_0, P_1, S, M, L найдется функция, ему не принадлежащая.*

(Доказательство см., например, в [4], теорема 11.4.)

Пример 33 *Показать, что система функций* $\{\cdot, \neg\}$ *является полной.*
Решение. Для каждой из функций системы определим ее принадлежнось/непринадлежность классам P_0, P_1, S, M, L. *Результаты сведем в таблицу (принадлежнось показана знаком* $+$, *непринадлежность — знаком* $-$). *На основании таблиц значений функций и определений классов имеем:*

Таблица 57

	P_0	P_1	S	M	L
$\cdot$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\neg$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$

Согласно теореме 9 система $\{\cdot, \neg\}$ *полная.*

Пример 34 *Пример применения теоремы о полноте.*
Покажем, что система функций

$$f_1 = x_1x_2,\ f_2 = 0,\ f_3 = 1,\ f_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

является полной.
Имеем: $f_3 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_2 \notin S$, $f_4 \notin M$, $f_1 \notin L$.
С другой стороны, удаление любой из функций приводит к неполной системе: $\{f_2, f_3, f_4\} \subset L$, $\{f_1, f_3, f_4\} \subset T_1$, $\{f_1, f_2, f_4\} \subset T_0$, $\{f_1, f_2, f_2\} \subset M$.

Можно показать, что верна следующая теорема.

Теорема 10 *Из всякой полной в* P_2 *системы функций* $\mathcal{P}$ *можно выделить полную подсистему, содержащую не более четырех функций.*

Упражнение 16 *Показать, что каждая из систем* $\{\vee, \cdot, \neg\}$, $\{\oplus, \cdot, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ *полная.*

3 Логика предикатов

3.1 Определение. Классификация. Множество истинности

Определение 15 *Пусть: $M_1, \ldots, M_n$ — некоторые множества; $P(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое предложение, обращающееся в высказывание при любой подстановке вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ элементов из $M_1, \ldots, M_n$ соответственно. Тогда предложение $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется n-местным предикатом.*

Переменные $x_1, \ldots, x_n$ называются предметными переменными. Множества $M_1, \ldots, M_n$ называются предметными множествами, элементы множеств $M_1, \ldots, M_n$ называются конкретными предметами. Предметное множество одноместного предиката будем обозначать M.

ОДНОМЕСТНЫЕ ПРЕДИКАТЫ ВЫРАЖАЮТ СВОЙСТВА ПРЕДМЕТОВ
МНОГОМЕСТНЫЕ ПРЕДИКАТЫ ВЫРАЖАЮТ ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРЕДМЕТАМИ

Примеры одноместных предикатов

Пример 35 $P(x) = \{$*В городе x проживает более 500 жителей*$\}$,
М $= \{$*Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск*$\}$.

Пример 36 $P(x) = \{$*В городе x проживает менее 500 жителей*$\}$,
М $= \{$*Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск*$\}$.

Пример 37 $P(x) = \{$*В городе x проживает более 20000 жителей*$\}$,
М $= \{$*Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск*$\}$.

В каждом из примеров предметное множество есть 4-элементное множество, состоящее из *названий* городов Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск.

Предикат есть функция, определенная на $M_1, \ldots, M_n$ и принимающая значение в множестве высказываний. На практике значение истинности получающегося из предиката высказывания часто отождествляют со значением самого предиката. В этом случае предикат рассматривается как функция

$$P : M_1, \ldots, M_n \to \{0, 1\} .$$

Если множества $M_1, \ldots, M_n$ конечны, то предикат, рассматриваемый как функция, может быть задан таблично. Для одноместного предиката, заданного на множестве $M = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k\}$, таблица имеет вид:

Таблица 58

x	μ_1	μ_2	$\dots$	μ_k
P	δ_1	δ_2	$\dots$	δ_k

где $\delta_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, k$.

Пример двуместного предиката

Пример 38 *Зададим предметные множества:*
$\mathrm{M}_1 = \{$*Москва, Иваново, Саратов*$\}$ *(названия городов),*
$\mathrm{M}_2 = \{$*Москва, Уводь, Волга*$\}$ *(названия рек).*
Предикат P определим предложением

$$P(x,y) = \{\textit{Город } x \textit{ расположен на реке } y\}\ .$$

Его табличное задание как функции $P : M_1 \times M_2 \to \{0,1\}$ имеет следующий вид:

Таблица 59

	г. Москва	*г. Иваново*	*г. Саратов*
р. Москва	*1*	*0*	*0*
р. Уводь	*0*	*1*	*0*
р. Волга	*0*	*0*	*1*

Классификация предикатов аналогична классификации высказываний.

Определение 16 *Предикат $P : M_1, \dots, M_n \to \{0,1\}$ называется:*

1. *тождественно истинным, если для любых конкретных предметов $a_1 \in M_1$, ..., $a_n \in M_n$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно;*

2. *тождественно ложным, если для любых конкретных предметов $a_1 \in M_1$, ..., $a_n \in M_n$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно;*

3. *выполнимым, если для некоторых конкретных предметов $a_1 \in M_1$, ..., $a_n \in M_n$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно;*

4. *опровержимым, если для некоторых конкретных предметов $a_1 \in M_1$, ..., $a_n \in M_n$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно.*

Примеры
Предикат, приведенный в примере 35, является тождественно истинным.
Предикат, приведенный в примере 36, является тождественно ложным.
Предикат, приведенный в примере 37, является опровержимым/выполнимым (по состоянию на 1953 год), поскольку $\lambda(P(\text{Москва})) = 1$, $\lambda(P(\text{Саратов})) =$

1, $\lambda(P(\text{Ленинград})) = 1$, $\lambda(P(\text{Трофимовск})) = 0$ (по состоянию на 1953 год, см. [7]).
Предикат $P(x, y) = \{x^2 + y^2 < 0\}$, заданный на предметных множествах $M_1 = \mathrm{R}$, $M_2 = \mathrm{R}$, является тождественно ложным (это следует из свойств вещественных чисел).

Множество истинности предиката

Определение 17 *Множеством истинности предиката*

$$P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0, 1\}$$

называется множество

$$P^+ = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_1 \times \ldots \times M_n : \ \lambda(P(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = 1\}$$

Для предиката $P(x, y)$, приведенного в примере 38, имеем:

$$P^+ = \{(\text{Москва}, \text{Москва}), (\text{Иваново}, \text{Уводь}), (\text{Саратов}, \text{Волга})\} \ .$$

Из определения множества истинности выводим, что классификация предиката и его множество истинности связаны следующим образом. Предикат $P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0, 1\}$ является:

- тождественно истинным, если и только если $P^+ = M_1 \times \ldots \times M_n$;
- тождественно ложным, если и только если $P^+ = \emptyset$;
- выполнимым, если и только если $P^+ \neq \emptyset$;
- опровержимым, если и только если $P^+ \neq M_1 \times \ldots \times M_n$.

3.2 Равносильность и следование предикатов

Определение 18 *Предикаты*

$$P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0, 1\} \text{ и } Q : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0, 1\}$$

называются равносильными, если $P^+ = Q^+$. (Равносильность предикатов обозначается как $P \Leftrightarrow Q$.)

Отношение равносильности предикатов есть отношение эквивалентности. Поэтому множество предикатов, заданных на $M_1 \times \ldots \times M_n$ распадается на (непересекающиеся) классы эквивалентности.

Пример 39 *Предикат из примера 37 задается как функция* $P : M \to \{0,1\}$ *следующей таблицей*

Таблица 60

Москва	*Саратов*	*Ленинград*	*Трофимовск*
1	*1*	*1*	*0*

Равносильным ему будет предикат с такой же таблицей. Например,

$$Q(x) = \{\text{В городе } x \text{ проживает более 200000 жителей}\}\ .$$

Переход от предиката P к равносильному ему предикату Q называется равносильным преобразованием предиката P.

Замечание. Предикаты могут быть равносильны, если они заданы над одним множеством, и неравносильными, будучи заданными над другим множеством.

Пример 40 *Пусть* $P(x,y)) = \{\sqrt{x\,y} = 20\}$, $Q(x,y)) = \{\sqrt{x}\,\sqrt{y} = 20\}$ *— предикаты, заданные на* $\mathrm{R}_+ \times \mathrm{R}_+$ *(где* R_+ *— множество неотрицательных вещественных чисел). Имеем:*

$$\begin{aligned} P^+ &= \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x\,y = 400\} \\ Q^+ &= \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x\,y = 400\}\ . \end{aligned}$$

Оба множества — одна и та же ветвь гиперболы, расположенная в первом координатном углу. Т.е. предикаты равносильны, $P \Leftrightarrow Q$.

Для тех же предикатов, заданных на $\mathrm{R} \times \mathrm{R}$, *имеем:*

$$\begin{aligned} P^+ &= \{(x,y):\ x\,y \geq 0,\ x\,y = 400\} \\ &= \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x\,y = 400\} \cup \\ &\cup\ \{(x,y):\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ x\,y = 400\} \end{aligned}$$

— две ветви гиперболы, расположенные в первом и третьем координатном углах;
Q^+, *как и в первом случае, — ветвь гиперболы, расположенная в первом координатном углу. Таким образом,* $P \not\Leftrightarrow Q$.

Отношение следствия

Определение 19 *Предикат* $Q : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$ *называется следствием предиката* $P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$, *если и только если* $P^+ \subset Q^+$.

Определению соответствует запись $P \Rightarrow Q$.

Пример 41 *Пусть* $P, Q : \mathrm{Z} \to \{0,1\}$,

$$P(n) = \{n \textit{ делится на 6}\}, \quad Q(n) = \{n \textit{ делится на 3}\}\ .$$

Из свойств целых чисел выводим:

$$Q^+ = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, \quad P^+ = \{\ldots, -6, 0, 6, \ldots\}\ .$$

Откуда имеем $P^+ \subset Q^+$, *т.е.* $P \Rightarrow Q$.

3.3 Логические операции над предикатами

Определение 20 *Отрицанием n-местного предиката*

$$P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$$

называется такой предикат $\neg P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$, *что для любых предметов* $a_1 \in M_1, \ldots, a_n \in M_n$ *высказывание* $\neg P(a_1, \ldots, a_n)$ *является отрицанием высказывания* $P(a_1, \ldots, a_n)$. *(Прочтение символа* $\neg P$ *— ”неверно, что P”.)*

Из определения следует соотношение $(\neg P)^+ = P^{+c}$, где $\ldots^c$ — дополнение множества до $M_1 \times \ldots \times M_n$.

Пример 42 *Пусть предикат ”Река x впадает в Каспийское море” определен на множестве названий всех рек. Его отрицанием будет предикат ”Река x не впадает в Каспийское море”, также определенный на множестве названий всех рек:*
”Река x не впадает в Каспийское море”=¬”Река x впадает в Каспийское море”.

Бинарные логические операции над предикатами

Дадим определения предикатов вида $P \circ Q$, где $\circ$ — некоторая логическая связка.

Определение 21 *Пусть*

$$P : M_1 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}, \quad Q : N_1 \times \ldots \times N_p \to \{0,1\}$$

— n-местный и p-местный предикаты (при этом некоторые r множеств $M_{i_1}, \ldots, M_{i_r}$ *могут быть отождествлены с некоторыми r множествами*

$N_{i_1}, \ldots, N_{i_r}$ *соответственно);*
$\circ$ *— некоторая операция из* $\vee$, $\cdot$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Результатом применения операции $\circ$ *к предикатам* P, Q *называется* $(n+p-r)$*-местный предикат, обозначаемый* $P \circ Q$ *и определяемый как*

$$(P \circ Q)(x_1, \ldots; y_1, \ldots) = P(x_1, \ldots, x_n) \circ Q(y_1, \ldots, y_p).$$

Замечание. Если никакое из множеств $M_1, \ldots, M_n$ не отождествлено ни с каким из множеств $N_1, \ldots, N_p$ (т.е. в определении $r = 0$), то список переменных

$$x_1, \ldots; y_1, \ldots$$

есть список

$$x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p\ .$$

Наличие отождествляемых множеств обозначается указанием наименований переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ вместо $y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}$ соответственно. При этом вместо x-части списка переменных $x_1, \ldots; y_1, \ldots$ указываются все переменные $x_1, \ldots, x_n$, в y-части переменные $y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}$ не указываются.

Пример 43 *Пусть* $M = N = \mathrm{R}$, *оба предиката* $P(x) = {}''x > -1''$ *и* $Q(x) = {}''x < 1''$ *определены на одном и том же множестве* R. *Имеем:*

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = {}''x > -1'' \cdot {}''x < 1'' = {}''-1 < x < 1'' = {}''|x| < 1''.$$

Множеством истинности предиката является интервал $(-1, 1)$.

Пример 44 *Пусть на разных экземплярах множества* R *—* $M = \mathrm{R}$ *и* $N = \mathrm{R}$ *— определены предикаты* $P(x) = {}''x > -1''$ *и* $Q(y) = {}''y < 1''$. *Их конъюнкцией будет предикат*

$$(P \cdot Q)(x, y) = P(x) \cdot Q(y) = {}''x > -1'' \cdot {}''y < 1''.$$

Его множеством истинности будет часть плоскости, определяемая системой неравенств $x > -1$, $y < 1$.

3.4 Кванторные операции над предикатами

Подстановка в предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменных их предметных значений имеет своим результатом некоторое высказывание. Помимо этого, есть иные средства, позволяющие сопоставить предикату высказывание, — это кванторные операции связывания переменной. Переменные, по отношению к которым применяется операция связывания, называются связанными переменными. Остальные переменные в предикате называются свободными. Ниже рассматриваются основные из них, называемые квантор общности (всеобщности) и квантор существования.

Квантор общности

Определение 22 *Операция связывания переменной квантором общности (обзначается $\forall x$) ставит в соответствие одноместному предикату $P(x)$, заданному на некотором предметном множестве M, высказывание $(\forall x)P(x)$, истинность которого определяется следующим образом:*

$$\lambda((\forall x)P(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x) \text{ тождественно истинный;} \\ 0, & \text{если } P(x) \text{ опровержимый.} \end{cases}$$

Запись $(\forall x)P(x)$ читается как "для всякого значения x из M выполняется $P(x)$".

Пример 45 *Пусть $P(x) = \{x > 0\}$. Если этот предикат задан на множестве положительных чисел, то высказывание $(\forall x)P(x)$ истинно. Если предметной областью является иное числовое множество, то высказывание $(\forall x)P(x)$ ложно.*

Если предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то

$$(\forall x)P(x) = P(a_1) \cdot \ldots \cdot P(a_n) \; .$$

Определение 23 *Пусть P — n-местный предикат ($n \geq 2$), определенный на $M_1 \times \ldots \times M_n$. Результатом применения к нему операции $\forall x_1$ является $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такой, что для любого набора $(a_2, \ldots, a_n) \in M_2 \times \ldots \times M_n$ выполнено:*

$$\lambda((\forall x_1)P(x_1, a_2, \ldots, a_n)) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ —} \\ & \text{тождественно истинный} \\ & \text{1-местный предикат;} \\ 0, & \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ —} \\ & \text{опровержимый предикат.} \end{cases}$$

Аналогично определяются операции $\forall x_2, \ldots, \forall x_n$.

Пример 46 *Пусть предикат P(x)={В городе x проживает более 20 000 жителей} определен на множестве M={Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск}. Высказывание $(\forall x)P(x)$ может быть прочитано как $(\forall x)P(x)$={В любом из городов Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск проживает более 20 000 жителей} и является ложным.*

Пример 47 *Пусть 2-местный предикат P(x,y)=*{*Город x расположен на реке y*} *определен на множестве* {*Москва, Иваново, Саратов*}×{*р.Москва, р.Уводь, р.Волга*}. *Применяя к этому предикату кванторы* $\forall x$ *и* $\forall y$, *получим, соответственно, предикаты* $(\forall x)P(x,y)$=*{Любой из городов Москва, Иваново, Саратов расположен на реке y}, заданный на множестве {р.Москва, р.Уводь, р.Волга}, и* $(\forall y)P(x,y)$=*{Город x расположен на любой из рек Москва, Уводь, Волга}, заданный на множестве названий городов {Москва, Иваново, Саратов}.*

Квантор существования

Определение 24 *Операция связывания переменной квантором существования (обзначается* $\exists x$*) ставит в соответствие одноместному предикату* $P(x)$*, заданному на некотором предметном множестве* M*, высказывание* $(\exists x)P(x)$*, истинность которого определяется следующим образом:*

$$\lambda((\exists x)P(x)) = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \text{ тождественно ложный;} \\ 1, & \text{если } P(x) \text{ выполнимый.} \end{cases}$$

Запись $(\exists x)P(x)$ читается как "для некоторого x из M выполняется $P(x)$".

Пример 48 *Пусть предикат P(x)={В городе x проживает более 20 000 жителей} определен на множестве M={Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск}. Высказывание* $(\exists x)P(x)$ *может быть прочитано как* $(\exists x)P(x)$*={В некотором из городов Москва, Саратов, Ленинград, Трофимовск проживает более 20 000 жителей} и является истинным.*

Если предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то

$$(\exists x)P(x) = P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_n)\ .$$

Определение 25 *Пусть* P *—* n*-местный предикат* ($n \geq 2$)*, определенный на* $M_1 \times \ldots \times M_n$*. Результатом применения к нему операции* $\exists x_1$ *является* $(n-1)$*-местный предикат* $(\exists x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, такой, что для любого набора* $(a_2, \ldots, a_n) \in M_2 \times \ldots \times M_n$ *выполнено:*

$$\lambda((\exists x_1)P(x_1, a_2, \ldots, a_n)) = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ —} \\ & \text{тождественно ложный} \\ & \text{1-местный предикат;} \\ 1, & \text{если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ —} \\ & \text{опровержимый предикат.} \end{cases}$$

Аналогично определяются кванторы $\exists x_2, \ldots, \exists x_n$.

Пример 49 *Пусть 2-местный предикат P(x,y)=*$\{$*Город x расположен на реке y*$\}$ *определен на множестве* $\{$*Москва, Иваново, Саратов*$\}\times\{$*р.Москва, р.Уводь, р.Волга*$\}$. *Применяя к этому предикату кванторы* $\exists x$ *и* $\exists y$, *получим, соответственно, предикаты* $(\exists x)$*P(x,y)=*$\{$*Некоторый из городов Москва, Иваново, Саратов расположен на реке y*$\}$, *заданный на множестве* $\{$*р.Москва, р.Уводь, р.Волга*$\}$, *и* $(\exists y)$*P(x,y)=*$\{$*Город x расположен хотя бы на одной из рек Москва, Уводь, Волга*$\}$, *заданный на множестве названий городов* $\{$*Москва, Иваново, Саратов*$\}$.

К $(n-1)$-местному предикату, полученному в результате связывания квантором некоторой переменной в n-местном предикате P, можно применить операцию связывания по какой-нибудь из оставшихся свободных переменных, в результате чего получится $(n-2)$-местный предикат, и так далее до получения высказывания (0-местного предиката).

Упражнения

Упражнение 17 *Дано: P(x)={число x кратно 5} и Q(x)={число x кратно 2} — предикаты, заданные на предметном множестве* M.
Требуется:
1) Найти множества истинности предикатов P *и* Q.
2) Найти множества истинности предикатов $\neg P$ *и* $\neg Q$.
3) Для каждого из предикатов $P\cdot Q$, $P\vee Q$, $P\leftrightarrow Q$, $P\to Q$, $Q\to P$ *привести словесную формулировку и найти множество истинности.*
Варианты задания множества M:
а) $M=\{0,1,2,\ldots,60\}$ *б)* $M=\{0,5,10,15,20\}$ *в)* $M=\{3,7,13,18,19\}$.

Упражнение 18 *Предметное множество задано графически как множество отрезков на плоскости.*
Найти графически множество истинности предикатов

$$P(x,y)=\{\textit{отрезок } x \textit{ пересекается с отрезком } y\},$$

$$Q(x,y)=\{\textit{отрезок } x \textit{ параллелен отрезку } y\}\ .$$

Найти графически множества истинности предикатов $\neg P$, $\neg Q$.
Дать словесную формулировку и найти графически множества истинности предикатов $P\cdot Q$, $P\vee Q$, $P\leftrightarrow Q$, $P\to Q$, $Q\to P$.

1)

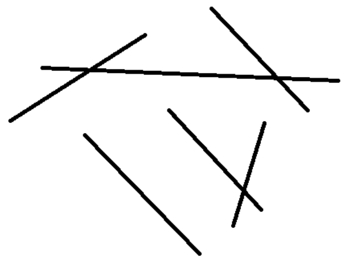

Рисунок 1

2)

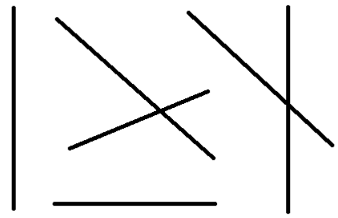

Рисунок 2

3)

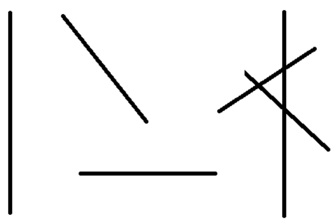

Рисунок 3

4)

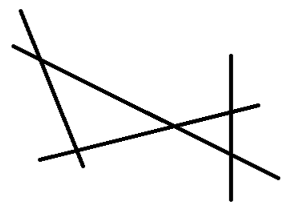

Рисунок 4

5)

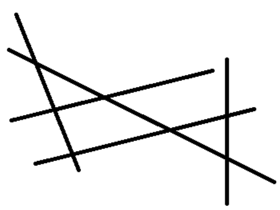

Рисунок 5

6)

Рисунок 6

7)

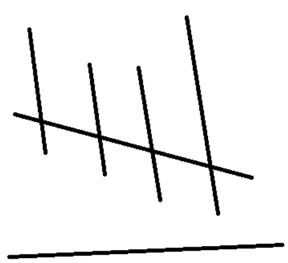

Рисунок 7

8)

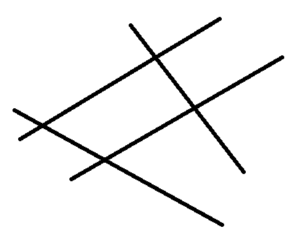

Рисунок 8

9)

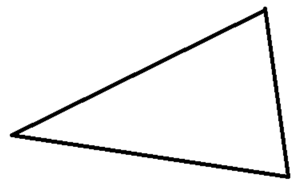

Рисунок 9

10)

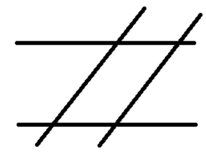

Рисунок 10

11)

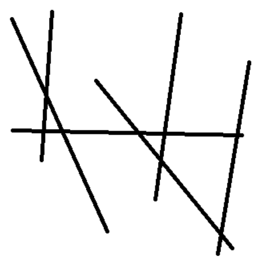

Рисунок 11

12)

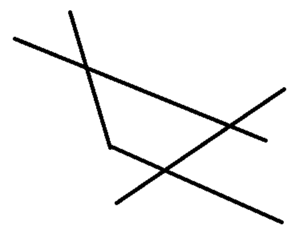

Рисунок 12

13)

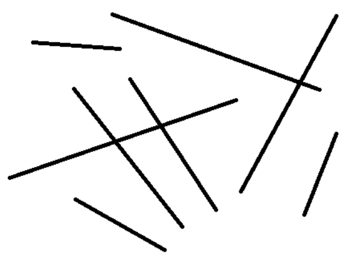

Рисунок 13

14)

Рисунок 14

15)

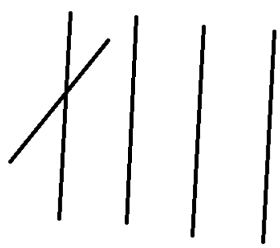

Рисунок 15

16)

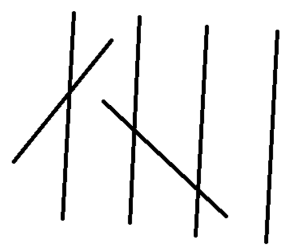

Рисунок 16

17)

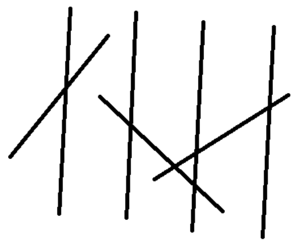

Рисунок 17

18)

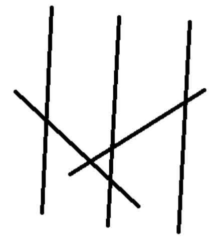

Рисунок 18

19)

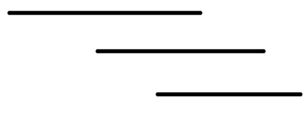

Рисунок 19

20)

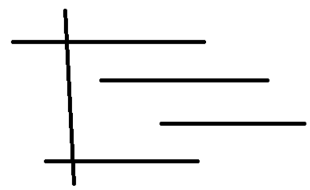

Рисунок 20

21)

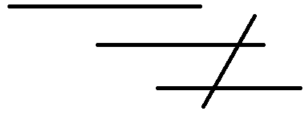

Рисунок 21

22)

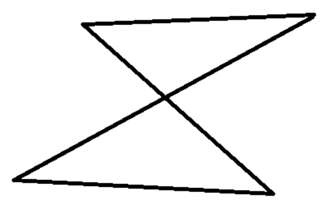

Рисунок 22

23)

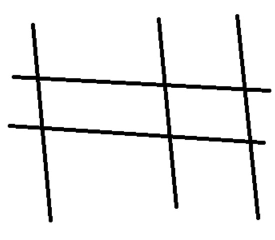

Рисунок 23

24)

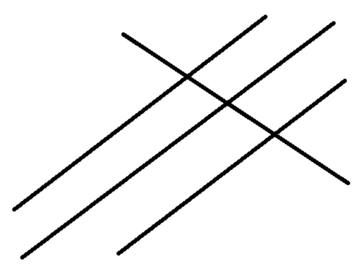

Рисунок 24

25)

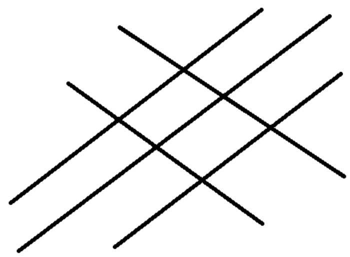

Рисунок 25

26)

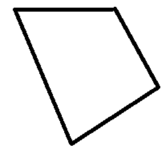

Рисунок 26

27)

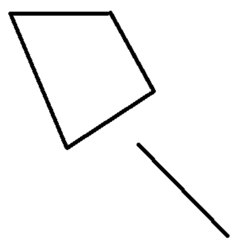

Рисунок 27

28)

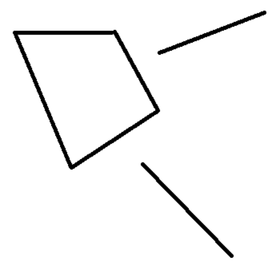

Рисунок 28

29)

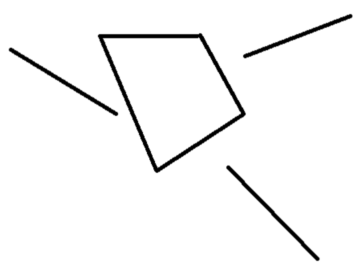

Рисунок 29

30)

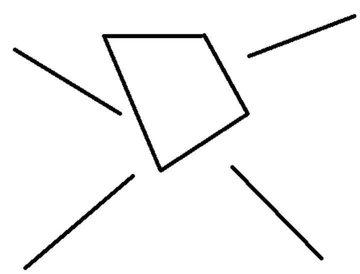

Рисунок 30

31)

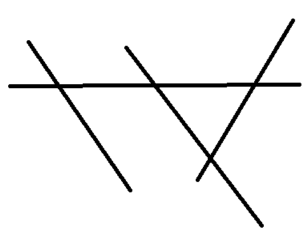

Рисунок 31

32)

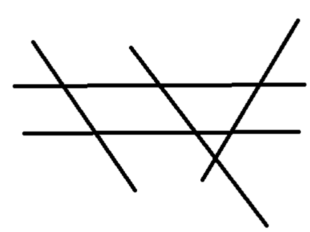

Рисунок 32

33)

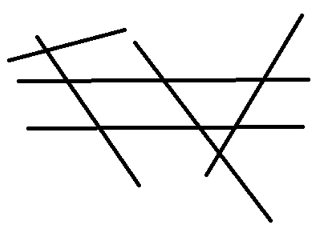

Рисунок 33

34)

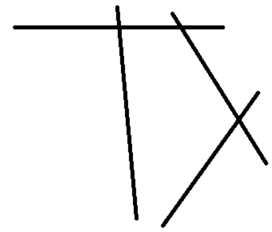

Рисунок 34

35)

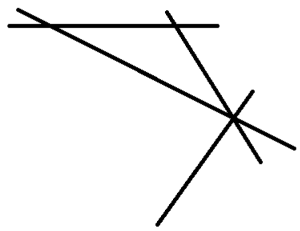

Рисунок 35

36)

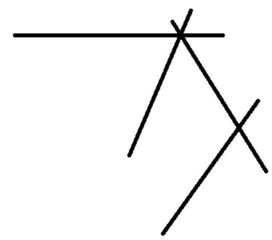

Рисунок 36

37)

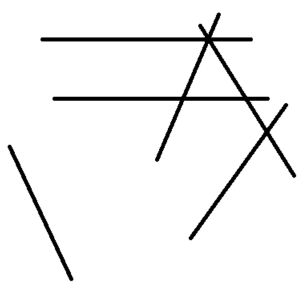

Рисунок 37

38)

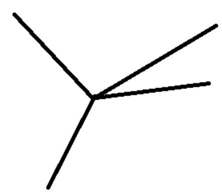

Рисунок 38

39)

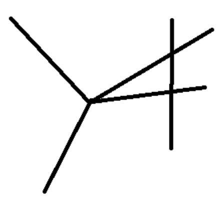

Рисунок 39

40)

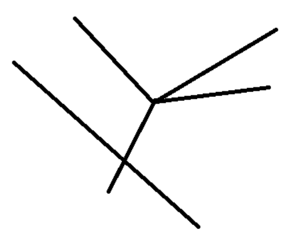

Рисунок 40

Упражнение 19 *Для предиката P(x,y)={Город x расположен на реке y}, определенного на множестве* $M_1 \times M_2$, *где* M_1=*{Москва, Иваново, Саратов} —*

множество названий городов, M_2=\{*Москва, Уводь, Волга*\} — *множество названий рек, связать переменные* x, y *кванторами всеобщности и кванторами существования всеми возможными способами и определить, что получается в результате операции связывания:*
высказывание, в этом случае определить его истинность;
или предикат, в этом случае указать предметную область и классифицировать предикат.
Указание. Варианты связывания следующие:
$(\exists x)P(x,y)$, $(\exists y)P(x,y)$; $(\forall x)P(x,y)$, $(\forall y)P(x,y)$;
$(\exists x)(\exists x)P(x,y)$, $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$; $(\exists x)(\forall x)P(x,y)$, $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$;
$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$, $(\exists y)(\forall x)P(x,y)$, $(\exists y)(\forall y)P(x,y)$;
$(\forall x)(\exists x)P(x,y)$, $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$; $(\forall x)P(x,y)$, $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$;
$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$, $(\forall y)(\exists y)P(x,y)$; $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$.

4 Алгоритмы. Основные понятия. Примеры. Абстрактные вычислительные машины

4.1 Основные понятия

4.1.1 Описание понятия алгоритма

Применительно к вычислениям понятие алгоритма можно описать следующим образом. Алгоритм — набор правил, следуя которым за конечное количество щагов получается решение поставленной задачи. Например: алгоритм решения квадратного уравнения. Приведенное описание является весьма приблизительным, неточным, неявно подразумевает наличие ряда понятий: что такое задача, что такое поставленная задача, что значит решение задачи, кто или что осуществляет действия, предписанные правилами.

Уточнение и формализация приведенного понятия алгоритма могут быть осуществлены различным образом. Не рассматривая строгие формулировки, изложим описание алгоритма более подробно применительно к вычислительным задачам. Изложение потребует применения различных терминов и понятий. Аналогично положению, например, в геометрии, одни понятия определяются через другие, при этом часть понятий нужно выделить в качестве первичных, исходных. Такие понятия можно только описать на примерах средствами естественного языка.

4.1.2 Первичные и некоторые производные понятия

К первичным понятиям отнесем следующие. Предмет — слово, которым будем обозначать все, что угодно. Выбор предмета — это действие человека или имитирующего его технического устройства, осуществляя которое он (оно) както выделяет некоторый предмет среди остальных: говорит о нем, показывает на него и т.п. Сравнение предметов по каким-либо признакам. Результат сравнения фиксируется словами естественного языка: похожи/не похожи, равно, больше, меньше и т.п.

Действие. Действие — это преобразование какого-то предмета. Перемещение его в пространстве, изменение его формы, признаков. Действие — это также формирование (создание) предметов. Например, произнесение слов. А также расформирование (разрушение) предметов. Синонимы понятия действие — акт, операция.

Место. Место — это часть пространства (пространство — это то, что нас окружает). Способы указания места — показать рукой, очертить границы (например, на бумаге), дать месту название и впоследствии называть его, описать расположение места относительно других мест (обобщение системы координат). Места будем разделять на первичные (элементарные) и составные (состоящие из нескольких первичных).

Примеры.

- Лист бумаги — место. В зависимости от ситуации можно полагать, что это место — первичное, можно полагать, что составное.

- Лист бумаги, расчерченный в клетку. Если принято соглашение, что можно что-либо записывать только строго внутри клеток, то имеем: клетки первичные места, клеточный лист — составное место.

Действие может заключаться в формировании места (начертить границу), удалении места (стереть границу), изменении содержимого места — стереть написанное, записать что-то новое, дописать что-то к имеющемуся содержимому.

Операции также можно различать как исходные (первичные, элементарные) и как составные (сложные), сводящиеся к исполнению некоторой совокупности исходных операций. К исходным операциям (элементарным актам) отнесем: запись чего-то в место, воспроизведение содержимого одного места в другом месте, удаление содержимого места.

Примеры составных операций: запись многоразрядного числа в клеточном листе (в одной клетке не более одной цифры). Применительно к месту можно говорить об операции сравнения содержимого одного места с содержимым другого места. Результат операции фиксируется выражениями вида: совпадает/не совпадает, да/нет и т.п. либо специальными предметами, размещаемыми в заранее оговоренных местах в заранее оговоренном виде (флажок поднятый/сброшенный).

4.1.3 Примеры алгоритмов

Приведем пример описания арифметического действия с использованием введенных понятий. Это описание можно также считать примером алгоритма.

Пример 50 *Сложение двух одноразрядных чисел с использованием таблицы сложения.*
Имеем: в нескольких смежных местах (клетках) записано арифметическое выражение.

3	+	2	=			

(*)

Рисунок 41

Требуется записать ответ справа от символа =. По условию задачи, помимо места с примером, есть еще место (составное), называемое таблица сложения. Будем полагать, что эта таблица написана в виде квадрата.

Производство операции сложения сводится к следующим операциям. Найти (выбрать среди других) место, называемое таблица сложения. *В заголовочной строке (которую нужно сначала выбрать, распознать) найти цифру* 3. *Поиск производится последовательным перебором содержимого мест (клеток) в заголовочной строке и сравнением их содержимого с цифрой* 3. *Аналогично в заговолочном столбце найти цифру* 2. *Найти общую часть составных мест — соответствуюющих столбца и строки в таблице. В составном месте* (∗) *найти (увидеть) место непосредственно справа от места с содержимым* "=" *(которое тоже нужно сначала найти). В найденное место записать содержимое места на пересечении столбца* 3 *и строки* 2. *(Более строго: надо предварительно определить, является ли сумма цифр* 2 *и* 3 *одноразрядным числом или двухразрядным, и в зависимости от этого вписать результат либо в одно место справа от знака =, либо в два.)*

Пример 51 *Сложение двух многоразрядных столбиком. Дано: два числа, записанные обычным образом для сложения столбиком*

Таблица 61

4	3	5	2	1
		3	8	2

Требуется: в нижний ряд клеток под чертой записать сумму этих чисел.

Введем в рассмотрение (сформируем) дополнительные места над верхним рядом клеток, куда будем записывать значения переноса, и еще несколько мест для записи промежуточных результатов (на рисунке не показаны). Операция сложения столбиком сводится к многократному исполнению операций вида, приведенного в примере 1, с тем дополнением, что сумма цифр в таблице сложения должна быть записана в двухразрядном виде, старший разряд должен записываться в разряд переноса, и столбиком складываются фактически три цифры попарно.

Если ввести в рассмотрение таблицу суммы трех цифр, то количество элементарных операций при производстве сложения будет меньше.

4.2 Абстрактные вычислительные машины

Для решения задач существования, формализации понятия алгоритма были предложены различные абстрактные вычислительные машины, в той или иной степени сходные с реальными (т.е. технически реализованными) вычислительными устройствами.

Абстрактная вычислительная машина — это вычислительная схема, т.е. набор соглашений, правил, определяющих порядок записи исходных даных, действий над ними, записи промежуточных и итоговых результатов, набор допустимых операций, определение очередности выполнения операций. Первыми из них были: машина Поста и машина Тьюринга. Далее рассмотрим только машину Поста ввиду ее исключительной простоты.

Описание машины Поста. Машину Поста можно представлять как техническое устройство следующего вида. Имеется бесконечная в обе стороны лента, расчерченная на клетки (ячейки). Каждая клетка либо может быть пустой, либо содержать символ |. Вдоль ленты передвигается каретка. В неподвижном состоянии каретка расположена строго напротив какой-либо ячейки. Такая ячейка называется ячейкой, обозреваемой кареткой. Каретка может передвигаться шагами вправо/влево строго на одну ячейку и может исполнять операции: запись символа | в ячейку, распознавание состояния ячейки: пуста/не пуста, стирание символа | в ячейке.

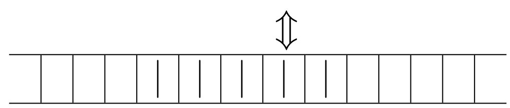

Рисунок 42

Сочетание заполненных и пустых ячеек ленты называется состоянием ленты. Положение каретки напротив некоторой ячейки называется состоянием каретки. Состояние ленты в сочетании с состоянием каретки называется состоянием машины.

Запись чисел на ленте: на ленте могут быть записаны только неотрицательные целые числа. Число $k \geq 0$ записывается как набор из $k+1$ палочек, записанных в ряд ячеек подряд.

Команда машины Поста состоит из номера и указания действия. Состав команд машины Поста следующий.

- $k.$ $\rightarrow$ смещение каретки на шаг вправо
- $k.$ $\leftarrow$ смещение каретки на шаг влево
- $k.$ $|$ запись символа в ячейку
- $k.$ $\times$ стирание содержимого ячейки
- $k.$? i,j переход на команду i если обозреваемая ячейка пуста, на команду j если ячейка не пуста (номера i,j называются отсылками)

- k. *стоп* остановка

Программой машины Поста называется список команд, удовлетворяющий условиям:

- список должен содержать команду с номером 1;
- в списке должна быть хотя бы одна команда *стоп*;
- для всякого значения отсылки в списке должна быть команда с таким же номером.

Исполнение программы начинается с команды под номером 1.

Рассмотрим одну из простейших задач, решаемых на машине Поста.

Задача о прибавлении единицы. Дано: На ленте записано некоторое число k. Положение каретки произвольно. Получить: на ленте записано число $k+1$ (положение каретки произвольно).

Решение существенно зависит от исходного состояния машины.

1. Пусть каретка расположена справа/слева от набора палочек. Тогда нужно перемещать каретку влево/вправо до тех пор, пока в обозреваемой ячейке не будет распознана палочка. После чего передвинуть каретку на шаг в противоположном направлении (на пустую ячейку) и в обозреваемой ячейке поставить палочку. В случае расположения каретки слева от набора программа решения задачи имеет вид:

1. $\rightarrow$
2. ? *1*,*3*
3. $\leftarrow$
4. |
5. *стоп*

2. Пусть каретка расположена напротив одной из ячеек набора. В этом случае нужно передвигать каретку в определенную сторону (например, вправо) до тех пор, пока она не окажется напротив пустой ячейки. В эту ячейку нужно записать палочку и остановиться. Программа имеет следующий вид:

1. ? *2*,*1*
2. |
3. *стоп*

Упражнение 20 *Рассмотреть задачу о вычитании единицы: на ленте записано положительное число k, каретка находится напротив одной из ячеек этого числа; требуется получить на ленте запись числа $k-1$ (положение каретки произвольно).*

5 Элементы теории сложности алгоритмов

5.1 Понятие сложности алгоритма

5.1.1 Основные понятия

Очевидно, что для исполнения алгоритма требуется место и время.

Определение 26 *Пространственной (емкостной) сложностью алгоритма называется количество места (машинной памяти), требуемого для его исполнения.*

Определение 27 *Временн***о***й сложностью алгоритма называется количество времени, требуемого для его исполнения.*

Временная сложность определяется, очевидно, количеством операций определенного вида и временем исполнения такой операции. Отвлекаясь от времени исполнения операции (оно зависит от вида технического устройства) временную сложность выражают через количество операций. В связи с этим временную сложность будем называть трудоемкостью алгоритма.

В большинстве задач, возникающих в практике программирования, временная и пространственная сложность связаны обратной зависимостью. Т.е. для уменьшения трудоемкости алгоритма требуется отвести больше места. И наоборот, при уменьшении отводимого места увеличивается время исполнения алгоритма. Также временная и пространственная сложность зависят от размеров исходных данных. Что именно подразумевается под размером данных, определяется постановкой задачи. В качестве такового могут быть: величина числа (чисел), разрядность; в алгоритмах на графах — количество вершин, ребер, сумма или произведение этих количеств.

Трудоемкость алгоритма A будем обозначать T_A. Индекс A будем опускать в случаях, когда из сказанного ранее понятно, о каком алгоритме идет речь. Предполагая, что размер входных данных задается одним числом n, зависимость трудоемкости от размера входных данных будем обозначать $T_A(n)$.

5.1.2 Асимптотические оценки

Во многих практических и теоретических задачах знание точного выражения величины T_n оказывается излишним. Требуется лишь описать поведение функции T_n при больших значениях n. Приведем сейчас лишь одно средство для такого описания, широко применяемое в математическом анализе, — O-символика.

Определение 28 *Пусть $f(n)$, $g(n)$ — неотрицательные функции. Будем говорить, что $f(n) = O(g(n))$ ($f(n)$ равняется O большое от $g(n)$), если при всех достаточно больших n величина $f(n)/g(n)$ ограничена. Функция g называется при этом асимптотической оценкой функции f.*

Пример 52 $x^2 + x + 1 = O(x^2)$.

5.2 Примеры расчета сложности алгоритмов поиска и сортировки

5.2.1 Операции алгоритмов поиска и сортировки

Для анализа сложности алгоритмов введем в качестве первичных следующие операции:

1. α — операция присваивания (воспроизведение содержимого одного места в другом месте);
2. β — операция сравнения чисел;
3. операция прибавления 1 (-1) к числовому содержимому некоторого места;
4. операция перехода (условного, либо безусловного).

Длительность операций 3) и 4) будем полагать пренебрежимо малой (по этой причине буквенные обозначения для этих операций не вводятся). Длительность операции $*$ будем обозначать τ_*. В ходе рассмотрения алгоритмов также будут введены в рассмотрение составные операции: операция обмена и операция упорядочения числового ряда специального вида. Обозначения и характеристики этих операций будут введены в соответствующих разделах.

5.2.2 Трудоемкость алгоритма поиска

Формулировка задачи. Дан числовой ряд $a_1, \ldots, a_n$. Требуется определить номер i^* наименьшего элемента ряда и значение этого элемента.

Описание алгоритма. Обозначим $m = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$. Сначала полагаем $m = a_1$, $i^* = 1$. Затем перебираем все элементы ряда со второго до конца и сравниваем их значения с m. Если очередной элемент ряда a_i окажется меньше m, то полагаем $m = a_i$, $i^* = i$.

Программный текст алгоритма на псевдокоде:

$i^* := 1$
$m := a_{i^*}$
цикл для $i := 2..n$ **выполнять**
. **если** $a_i < m$ **то**
. . $i^* := i$
. . $m := a_{i^*}$
. **конец если**
конец цикла

Вычислим трудоемкость приведенного алгоритма. Обозначим t_i — время исполнения операций при исполнении блока цикла со значением счетчика, равным i. Пренебрегая временем исполнения строк **конец если** и **конец цикла** и временем исполнения операций вне цикла, имеем:

$$t_i = \begin{cases} t_\beta + 2t_\alpha, & \text{если } a_i < m; \\ t_\beta, & \text{если } a_i \geq m. \end{cases}, \; T(n) = \sum_{i=2}^{n} t_i \; .$$

Таким образом, имеем двустороннюю оценку:

$$t_\beta(n-1) \leq T(n) \leq (2t_\alpha + t_\beta)(n-1) \; .$$

Асимптотическая оценка трудоемкости: $T(n) = O(n)$.

Упражнение 21 *Получить выражение $T(n)$ при условии, что временем исполнения операций в заголовочной строке цикла можно пренебречь.*

5.2.3 Трудоемкость алгоритма сортировки

Задача сортировки. Дан числовой ряд $a_1, a_2, \dots, a_n$. Нужно получить ряд

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \tag{16}$$

из тех же элементов, удовлетворяющий условию:

$$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_n}. \tag{17}$$

Если числовой ряд рассматривать как функцию $\varphi : \{1, \dots, n\} \to \mathrm{R}$, то ряд (16), удовлетворяющий условию (17), есть неубывающая функция. На этом основании будем называть получение ряда (16) сортировкой исходной ряда по неубыванию.

Пример 53 *Исходный ряд:* 3, 5, 8, 1, 3, 4, 5. *Сортированный ряд (упорядоченный по неубыванию):* 1, 3, 3, 4, 5, 5, 8.

Общее описание алгоритма сортировки. Сортируемый ряд представляется состоящим из двух частей: A', A'', часть A' упорядочена по неубыванию и предшествует части A'' (пустой ряд и одноэлементный ряд считаются упорядоченными). Перед началом исполнения алгоритма часть A' либо пуста, либо содержит один элемент. Исполнение алгоритма заключается в многократном повторении одной и той же (составной) операции, после которой часть A' увеличивается на один элемент, часть A'' уменьшается на один элемент. После ?-кратного повторения такой операции часть A'' становится пустой, часть A' занимает все место, отведенное под исходный ряд. Т.е. A' представляет собой исходный ряд отсортированный по неубыванию.

Общая схема программного текста алгоритма следующая:

цикл ? раз **выполнять**
. Преобразование A' и A''
конец цикла

Сортировка выбором

Общее описание алгоритма. В части A'' ищется минимальный элемент $a_{i^*} = \min A''$. Элемент a_{i^*} изымается из состава части A'' и включается в состав части A' посредством операции обмена $a_{k+1} \leftrightarrow a_{i^*}$.

Пример 54 $A = \{7, 5, 12, 25, 1, 2\}$. *Имеем:*

1. $\underbrace{7, 5, 12, 25, 1, 2}_{m=1}$
2. $1, \underbrace{5, 12, 25, 7, 2}_{m=2}$
3. $1, 2, \underbrace{12, 25, 7, 5}_{m=5}$
4. $1, 2, 5, \underbrace{25, 7, 12}_{m=7}$
5. $1, 2, 5, 7, \underbrace{25, 12}_{m=12}$
6. $1, 2, 5, 7, 12, 25.$

Общая схема программного текста алгоритма следующая:

цикл для $i := 1..n$ **выполнять**
. $a_{i^*} = \min\{a_i, \ldots, a_n\}$
. $a_i \leftrightarrow a_{i^*}$
конец цикла

Операция обмена γ выражается через операции присваивания следующим образом (u — вспомогательная переменная): $u := a_{i^*}$, $a_{i^*} := a_i$, $a_i := u$. Таким образом, $\tau_\gamma = 3 \cdot \tau_\alpha$. Длительность составной операции δ_i поиска минимального элемента ряда $a_i, \ldots, a_n$ (состоящего из $n-i+1$ элементов) есть $(n-i+1)(2\tau_\alpha + (2\tau_\beta)$. Причем длительность этой операции зависит от значения i.

Пренебрегая операциями увеличения на 1 и операциями перехода, получим:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n}(\tau_\alpha + \tau_{\delta_i} + 3\tau_\alpha) = \sum_{i=1}^{n}(4\tau_\alpha + \tau_{\delta_i}) = 4n\tau_\alpha + \sum_{i=1}^{n}\tau_{\delta_i} \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_{\delta_i} = \sum_{i=1}^{n}(n-(i-1)) \cdot 2 \cdot (\tau_\alpha + \tau_\beta) = 2 \cdot (\tau_\alpha + \tau_\beta)\sum_{i=1}^{n}(n-(i-1)) \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(n-(i-1)) = (n-0)+(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{20}$$

Подставляя последнее выражение в (19) и далее в (18), имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\tau_{\delta_i} = (\tau_\alpha + \tau_\beta) \cdot n(n+1)$$

$$T(n) = 4n\tau_\alpha + (\tau_\alpha + \tau_\beta) \cdot n(n+1)$$

$$T(n) = (\tau_\alpha + \tau_\beta)n^2 + (4\tau_\alpha - \tau_\alpha - \tau_\beta)n = (\tau_\alpha + \tau_\beta)n^2 + (5\tau_\alpha + \tau_\beta)n.$$

Итого: $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$, где $c_1 = (\tau_\alpha + \tau_\beta)$, $c_2 = (5\tau_\alpha + \tau_\beta)$. Асимптотическая оценка: $T(n) = O(n^2)$.

Упражнение 22 *Получить выражение $T(n)$ при условии, что временем исполнения операций в заголовочной строке цикла можно пренебречь.*

Сортировка вставками

Общее описание алгоритма. Ряд $A = a_1, \ldots, a_n$ разбивается на две части: $\underbrace{a_1, \ldots, a_s}_{A'}$, $\underbrace{a_{s+1}, \ldots, a_n}_{A''}$. Для ряда A' выполнено условие $a_1 \le \ldots \le a_s$ (ряд A' отсортирован по неубыванию). Элемент a_{s+1} вставляется в ряд A' так, чтобы ряд A' в новом составе был упорядочен по неубыванию:

$$a_{i_1} \le a_{i_2} \le \ldots \le a_{i_{s+1}}, \text{ где } i_1, i_2, \ldots, i_{s+1} \in \{1, 2, \ldots, s+1\}.$$

Пример 55 *Исходный ряд:* 7, 5, 12, 25, 1, 2. *Действуя по алгоритму, имеем:*

1. $\underbrace{7}, 5, 12, 25, 1, 2$

2. $\underbrace{7, 5}, 12, 25, 1, 2$

3. $\underbrace{5, 7}, 12, 25, 1, 2$

4. $\underbrace{5, 7, 12}, 25, 1, 2$

5. $\underbrace{5, 7, 12, 25}, 1, 2$

6. $\underbrace{5, 7, 12, 25, 1}, 2$

7. $\underbrace{1, 5, 7, 12, 25}, 2$

8. $\underbrace{1, 2, 5, 7, 12, 25}$

В данном разделе ограничимся составлением программного текста алгоритма. Введем в рассмотрение составную операцию *Упорядочить ряд*. Имеем:

цикл для $i := 2..n$ **выполнять**
. Упорядочить ряд $a_1, \ldots, a_i$
конец цикла

Составим программный текст операции *Упорядочить ряд*. Формулировка подзадачи следующая.
Дано: $a_1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_l$, a_{l+1}. Требуется: упорядочить ряд $a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}$.

Один из вариантов решения следующий: перебирать элементы ряда $a_1, \ldots, a_l$ в порядке возрастания их номеров и сравнивать с элементом a_{l+1} на условие $a_j \leq a_{l+1}$. Как только это условие будет нарушено, вставить элемент a_{l+1} перед a_j, сдвинув элементы $a_j, \ldots, a_l$ на одну клетку (позицию) вправо.

Программный текст будет следующий:

цикл для $j := 1..l$ **выполнять**
. **если** $a_j > a_l$ **то**
. . Вставить элемент a_{l+1} перед a_j
. . **выход из цикла**
. **конец если**
конец цикла

Наконец, программный текст операции *Вставить элемент* будет следующий:

$u := a_{l+1}$
цикл для $k := l..j$ **реверс выполнять**
. $a_{k+1} := a_k$
конец цикла
$a_j := u$

Упражнение 23 *Составить единый программный текст алгоритма.*

Упражнение 24 *Составить выражение для сложности алгоритма.*

Список литературы

[1] Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. — М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 288 с.

[2] Глушков В.М. Введение в кибернетику. — Издательство Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1964,

[3] Зиновьев А.А. Логика науки. — М.: Издательство ”Мысль”, 1971.

[4] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высших учеб. заведений/ В.И. Игошин. — 2-е изд. стер. — М.: Издательский центр ”Академия”, 2008 — 448 с.,

[5] Новиков П.С. Элементы математической логики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973.

[6] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 272 с.

[7] Географический атлас для учителей средней школы/ Ю.В. Филиппов, В.А. Башлавин, Е.Л. Гурари, И.С. Жив, М.И. Никишов — Главное управление геодезии и картографии МВД СССР. Москва 1954 г.

[8] Т. Кормен и др. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом ”Вильямс”, 2005. — 1296 с.: ил.

Электронное учебное издание

Александр Юрьевич **Игумнов**

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Редактор Матвеева Н.И.

Темплан 2024 г. Поз. № 6.
Подписано к использованию 28.06.2024. Формат 60x84 1/16.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 4,6.

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

ВПИ (филиал) ВолгГТУ.
404121, г. Волжский, ул. Энгельса, 42а.